

11 Goniometrické funkcie

Funkcie sínus a kosínus sa pôvodne definovali pomocou pravouhlého trojuholníka s uhlom x ($x \neq 90^\circ$) takto:

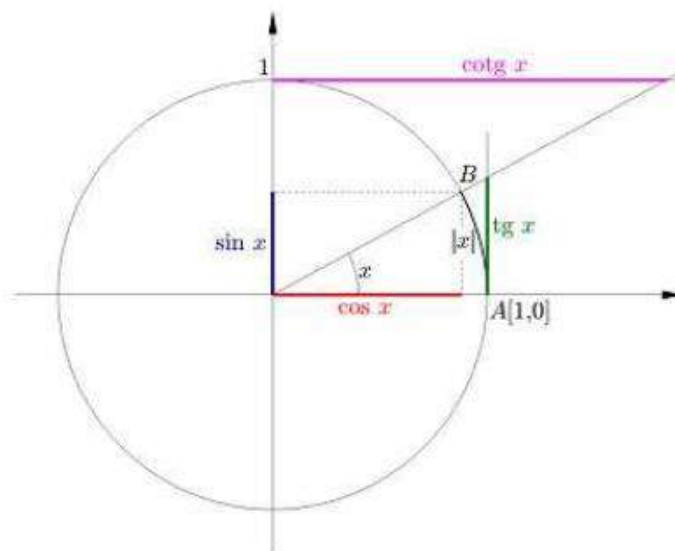
- $\sin x$ je pomer protifahej odvesny tohto uhla a prepony,
- $\cos x$ je pomer príľahlej odvesny k tomuto uhlu a prepony.
- Ďalej $\operatorname{tg} x$ je pomer $\sin x$ a $\cos x$;
- $\operatorname{cotg} x$ je prevrátená hodnota $\tan x$.

Tieto definície, samozrejme, definujú goniometrické funkcie len pre uhly z intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$.

Dnes definujeme tieto funkcie pomocou jednotkovej kružnice alebo cez nekonečné rady.

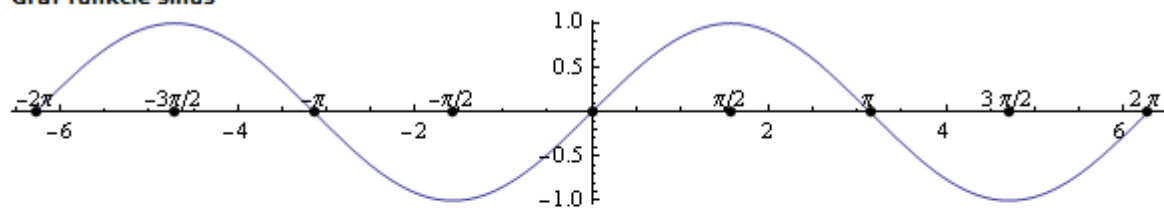
$$\sin x = y_B, \quad \cos x = x_B, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

V pravouhlom trojuholníku je uhol α ostrý. Rozšírime definície goniometrických funkcií na množinu reálnych čísel \mathbb{R} . Uvažujme jednotkovú kružnicu k so stredom v bode $[0, 0]$, s polomerom 1 a reálne číslo $x \in \mathbb{R}$. Označme $B[x_B, y_B]$ bod na kružnici k, ktorý dostaneme tak, že nanesieme od bodu $A[1, 0]$ oblúk dĺžky $|x|$ v kladnom smere (proti smeru chodu hodinových ručičiek), ak $x \geq 0$ a v zápornom smere, ak $x < 0$.

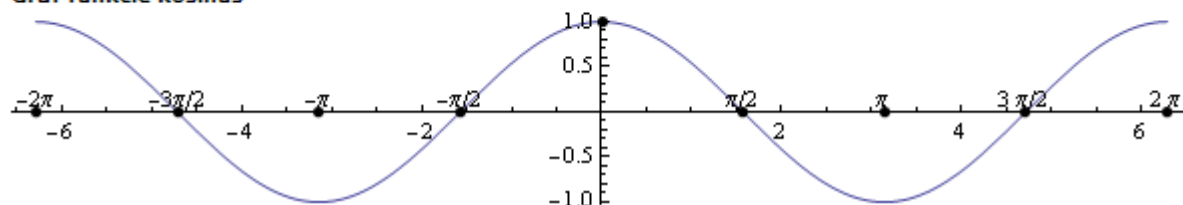


Goniometrická funkcia	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
Definičný obor	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$
Obor funkčných hodnôt	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Najmenšia perióda	2π	2π	π	π

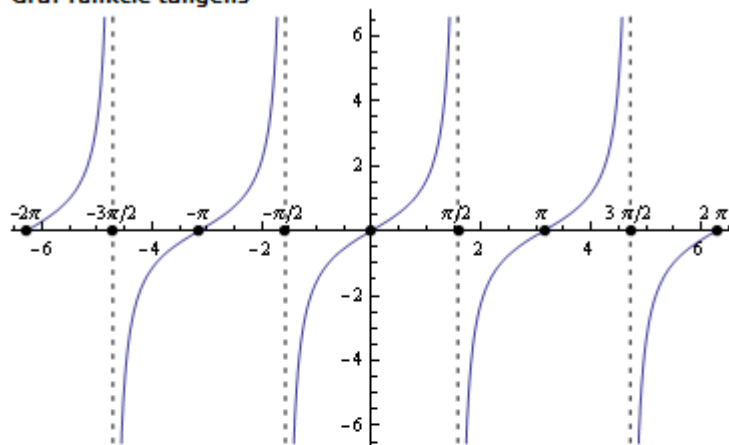
Graf funkcie sínus



Graf funkcie kosínus



Graf funkcie tangens



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

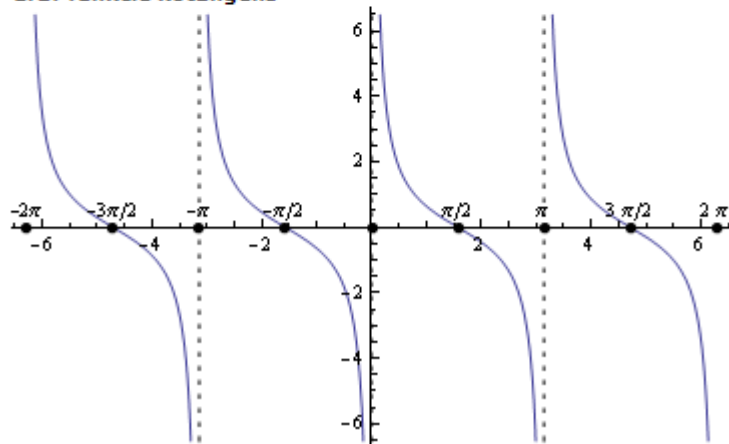
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cot} g x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cot} g x}$$

$$\operatorname{cot} g x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Graf funkcie kotangens



$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$