Dôkazy v matematike

Pri dokazovaní úloh v matematike často využívame **axiómy** - tvrdenia, ktoré nedokazujeme, pretože ich platnosť vyplýva z našich skúseností.

Príklady na axiómu: Priamka je daná dvomi bodmi. Rovina je určená tromi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke. Zem sa točí okolo Slnka.

Druhy dôkazov:

1. Priamy dôkaz:
- Pri priamom dokazovaní nejakého tvrdenia postupujeme tak, že vychádzame z platnosti nejakých známych tvrdení z ktorých odvodzujeme ďalšie, až sa nakoniec dostaneme k platnosti dokazovaného tvrdenia.

a) T - máme dokázať $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow T$

b) $A \Rightarrow B$ $A \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$

Príklad: Dokážte $\forall n \in N;\ 3/n(n^2+2)$

Riešenie:

1.) n = 3k

$3/3k\,.[(3k)^2 + 2]$

2.) n = 3k + 1

$3/\,(3k+1).[(3k+1)^2 + 2] = 3/(3k+1).(9k^2 + 6k + 3) = 3/(3k+1).3(3k^2 + 2k + 1)$

3.) n = 3k + 2

$3/(3k+2).[(3k+2)^2 + 2] = 3/(3k+2).(9k^2 + 12k + 6) = 3/(3k+2).3(3k^2 + 4k + 2)$

2.Nepriamy dôkaz:
-Pri nepriamom dôkaze nejakého tvrdenia nájdeme jeho **negáciu**, potom dokážeme, že táto **negácia** neplatí z čoho vyplynie, že platí pôvodné tvrdenie.

-Pri dokazovaní **implikácie** nepriamym dôkazom nájdeme **obmenu** tejto **implikácie**, dokážeme, že táto **obmena** platí z čoho vyplýva, že musí platiť aj pôvodná **implikácia**.

Implikácia: $A \Rightarrow B$

Obmena: $B' \Rightarrow A'$

Príklad: Dokážte: $\forall n \in N;\ 3/(n^2+2) \Rightarrow 3 \nmid n$

Riešenie: 1. Spravíme obmenu: $3/n \Rightarrow 3 \nmid (n^2+2)$

2. Ak n je deliteľné 3 potom n = 3k

$3/3k \Rightarrow 3 \nmid (9k^2+2)$ = $3/3k \Rightarrow 3 \nmid 3.3k^2 + 2$

3.Obmena platí, to znamená, že platí aj pôvodný výrok.

3.Dôkaz sporom:

-Princíp tohto dôkazu je ten, že danej implikácii nájdeme negáciu, kt. dokazujeme tak, že zase vytvoríme postupnosť implikácií až sa dostaneme ku tvrdeniu, kt. určite neplatí to znamená, že sme došli k sporu a teda platí pôvodná implikácia.

Príklad: Dokážte, že platí: $\forall n \in$ N; $2 \nmid n^2 \Rightarrow 2 \nmid n$

Riešenie: 1. Negáciu tejto implikácie vykonáme podľa známeho vzťahu pre negáciu implikácie. $(A \Rightarrow B)' = A \wedge B'$

Negáciou všeobecného kvantifikátora je existenčný kvantifikátor a opačne.

$$\exists n \in N; 2 \nmid n^2 \wedge 2 / n$$

2. V druhej časti výroku tvrdíme že n je párne číslo. Už ale vieme dokázať, že ak n je párne číslo, potom druhá mocnina n je tiež párne číslo.