Gravitační pole

(test version, not revised)

Petr Pošta
pposta@karlin.mff.cuni.cz

11. listopadu 2009

Obsah

Gravitační zákon

Gravitační zákon

Newtonův gravitační zákon

Dvě tělesa o hmotnostech m_1, m_2 a vzdálenosti r na sebe vzájemně působí stejně velkými přitažlivými silami

$$F_g = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Konstantu $\varkappa$ nazýváme **gravitační konstantou**.

Gravitační zákon

Gravitační konstanta

$$\varkappa = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{N\ kg^{-2}\ m^2}$$

Její jednotku určíme ze vztahu

$$\varkappa = \frac{F_g r^2}{m_1 m_2} \implies [\varkappa] = \mathsf{N} \,.\, \mathsf{kg}^{-2} \,.\, \mathsf{m}^2.$$

Jakou je vyjádření její jednotky v základních jednotkách SI ?

Gravitační zákon

Gravitační konstanta

$$\varkappa = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{N\ kg^{-2}\ m^2}$$

Její jednotku určíme ze vztahu

$$\varkappa = \frac{F_g r^2}{m_1 m_2} \implies [\varkappa] = \mathsf{N} \,.\, \mathsf{kg}^{-2} \,.\, \mathsf{m}^2.$$

Jakou je vyjádření její jednotky v základních jednotkách SI ?

$$\mathsf{N} \,.\, \mathsf{kg}^{-2} \,.\, \mathsf{m}^2 = \mathsf{kg} \,.\, \mathsf{m} \,.\, \mathsf{s}^{-2} \,.\, \mathsf{kg}^{-2} \,.\, \mathsf{m}^2 = \mathsf{kg}^{-1} \,.\, \mathsf{m}^3 \,.\, \mathsf{s}^{-2}.$$

Gravitační zákon

Gravitační síla

- je vždy přitažlivá
- má směr spojnice těžišť obou těles
- pro obě tělesa má stejnou velikost, ale může mít různé účinky

  Stejně velkou silou, jakou působí Země na kámen, působí také kámen na Zemi. Zatímco ale kámen díky své nízké hmotnosti velmi rychle padá, se Zemí to (obrazně řečeno) ani nehne.

Gravitační zákon

Úloha

Dva hmotné body, každý o hmotnosti 50 kg, umístěné ve vzájemné vzdálenosti 50 cm, se přitahují gravitační silou:

a) $6{,}67 \,.\, 10^{-11}$ N
b) $6{,}67 \,.\, 10^{-7}$ N
c) $6{,}67 \,.\, 10^{-9}$ N
d) $3{,}34 \,.\, 10^{-7}$ N

Gravitační zákon

Úloha

Jak se změní gravitační síla mezi dvěma tělesy, jestliže jejich vzdálenost se
a) 2x zvětší,
b) 4x zmenší?

Gravitační zákon

Gravitační zrychlení značka: $\vec{a}_g$ jednotka: m . s^{-2}

Gravitační síla $\vec{F}_g$, kterou působí Země na těleso o hmotnosti m, udílí tělesu gravitační zrychlení

$$\vec{a}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}.$$

Pro jeho velikost platí

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \frac{\varkappa \frac{mM_Z}{r^2}}{m} = \varkappa \frac{M_Z}{r^2}$$

Na povrchu Země má hodnotu (maličko větší než tíhové zrychlení)

$$a_g = \varkappa \frac{M_Z}{R_Z^2} \doteq 9{,}83 \text{ m . s}^{-2}$$

Gravitační zákon

Intenzita gravitačního pole zn.: $\vec{K}$ jed.: m . s^{-2}

Intenzita gravitačního pole je vektorová fyzikální veličina, definovaná v daném místě prostoru jako gravitační síla $\vec{F}_g$ působící na těleso o hmotnosti 1 kg. Vypočte se

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{a}_g$$

a je tedy rovna gravitačnímu zrychlení tělesa.

Intenzita pole je veličina, která se hodí pro popis pole lépe než síla. Síla je totiž i v témže místě prostoru pro různě těžké objekty různá, zatímco intenzita pole nikoliv. Přitom působící sílu lze snadno získat vynásobením hmotností objektu.

Gravitační zákon

Poznámky

1. Formálně je ve vztahu pro zrychlení hmotnost *setrvačná*, zatímco ve vztahu pro intenzitu hmotnost *gravitační*. Tyto dvě veličiny jsou podle nejnovějších měření téměř jistě totožné.
2. Pro jiná než gravitační pole rovnost *intenzity pole* a *uděleného zrychlení* nenastává.

Gravitační a tíhové pole

Gravitační pole

Jakékoliv hmotné těleso působí na všechna ostatní hmotná tělesa gravitační silou prostřednictvím **gravitačního pole**. Toto pole můžeme znázornit pomocí

- vektorů intenzity pole
- siločar
- ekvipotenciálních ploch
- ...

Gravitační pole

Co je intenzita pole už víme.

Gravitační pole

Co je intenzita pole už víme.

Siločáry

Siločára je myšlená křivka, jejíž tečna má v každém jejím bodě směr působící gravitační síly (působící na libovolný hmotný bod v tomto místě).

Gravitační pole

Co je intenzita pole už víme.

Siločáry

Siločára je myšlená křivka, jejíž tečna má v každém jejím bodě směr působící gravitační síly (působící na libovolný hmotný bod v tomto místě).

Ekvipotenciální plochy

Jsou to plochy se stejnou gravitační potenciální energií. Platí, že v každém místě jsou kolmé na siločáry pole.

Gravitační pole

Charakter pole může být obecně složitý. Rozeznáváme dva speciální typy:

- **homogenní pole**
  Ve všech místech má intenzita pole stejný směr a stejnou velikost
  (např. pole tíhové v blízkosti povrchu Země)
- **centrální nebo také radiální pole**
  Intenzita pole klesá s druhou mocninou vzdálenosti a míří do jednoho (centrálního) bodu.
  (pole vytvářené hmotným bodem nebo homogenní koulí, dobře tak lze popsat pole Země, planet, Slunce, hvězd...)

Tíhové pole

Tíhová síla a tíhové pole

Jako **pole tíhové** označujeme pole v blízkosti povrchu Země. **Tíhová síla** $\vec{F}_G$ je vektorovým součtem **gravitační síly** Země $\vec{F}_g$ a **setrvačné odstředivé síly** $\vec{F}_S$.

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_s$$

V blízkosti povrchu víme, že tělesa padají s **tíhovým zrychlením** $\vec{g}$. Platí, že

$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

Tíhové zrychlení se mění s výškou i zeměpisnou šířkou. V malé oblasti jsou ale změny nepatrné a tíhové pole můžeme s dobrou přesností považovat za **homogenní pole**.

Tíhové pole

Tíhové zrychlení

- obvykle počítáme s hodnotou 9,81 m . s^{-2}, popř. 10 m . s^{-2}
- **normální tíhové zrychlení** je dohodnutá konstanta

$$g_0 = 9,80665 \text{ m . s}^{-2} \quad \text{(přesně)}.$$

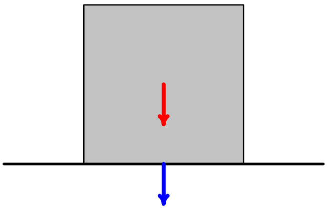
Je s přesností na pět desetinných míst rovna tíhovému zrychlení na rovníku při hladině moře.

Tíhové pole

Tíha značka: $\vec{G}$ jednotka: N (newton)

Tíha je vektorová fyzikální veličina, jejíž velikost, směr i orientace je rovna tíhové síle. Rozdíl je v tom, že jako působiště tíhové síly volíme těžiště tělesa, zatímco působiště tíhy na styku tělesa s podložkou.

$$\vec{G} = m\vec{g}$$

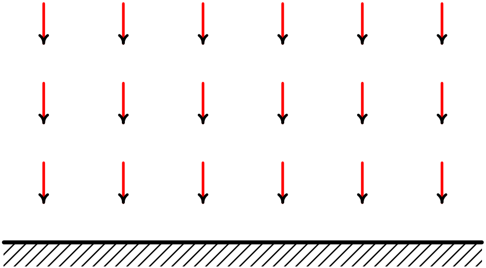


Tíhová síla – červený vektor. Tíha – modrý vektor.

Tíhové pole

Tíhové pole – intenzita pole

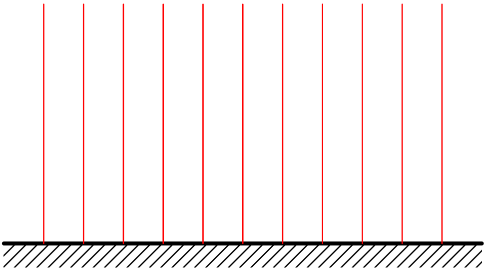
Intenzita pole = síla působící na hmotný bod o hmotnosti 1 kg. V tíhovém poli je ve všech místech přibližně stejně veliká a má stejný směr – kolmo k vodorovné ploše, s orientací svisle dolů.



Tíhové pole

Tíhové pole – siločáry

Siločáry jsou v tíhovém poli svislé polopřímky kolmé na povrch Země.



Tíhové pole

Tíhové pole – ekvipotenciální plochy

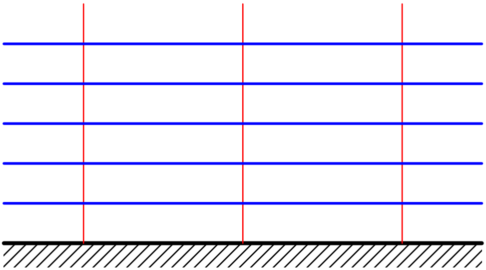
Tíhová potenciální energie se vypočte podle vztahu

$$E_p = mgh$$

kde h je výška nad zvoleným místem s nulovou potenciální energií – obvykle vodorovným povrchem nebo "hladinou moře". Konstantní potenciální energií tedy mají všechna místa ve stejné výšce nad povrchem. Ekvipotenciální plochy jsou místa se stejnou potenciální energií, tedy **plochy rovnoběžné s hladinou moře**.

Tíhové pole

Tíhové pole – ekvipotenciální plochy



Červemé čáry naznačují siločáry, modré čáry vodorovné ekvipotenciální plochy (na siločáry kolmé).

Tíhové pole

Pohyby v tíhovém poli Země

Už jsme probírali dříve.

- volný pád
- vrhy (svislý, vodorovný, šikmý)
  Jde vlastně o složení dvou pohybů: volného pádu a rovnoměrného přímočarého pohybu (vzhůru, vodorovně, šikmo).

Radiální pole

Radiální (centrální) gravitační pole

Vektor intenzity míří vždy do jednoho bodu.

- gravitační pole hmotného bodu
  vektor intenzity /síly/ míří do něj

Pro velikost intenzity gravitačního pole hmotného bodu o hmotnosti M ve vzdálenosti r platí

$$K = \frac{F_g}{m} = \frac{\varkappa \frac{mM}{r^2}}{m} = \varkappa \frac{M}{r^2}.$$

Intenzita pole tedy klesá s druhou mocninou vzdálenosti.

Radiální pole

Radiální (centrální) gravitační pole

Vektor intenzity míří vždy do jednoho bodu.

- gravitační pole hmotného bodu
  vektor intenzity /síly/ míří do něj
- gravitační pole homogenní koule (přibližně to odpovídá také gravitačnímu poli hvězd a planet).
  vektor intenzity /síly/ míří do středu koule

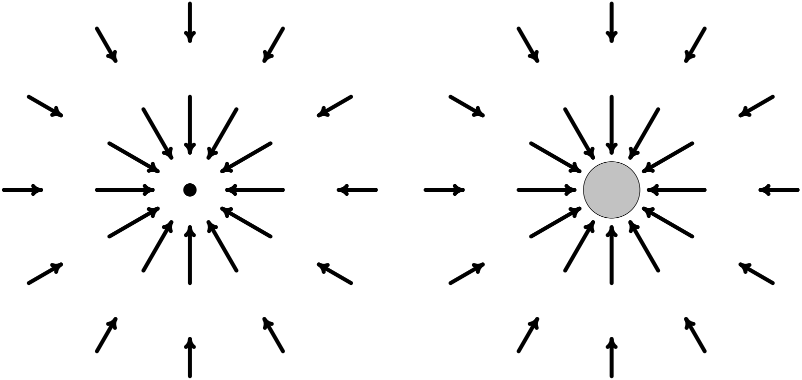
Pro velikost intenzity gravitačního pole hmotného bodu o hmotnosti M ve vzdálenosti r platí

$$K = \frac{F_g}{m} = \frac{\varkappa \frac{mM}{r^2}}{m} = \varkappa \frac{M}{r^2}.$$

Intenzita pole tedy klesá s druhou mocninou vzdálenosti.

Radiální pole

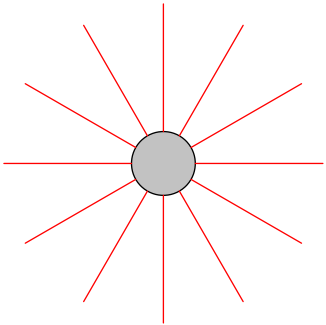
Radiální pole – intenzita pole



Radiální gravitační pole hmotného bodu a homogenní koule. Čím dále od středu, tím kratší šipka = menší intenzita (síla) pole.

Radiální pole

Radiální pole – siločáry



Siločáry vychází ze středu (centra) koule jako paprsky.
Odtud názvy: centrální pole, radiální (tj. paprsčité) pole.

Radiální pole

Radiální pole – potenciální energie

Potenciální energie v radiálním gravitačním poli je určena vztahem

$$E_p = -\varkappa \frac{mM}{r}$$

klesá tedy s první mocninou rostoucí vzdálenosti. Konstatní je na sférách (kulových plochách) se stejným středem – centrem pole.

Práce v gravitačním poli

Práce potřebná přenesení tělesa z místa 1 do místa 2 je rovna rozdílu potenciálních energií:

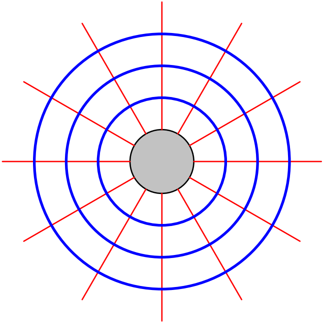
$$W = E_{p2} - E_{p1}$$

Dejte pozor: protože síla se s polohou mění, nejde počítat se vztahem $W = F_g s \cos \alpha$.

Radiální pole

Radiální pole – ekvipotenciální plochy

Potenciální energie je konstatní je na sférách (kulových plochách) se stejným středem – centrem pole.



červeně siločáry, modře ekvipotenciální plochy

Radiální pole

Gravitační potenciál zn: φ_g jed: J . kg^{-1}

Gravitační potenciál φ_g se definuje jako potenciální energie tělesa o hmotnosti 1 kg v daném místě prostoru. V radiálním gravitačním poli ve vzdálenosti r od centra platí

$$\varphi_g = \frac{E_p}{m} = -\varkappa \frac{M}{r}.$$

(Gravitační potenciál má obdobný vztah k potenciální energii podobně jako intenzita pole k síle. Jeho výhodou je, že nezávisí na tělese, pouze na poloze v prostoru.)

Radiální pole

Poznámky

1. Pro popis pole známe už čtyři veličiny: síla, intenzita pole, potenciální energie nebo potenciál. Každá z nich pole jednoznačně určuje a zbylé tři z ní lze dopočítat.

2. U potenciálu, stejně jako u potenciální energie, si můžeme jeho hodnotu zvolit v jednom místě libovolně. Pro výše uvedený vztah to je nulová hodnota v nekonečnu.

3. Intenzita pole je rovna záporně vzatému gradientu potenciálu

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

(Gradient je směr největší změny veličiny.)

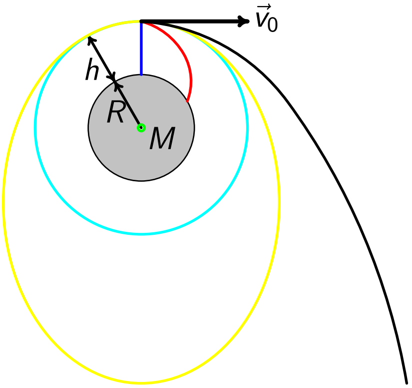
Pohyby v radiálním poli

Pohyby v radiálním poli

Jde například o pohyb Měsíce a družic kolem Země, planet kolem Slunce, pohyb komet a podobně.

Pohyby v radiálním poli

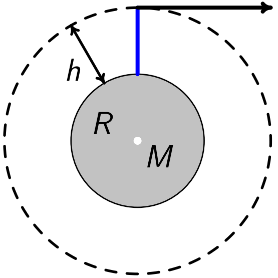
Pohyb v radiálním poli obecně



V závislosti na velikosti rychlosti v_0 může nastat šest případů.

Pohyby v radiálním poli

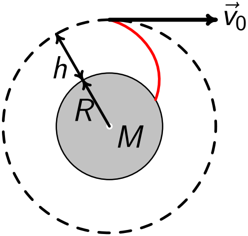
Pohyb v radiálním poli obecně



Pokud $v_0 = 0$ m . s^{-1}, těleso spadne kolmo dolů (na planetu, Slunce, ...)

Pohyby v radiálním poli

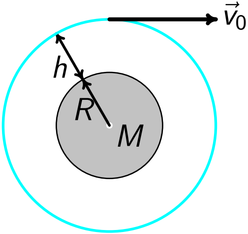
Pohyb v radiálním poli obecně



Pokud v_0 není nulová, ale příliš malá, těleso spadne po eliptické trajektorii.

Pohyby v radiálním poli

Pohyb v radiálním poli obecně



Při určité hodnotě $v_0 = v_k$ se těleso udrží na stabilní kruhové dráze. Rychlost v_k nazýváme **kruhová rychlost**. Pro případ Země a nulové výšky h tuto rychlost nazýváme **první kosmická rychlost**.

Pohyby v radiálním poli

Kruhová rychlost

$$F_d = F_g$$

$$m\frac{v_k^2}{r} = \varkappa\frac{mM}{r^2}$$

$$v_k = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R+h}}$$

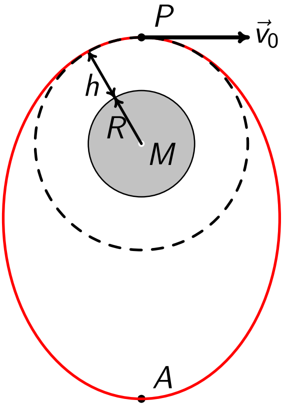
První kosmická rychlost

Po dosazení $M = M_Z$, $R = R_Z$ a $h = 0$ vyjde

$$v_k = \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{R_Z}} \doteq 7,9\ \mathrm{km\ .\ s^{-1}}$$

Pohyby v radiálním poli

Pohyb v radiálním poli obecně



Pro rychlost v_0 nepříliš větší než v_k těleso obíhá po eliptické trajektorii.

Pohyby v radiálním poli

Perigeum a apogeum

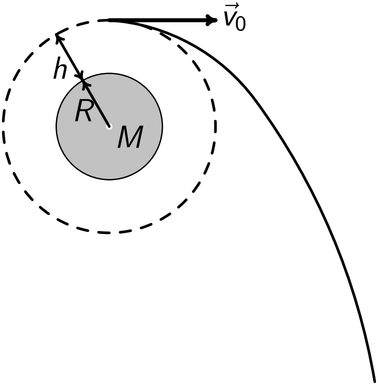
Pokud je obíhaným tělesem Země, nejbližší bod P trajektorie vůči Zemi označujeme jako **perigeum** a nejvzdálenější A jako **apogeum**.

Perihelium a afélium

Pokud je obíhaným tělesem Slunce, nejbližší bod P trajektorie vůči němu označujeme jako **perihelium** (přísluní) a nejvzdálenější A jako **afélium** (odsluní).

Pohyby v radiálním poli

Pohyb v radiálním poli obecně



Při dosažení další mezní rychlosti $v_0 = v_p$ už těleso neobíhá, ale unikne z gravitačního vlivu (Země, Slunce, ...).

Pohyby v radiálním poli

Pro případ Země a nulové výšky tuto rychlost v_p nazýváme **druhou kosmickou rychlostí**. Obecně se jí říká **úniková** nebo **parabolická**, neboť lze dokázat, že těleso při této rychlosti uniká po trajektorii, která má tvar paraboly.

Pohyby v radiálním poli

Parabolická rychlost

$$E_p + E_k = 0$$

$$-\varkappa \frac{mM}{r} + \frac{1}{2} m v_p^2 = 0$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2\varkappa M}{r}} = \sqrt{\frac{2\varkappa M}{R+h}} = v_k \sqrt{2}$$

Všimněte si, že parabolická rychlost je vždy rovna kruhové rychlosti přenásobené $\sqrt{2}$.

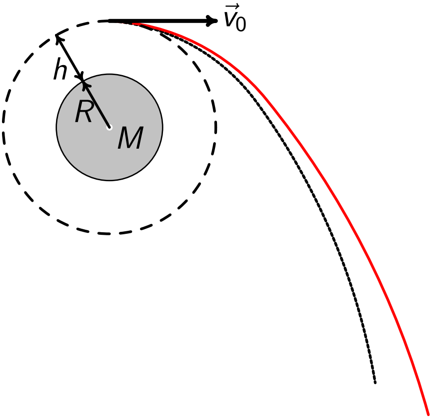
Druhá kosmická rychlost

Po dosazení $M = M_Z$, $R = R_Z$ a $h = 0$ vyjde

$$v_k = \sqrt{\frac{2\varkappa M_Z}{R_Z}} \doteq 11,2 \text{ km . s}^{-1}$$

Pohyby v radiálním poli

Pohyb v radiálním poli obecně



Při rychlosti v_0 ještě větší než v_p těleso uniká po hyperbolické dráze.

Pohyby v radiálním poli

Pohyby planet v centrálním poli Slunce se řídí třemi Keplerovými zákony.
1. Keplerův zákon. *Planety se pohybují po elipsách málo odlišných od kružnic. V jejich společném ohnisku je Slunce.*
2. Keplerův zákon. *Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.*
3. Keplerův zákon. *Podíl druhé mocniny oběžné doby planety a třetí mocniny hlavní poloosy oběžné dráhy je konstantní.*
Všechny zákony platí lze zobecnit na všechna tělesa, s výjimkou toho, že dráhy těles (např. komet) nemusí být málo odlišné od kružnic.

Pohyby v radiálním poli

Obrázek k druhému Keplerovu zákonu.

Pohyby v radiálním poli

Matematické vyjádření třetího Keplerova zákona

$a_{1,2}$ jsou hlavní poloosy oběžné dráhy, $T_{1,2}$ oběžné doby.

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{T_1^3}{T_2^3}$$

Doplňky

Příliv a odliv

Způsoben gravitačními silami Měsíce a Slunce (Měsíc se uplatní zhruba 2x více).

Doplňky

Sluneční soustava

Slunce: $M_S = 1{,}99 \,.\, 10^{30}$ kg (asi 330 000x víc než Země), povrchová teplota cca 5780 K
Planety: Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun (Pluto ne, vyškrtnuto 24.8.2006 (Praha), 11.6.2008 (Oslo) zařazeno do skupiny plutoidů).
Země: poloměr asi 6378 km, obvod rovníku cca 40 000 km, zemský kvadrant (vzdálenost pólu od rovníku = čtvrtina poledníku) cca 10 000 km, nejvyšší hora Mt. Everest asi 8848 m, největší hloubka oceánu – Mariánský příkop, 11 034 m.

Doplňky

Časová pásma

Země je rozdělena na 24 časových pásem, každé má šířku zhruba $15^\circ = 1/24$ délky rovníku = cca 1670 km. Základní pásmo se rozkládá kolem nultého poledníku procházejícího Greenwichem (Londýn, Anglie).

Pásma přesně nekopírují hranice poledníků, aby se v jednom státu nepoužívaly různé časy.

Doplňky

Polární noc a polární den

Polární noc označuje jev, kdy po dobu nejméně jednoho dne Slunce nevystoupí nad horizont. Nastává za hranicí polárního kruhu (cca 66° 33' 39"). Čím blíže pólu, tím je delší. Opakem polární noci je polární den (Slunce nezapadá pod horizont). Výskyt má půlroční periodicitu.