Metódy dôkazov v matematike

1. Úvod

Živý jazyk je príliš bohatý pre potreby matematiky. Význam jednotlivých slov je výsledkom dlhého historického vývoja. Jedno slovo môže mať rôzny význam (napr. hlavička je časť klinca, ale aj o múdrom človeku môžeme povedať „ To je ale hlavička ! “), alebo jedna vec môže byť označená viacerými pojmami (napr. chyba je omyl). Niekedy závisí od situácie, ktorý pojem je vhodné použiť (napr. väčšina domčekov je zároveň budovami, ale nie každá budova je domčekom). Preto nie vždy rozumieme všetci to isté, keď počujeme nejaké slovo alebo vetu.

V matematike existuje spôsob, ako predísť takýmto nedorozumeniam – **celá matematika je postavená na niekoľkých základných pojmoch** (množina, bod, číslo, ...) a niekoľkých tvrdeniach (výrokoch) o nich. Tieto tvrdenia sa nazývajú **axiómy**. Všetky ostatné pojmy, ktoré sa v matematike používajú, je treba definovať, t.j. popísať pomocou základných pojmov alebo iných – predtým definovaných – pojmov. Rozlišujte pojmy **definícia** – definíciou sa popisuje nový pojem – a **matematická veta** – veta je tvrdenie o vlastnostiach pojmov. Všetky **tvrdenia v matematike treba dokázať** (odvodiť) pomocou axióm alebo iných predtým dokázaných tvrdení.

Pomocou tohto učebného textu sa dozviete, ktoré metódy sa používajú pri dokazovaní matematických tvrdení a ako treba pri dokazovaní postupovať.

<u>1. úloha :</u>

Zopakujte si, čo je výrok, pravdivostná hodnota výroku, negácia výroku, hypotéza, implikácia, obmena implikácie. Ako symbolicky zapíšeme *pre všetky, existuje, z toho vyplýva, číslo n je prirodzené, číslo 4 je deliteľom čísla n* ?

<u>2. úloha :</u>

Na základnej škole ste používali pojem *poučka*. Odôvodnite, či sú *poučky* definície alebo matematické vety.

2. Priamy dôkaz

Je to najjednoduchší spôsob dôkazu. **Dôkaz tvrdenia (vety) T pozostáva len z konečného reťazca implikácií, $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow T_n \Rightarrow T$, pričom prvý člen T_1 je axióma, alebo už dokázané tvrdenie a každé ďalšie tvrdenie (T_2 až T_n) logicky vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia.**

<u>1. riešený príklad :</u>

Dokážte, že súčet ktorýchkoľvek piatich po sebe idúcich párnych prirodzených čísel je deliteľný číslom desať.

<u>Riešenie :</u> Párne prirodzené číslo môžeme označiť $2n$ (prečo ?) $\Rightarrow$ päť po sebe idúcich párnych prirodzených čísel označíme $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$, $2n + 6$ a $2n + 8$ $\Rightarrow$ ich súčet je potom $2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) +(2n + 8) = 10n + 20 = 10(n + 2)$ $\Rightarrow$ súčet je 10-násobok čísla $n + 2$ $\Rightarrow$ súčet je deliteľný číslom 10.

<u>3. úloha :</u>

Symbolicky zapíšte a dokážte nasledujúce tvrdenia :

a) Súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 3.

b) Druhá mocnina nepárneho čísla je tiež nepárna.

c) Súčin troch po sebe idúcich prirodzených je deliteľný číslom 6.
d) Súčin štyroch po sebe idúcich prirodzených je deliteľný číslom 24.

<u>2. riešený príklad :</u>

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí : $4 \mid n^4 + 3n^2$.

<u>Riešenie :</u> Dôkaz rozdelíme na dve časti. Predpokladajme najskôr, že n je párne číslo, t.j. $n = 2k \Rightarrow n^4 + 3n^2 = n^2(n^2 + 3) = 4k^2(4k^2 + 3) \Rightarrow$ výraz $n^4 + 3n^2$ je násobkom čísla 4.
Ak n je nepárne číslo, t.j. $n = 2k + 1 \Rightarrow n^4 + 3n^2 = n^2(n^2 + 3) = (2k + 1)^2[(2k + 1)^2 + 3] = (2k + 1)^2(4k^2 + 4k + 4) \Rightarrow$ druhý činiteľ je násobkom čísla 4 $\Rightarrow$ výraz $n^4 + 3n^2$ je násobkom čísla 4.

<u>4. úloha :</u>

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí :

a) $2 \mid (n^2 - 3n)$
b) $3 \mid (n^3 + 2n^2)$
Pomôcka : Rozoberte možnosti, že n je deliteľné 3, n dáva po delení tromi zvyšok 1, n dáva po delení tromi zvyšok 2.
c) * Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich prirodzených čísel je násobkom čísla deväť. Pomôcka : čísla zapíšte ako n –1, n a n + 1.
d) * $36 \mid 2n^6 - n^4 - n^2$
Pomôcka : rozložte výraz $2n^6 - n^4 - n^2$ na súčin.

Pri dokazovaní implikácie A⇒B, postupujeme ako pri priamom dokazovaní tvrdenia, ibaže v tomto prípade si vezmeme za východisko tvrdenie A a snažíme sa logickými úvahami dospieť k tvrdeniu B.

<u>5. úloha :</u>

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí :

a) Ak n nie je deliteľné troma, tak jeho druhá mocnina dáva po delení tromi zvyšok jedna.
b) Ak prirodzené číslo končí číslicou 5, tak jeho druhá mocnina končí dvojčíslím 25.

3. Nepriamy dôkaz

Zložený **výrok ¬B ⇒ ¬A sa nazýva obmena implikácie A ⇒ B**. Obmenu implikácie vytvoríme tak, že vymeníme poradie výrokov v implikácii a výroky A a B nahradíme ich negáciami.

Daná implikácia : Ak je druhá mocnina čísla n **párna**, tak aj číslo n je **párne**.

Obmena implikácie : Ak je číslo n **nepárne**, tak aj jeho druhá mocnina je **nepárna**.
Nemýľte si negáciu implikácie s obmenou implikácie.

<u>6. úloha :</u>

Dokážte, že implikácia a jej obmena majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.
Pomôcka : tabuľka pravdivostných hodnôt.

<u>7. úloha :</u>

Napíšte (ak sa dá aj symbolicky) obmeny implikácii :

a) Ak tretia mocnina prirodzeného čísla n je nepárna, tak aj číslo n je nepárne.
b) Ak číslo 3 nedelí číslo n, tak n^2 nie je deliteľné číslom 9.
c) $10 \mid (n - 1).(n + 1) \Rightarrow 5$ nedelí n

Princíp nepriameho dôkazu spočíva v tom, že namiesto implikácie ktorú chceme dokázať, dokážeme jej obmenu. Nepriamy dôkaz používame vtedy, keď prvý výrok v implikácii je zložitejší ako druhá časť implikácie.

3. riešený príklad :

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí : ak 5 nedelí $n^3 - 6n^2 + 2n - 10$, tak n nie je deliteľné 5.

Riešenie : Obmenou danej implikácie je výrok $5 \mid n \Rightarrow 5 \mid n^3 - 6n^2 + 2n - 10$.
$5 \mid n \Rightarrow n = 5k \Rightarrow$ po dosadení $n^3 - 6n^2 + 2n - 10 = ...$ pokračovanie už zvládnete sami ☺.

8. úloha :

Dokážte, že tvrdenia z predchádzajúcej úlohy platia pre všetky prirodzené čísla n.

4. Dôkaz sporom

Z predchádzajúcej kapitoly už iste viete ☺, aký je vzťah medzi nasledujúcimi dvoma výrokmi : Ak je výrok (tvrdenie) T pravdivý, tak každý z neho odvodený výrok je pravdivý. **Ak existuje nepravdivý výrok odvodený z tvrdenia T, tak aj tvrdenie T je nepravdivé.** Druhý výrok popisuje základný princíp dôkazu sporom.

Postup pri dôkaze sporom :

1. Vyslovíme negáciu výroku, ktorý máme dokázať.
2. Z negácie odvodíme výrok, ktorý je nepravdivý (je v rozpore s niektorým predpokladom).
3. Ak sa dá z negácie odvodiť nepravdivý výrok, tak negácia je nepravdivá a pôvodný výrok (ktorý sme mali dokázať) je pravdivý.

4. riešený príklad :

Dokážte, že geometrický priemer dvoch ľubovoľných kladných reálnych čísel je menší alebo rovný ich aritmetickému priemeru.

Riešenie : Máme dokázať pravdivosť nerovnosti $\forall a,b \in R^+ : \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. Vytvoríme najskôr jej negáciu : $\exists\, a,b \in R^+ : \sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2\sqrt{ab} > a + b \Rightarrow$ po umocnení $4ab > (a + b)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4ab > a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 0 > a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 0 > (a - b)^2 \leftarrow$ táto nerovnosť je určite nepravdivá, pretože druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná $\Rightarrow$ neplatí nerovnosť $\exists\, a,b \in R^+ : \sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} \Rightarrow$ musí platiť tvrdenie $\forall a,b \in R^+ : \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, ktoré sme mali dokázať.

9. úloha :

Bez použitia kalkulačky dokážte, že platí :

a) $5 + \sqrt{5} < \sqrt{55}$

b) $\sqrt{11 + \sqrt{10}} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$.

10. úloha :

a) Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo a platí : $a + \frac{1}{a} > 2$

b) Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí : $\frac{x^2}{1 + x^4} \le \frac{1}{2}$

c) *Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla a,b platí : $\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$

d) *Dokážte, že najmenší spoločný násobok n(a,b) a najväčší spoločný deliteľ D(a,b) prirodzených čísel a,b spĺňajú nerovnosť a.D(a,b) + b.n(a,b)≥ 2ab. Zistite, pre ktoré čísla a,b sa táto nerovnosť zmení na rovnosť.

5. riešený príklad :

Dokážte, že číslo $\sqrt{2}$ nie je racionálne.

Riešenie : Použijeme dôkaz sporom – predpokladajme, že $\sqrt{2}$ je racionálne číslo ⇒ $\sqrt{2}$ môžeme napísať v tvare zlomku $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde p a q sú nesúdeliteľné čísla, $p \in Z$ a $q \in N$ ⇒ po úprave a umocnení $2q^2 = p^2$ ⇒ druhá mocnina čísla p je párne číslo ⇒ aj p je párne číslo, t.j. p = 2k, kde $k \in Z$ ⇒ po dosadení $2q^2 = 4k^2$ ⇒ $q^2 = 2k^2$ ⇒ aj druhá mocnina čísla q je párne číslo ⇒ q je párne číslo ⇒ čísla p a q sú deliteľné dvoma ⇒ spor (rozpor) s predpokladom, že p a q sú nesúdeliteľné čísla ⇒ tvrdenie, že $\sqrt{2}$ je racionálne číslo, je nepravdivé.

11. úloha* :

Dokážte, že čísla $\sqrt{3}$ a $\sqrt{5}$ nie sú racionálne čísla.

5. Rôzne úlohy

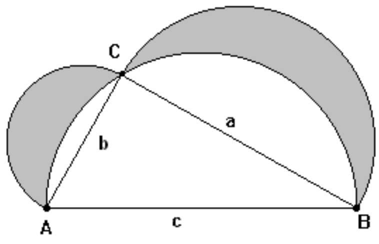
Všetky dôkazy, ktoré ste doteraz robili, súviseli s jedinou oblasťou matematiky – teóriou čísel. To však neznamená, že tvdenia z iných oblastí matematiky netreba dokazovať. Najstaršie matematické dôkazy pochádzajú zo starovekého Grécka – sú to dôkazy rôznych tvrdení z planimetrie. Vymyslel ich v 3. stor. p.n.l. **matematik Euklides** (a spolu snimi celú teóriu klasickej geometrie).

12. úloha :

V pravouhlom trojuholníku platia tzv. Euklidove vety (kto si ich pamätá ☹ ...).

a) Dokážte pomocou Euklidových viet Pytagorovu vetu.

b) Dokážte, že v pravouhlom trojuholníku ABC s preponou c platí : $\frac{1}{v_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.



13. úloha :

Trojuholník ABC na obr. je pravouhlý, s preponou c. Zvýraznené útvary sú tzv. Hippokratove mesiačiky – vznikli pomocou polkruhov nad stranami trojuholníka. Dokážte, že súčet ich obsahov nezávisí od čísla π. (Obsah Hippokratových mesiačikov je možné vyjadriť len pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC).

14. úloha :

a) Máme dva valce. Druhý valec je dvakrát vyšší ako prvý, ale polomer jeho podstavy je len polovičný. Dokážte, prvý valec má dvakrát väčší objem ako druhý valec. Objem valca je $V = \pi.v.r^2$.

b) Dokážte, že pomer objemov rotačných kužeľov, ktoré vzniknú rotáciou pravouhlého trojuholníka ABC (s preponou c) okolo jeho odvesien, je a:b. Zistite pomer obsahov plášťov týchto kužeľov.