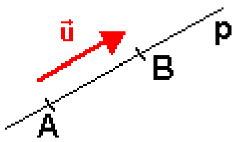
Analytická geometria lineárnych útvarov
1. Parametrické vyjadrenie priamky

Lineárne útvary sú **priamka a rovina** a ich časti. Zápis **v** = B – A znamená, že umiestením vektora **v** je orientovaná úsečka AB. Zápis **B = A + v** čítame **súčet bodu A a vektora v** – je to bod B, ktorý vznikne posunutím bodu A rovnakým smerom ako je smer vektora **v** o vzdialenosť zhodnú s veľkosťou vektora **v**.

Úloha : **Aký útvar vytvoria body, ktoré vzniknú súčtom daného bodu A so všetkými reálnymi násobkami vektoru v ?** Odpoveď : priamku.

Definícia : Každú priamku AB môžeme vyjadriť rovnicou **X = A +t.u**, kde **u** = B – A je tzv. **smerový vektor priamky** AB, X je ľubovoľný bod ležiaci na priamke AB a t∈R je tzv. **parameter**. Túto rovnicu nazývame **parametrické vyjadrenie priamky**. Ak poznáme A[a_1,a_2,a_3] a **u**[u_1,u_2,u_3], tak **súradnice bodu X[x,y,z]** sú určené nasledujúcimi rovnicami :
$x = a_1 + t.u_1$, $y = a_2 + t.u_2$, $z = a_3 + t.u_3$, $t \in R$



1. veta : **Každá priamka má nekonečne veľa parametrických vyjadrení.** Každá rovnica X = A +t.**u**, t∈R je parametrickým vyjadrením práve jednej priamky.
2. veta : **Smerový vektor priamky je rovnobežný s danou priamkou.**

Parametrické vyjadrenie úsečky AB, polpriamky →AB apod. sa od parametrického vyjadrenia priamky AB líši iba množinou, do ktorej patrí parameter t.

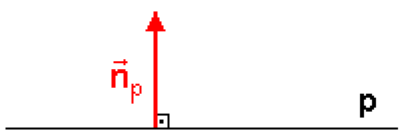
Študent musí vedieť:
- *napísať parametrické vyjadrenie priamky, ak pozná súradnice 1 bodu, ktorý na nej leží a smerový vektor priamky*
- *napísať parametrické vyjadrenie priamky, ak pozná súradnice 2 bodov, ktoré na nej ležia (v rovine aj v priestore)*
- *zistiť, či bod leží na priamke*
- *zistiť, či dané 2 parametrické vyjadrenia predstavujú tú istú priamku*
- *napísať parametrické vyjadrenie úsečky, ak pozná súradnice jej krajných bodov.*

2. Všeobecná rovnica priamky

Definícia : Rovnicu **p: a.x + b.y +c = 0**, v ktorej aspoň jedno z reálnych čísel a,b je rôzne od nuly, nazývame **všeobecná rovnica priamky p** v rovine. Vektor **n[a,b]** sa nazýva **normálový vektor priamky p**.

3. veta (o počte všeobecných rovníc) : Každá **priamka má v rovine nekonečne veľa všeobecných rovníc**, ktoré sú nenulovým násobkom jednej z nich. Každá rovnica a.x+b.y+c = 0, kde a,b,c ∈R, je rovnicou práve jednej priamky.
4. veta : **Normálový vektor priamky je kolmý na priamku.**

Dôkaz : nech p: $x = a_1 + t.u_1 \quad /.u_2$
$y = a_2 + t.u_2 \quad /.(-u_1)$ rovnice sčítame
$u_2.x - u_1.y = a_1.u_2 - a_2.u_1$ porovnáme s rovnicou
$a.x + b.y = -c$ a je zrejmé, že $a = u_2$ a $b = -u_1$

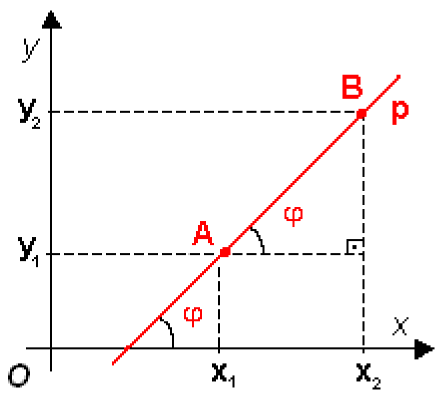


Smerový vektor priamky p je **u**$[u_1,u_2]$, jej normálový vektor je **n**$[u_2,-u_1]$.
u.n $= u_1.u_2 + u_2.(-u_1)= 0 \Rightarrow$ vektory **u** a **n** sú na seba kolmé.
Tento dôkaz je zároveň **návod na napísanie všeobecnej rovnice priamky**, ak poznáme jej parametrické vyjadrenie alebo súradnice 2 bodov ležiacich na priamke.

Príklad (varovný) : Daná je priamka p: $x = 2+t$, $y = 1+t$, $z = t$, $t \in R$. Poslednú rovnicu vynásobíme -2, všetky rovnice sčítame. Dostaneme rovnicu p: $x+y-2z = 0$. Je to všeobecná rovnica priamky v priestore ? Body A[3,0,0], B[0,5,1] a C[5,0,1] spĺňajú všeobecnú rovnicu, ale nespĺňajú pôvodné parametrické vyjdrenie priamky p $\Rightarrow$ neležia na priamke p $\Rightarrow$ odvodená rovnica nemôže byť všeobecnou rovnicou priamky p. **Všeobecná rovnica priamky v priestore neexistuje !** Rovnica, ktorú sme odvodili v príklade, je všeobecnou rovnicou roviny, v ktorej leží priamka p.

Študent musí vedieť :
– napísať všeobecnú rovnicu priamky, ak pozná jej parametrické vyjadrenie a naopak
– napísať všeobecnú rovnicu priamky, ak pozná súradnice 2 bodov ležiacich na priamke
– zistiť, či dané 2 všeobecné rovnice sú rovnicami tej istej priamky

3. Ďalšie vyjadrenia priamky



Grafom funkcie f: $y = a.x+b$, kde $a,b \in R$, je priamka.
Definícia : Rovnica **p: $y = k.x+q$, kde $k,q \in R$**, sa nazýva **smernicová rovnica priamky**, číslo **k je smernica priamky**.

Ozn. φ uhol, ktorý zviera priamka p s kladnou polosou osi x. Platí : $\text{tg}\ \varphi = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$. Pretože body A a B ležia na priamke p, zároveň platí : $y_1 = k.x_1 + q$
$y_2 = k.x_2 + q$
Rovnice odčítame : $y_2-y_1 = k.(x_2-x_1)$ a vyjadríme $\mathbf{k = (y_2-y_1)/(x_2-x_1) = tg\ \varphi}$

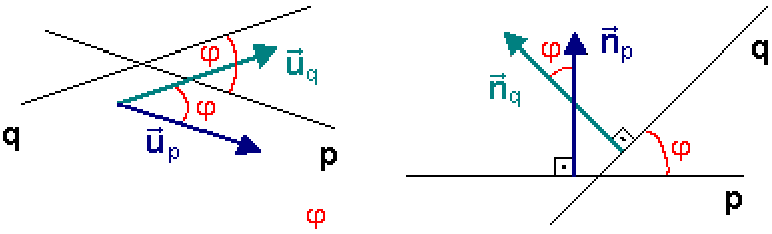
5. veta : **Smernica priamky je zároveň tangensom uhla, ktorý priamka zviera s kladnou polosou osi x, tj. k = tg φ.**

Dôsledky : **Priamky rovnobežné s osou y nemajú smernicovú rovnicu**, pretože s osou x zvierajú uhol 90^o a tg 90^o neexistuje. **Rovnobežné priamky majú rovnakú smernicu**, lebo s kladnou polosou osi x zvierajú rovnaký uhol.

Študent musí vedieť :
– napísať smernicovú rovnicu priamky, ak pozná jej všeobecnú rovnicu alebo parametrické vyjadrenie a naopak
– vypočítať uhol, ktorý zviera priamka s kladnou polosou osi x
– napísať akúkoľvek rovnicu priamky, ak pozná uhol, ktorý zviera priamka s kladnou polosou osi x a súradnice jedného bodu ležiaceho na priamke.

4. Uhol a vzájomná poloha 2 priamok

6. veta (o uhle priamok): **Uhol 2 priamok je uhol ich smerových (alebo normálových) vektorov.** Za uhol 2 priamok považujeme menší z dvojice možných uhlov.



Ak sú dané **všeobecné rovnice 2 priamok** p a q, ich **vzájomnú polohu** zistíme podľa schémy :

Je $\mathbf{n_p}$ násobkom $\mathbf{n_q}$?
áno → Je rovnica p násobkom rovnice q ?
- *áno* → **totožné**
- *nie* → **rovnobežky**

nie → **rôznobežné**

Dané sú priamky : p: X = A+t.**u**, t∈R
q: X = B+s.**v**, s∈R
Ich **vzájomnú polohu** zistíme podľa schémy :

Je **u** násobkom **v** ?
áno → Leží bod A na q ?
- *áno* → **totožné**
- *nie* → **rovnobežky**

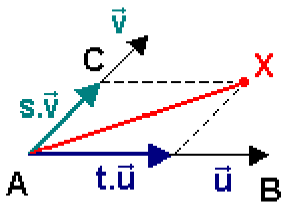
nie → **V rovine určite rôznobežné**
V priestore musíme zistiť či existuje priesečník priamok p a q :
- *áno* → **rôznobežné**
- *nie* → **mimobežné**

Z vlastností smerových a normálových vektorov priamok vyplýva :
7. veta : **Priamky sú na seba kolmé práve vtedy, keď normálový vektor jednej priamky je zároveň smerovým vektorom druhej priamky.**

Študent musí vedieť :
– vypočítať uhol 2 priamok a zistiť ich vzájomnú polohu v rovine aj v priestore
– zistiť, či existuje priesečník daných 2 priamok a vypočítať jeho súradnice
– napísať rovnicu priamky, ktorá je kolmá na danú priamku
– zistiť vzájomnú polohu a uhol 2 priamok, ktoré sú časťami telesa (hrany, uhlopriečky)

5. Parametrické vyjadrenie a všeobecná rovnica roviny

Každými troma bodmi A,B,C, ktoré neležia na jednej priamke, prechádza jediná rovina ρ.Ak **u** = AB a **v** = AC, tak vektor **u** nie je násobkom vektora **v**. Potom každý bod X, pre ktorý platí X = A + t.**u** + s.**v**, kde t,s∈R, leží v rovine ρ.



Definícia : Každú rovinu ABC môžeme pomocou bodu A a vektorov **u** = AB a **v** = AC vyjadriť rovnicou **X = A + t.u + s.v, kde t,s∈R** a X je bod ležiaci v rovine ABC. Túto rovnicu nazývame **parametrické vyjadrenie roviny** alebo **parametrická rovnica roviny**.

Ak $X[x,y,z]$, $A[a_1,a_2,a_3]$, $\mathbf{u}[u_1,u_2,u_3]$ a $\mathbf{v}[v_1,v_2,v_3]$, tak parametrické vyjadrenie roviny môžeme zapísať pomocou sústavy súradníc :

$$x = a_1 + u_1.t + v_1.s$$
$$y = a_2 + u_2.t + v_2.s$$
$$z = a_3 + u_3.t + v_3.s \quad t,s \in R$$

8. veta : **Každá rovina má nekonečne veľa parametrických vyjadrení.** Každá rovnica typu $X = A + t.\mathbf{u} + s.\mathbf{v}$, kde $t,s \in R$ a vektor **u** nie je násobkom vektora **v**, je parametrickým vyjadrením práve jednej roviny.

Definícia : Rovnicu **ρ: a.x + b.y + c.z + d = 0, kde a,b,c $\in$R** a aspoň jeden z koeficientov a,b, c je nenulový , nazývame **všeobecná rovnica roviny**. Vektor **n[a,b,c]** sa nazýva **normálový vektor roviny**.

9. veta : **Nomálový vektor roviny je kolmý na rovinu**.
Táto veta je zároveň návodom, ako napísať všeobecnú rovnicu roviny ρ, ak poznáme jej parametrické vyjadrenie ρ: $X = A + t.\mathbf{u} + s.\mathbf{v}$, kde $t,s \in R$:
1. Nájdeme vektor **n**, ktorý je kolmý na vektory **u** a **v**, napr. $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
2. Súradnice vektora **n** sú koeficienty a,b,c zo všeobecnej rovnice roviny.
3. Do neúplnej všeobecnej rovnice dosadíme súradnice bodu A a vypočítame koeficient d.

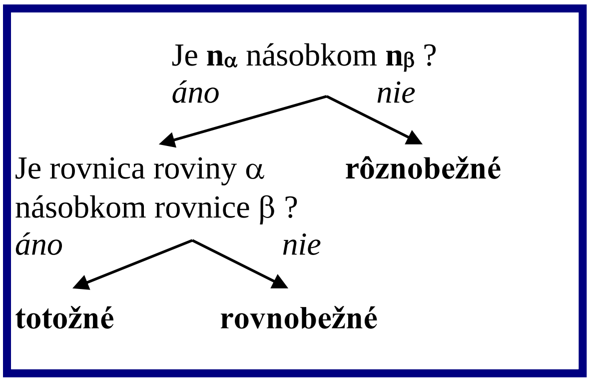
10. veta : **Každá rovina má nekonečne veľa všeobecných rovníc**, ktoré sú nenulovým násobkom jednej z nich. Každá rovnica typu ρ: $a.x + b.y + c.z + d = 0$, kde $a,b,c \in R$ a aspoň jeden z koeficientov a,b,c je nenulový, je všeobecnou rovnicou práve jednej roviny.

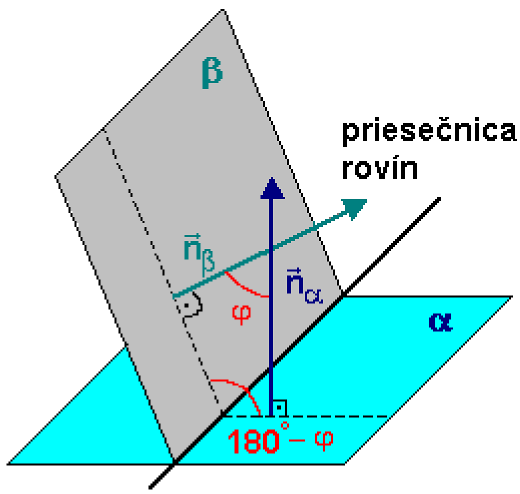
Študent musí vedieť :
- *napísať parametrické vyjadrenie roviny bez ohľadu na to, ako je rovina určená*
- *určiť normálový vektor roviny a napísať jej všeobecnú rovnicu, ak pozná parametrické vyjadrenie*

6. Uhol a vzájomná poloha dvoch rovín

11. veta (o uhle rovín): **Uhol 2 rovín je uhol ich normálových vektorov.** Ak uhol normálových vektorov φ je tupý, tak uhol rovín je $180^\circ - \varphi$.

Ak sú dané všeobecné rovnice 2 rovín α a β, ich vzájomnú polohu zistíme podľa schémy :





Ak potrebujeme zistiť vzájomnú polohu alebo uhol rovín zadaných parametricky, musíme prepísať parametrické vyjadrenia na všeobecné rovnice.

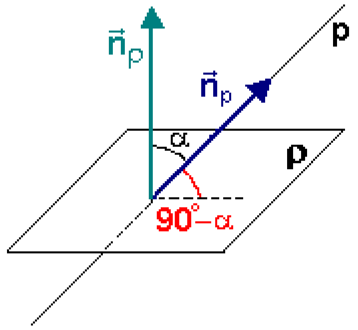
Študent musí vedieť :

– zistiť vzájomnú polohu 2 rovín a vypočítať uhol 2 rovín

– napísať parametrické vyjadrenie priesečnice 2 rovín daných všeobecnými rovnicami

7. Vzájomná poloha a uhol priamky a roviny

12. veta (o uhle priamky a roviny) : **Uhol β priamky a roviny sa rovná $|90^o - \alpha|$, kde α je uhol smerového vektoru priamky a normálového vektoru roviny.**



Vzájomnú polohu priamky p a roviny ρ zistíme podľa schémy :

Je $\mathbf{n}_\rho$ kolmý na $\mathbf{u}_p$?

áno → Leží bod A v rovine ρ ?
- *áno* → **priamka leží v rovine**
- *nie* → **rovnobežné**

nie → **rôznobežné**

Študent musí vedieť :

– zistiť vzájomnú polohu priamky a roviny a vypočítať ich uhol

– vypočítať súradnice priesečníka priamky a roviny

8. Vzdialenosť bodu od priamky a roviny

13. veta (o vzdialenosti bodu od priamky) :

Vzdialenosť bodu M$[m_1,m_2]$ **od priamky p**: $a.x + b.y + c = 0$ je $|Mp| = \dfrac{|a.m_1 + b.m_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

14. veta (o vzdialenosti bodu od roviny) :

Vzdialenosť bodu M$[m_1,m_2,m_3]$ **od roviny ρ**: $a.x + b.y + c.z + d = 0$ je

$$|M\rho| = \frac{|a.m_1 + b.m_2 + c.m_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vzdialenosť 2 rovnobežných rovín (priamok) vypočítame ako vzdialenosť bodu, ktorý leží v jednej rovine (priamke) od druhej roviny (priamky).

Študent musí vedieť :

– vypočítať vzdialenosť bodu od priamky alebo roviny

– zistiť vzdialenosť 2 rovnobežných rovín (priamok)

Autor : **Beata Hegerová**, Gymnázium Nováky

Použitá literatúra :

Šedivý a kolektív : Matematika pre 3.ročník gymnázia