

1. Čo je to ?

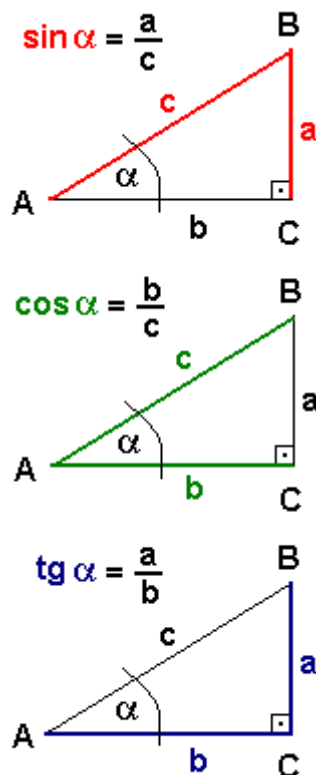
Definícia goniometrických funkcií

Goniometrické funkcie priradujú uhlom v pravouhlom trojuholníku pomery dĺžok strán. **Trigonometria** je časť matematiky zaoberajúca sa výpočtami v trojuholníkoch.

- **Sínus** uhla (ozn. \sin) je pomer dĺžok **protiľahlej odvesny a prepony** pravouhlého trojuholníka.
- **Kosínus** uhla (ozn. \cos) je pomer dĺžok **prilľahlej odvesny a prepony** pravouhlého trojuholníka. .
- **Tangens** uhla (ozn. tg) je pomer dĺžok **protiľahlej odvesny a prilľahlej odvesny** pravouhlého trojuholníka.

Hodnoty goniometrických funkcií môžeme nájsť v tabuľkách alebo zistiť pomocou kalkulačky. Na väčšine kalkulačiek je funkcia tangens označená skratkou \tan . **Počítame s presnosťou na 5 desatinných miest !** Ak hodnotu goniometrickej funkcie zaokrúhlite len na jedno desatinné číslo, výsledný uhol sa od presného výsledku môže líšiť až o 25° ! Aj pri zaokrúhlení na tri desatinné miesta, môže byť rozdiel výsledkov takmer 2° .

Veľkosť uhlov sa meria nielen v stupňoch, ale aj v radiánoch a grádoch. Ak chceme (alebo zadávame) veľkosť uhlov v stupňoch, na displeji kalkulačky musí byť nápis **D** alebo **DEG** (mení sa stlačením tlačidiel **Shift** a **DRG**).



Úlohy :

1. Pomocou kalkulačky doplňte tabuľku. Hodnoty goniometrických funkcií píšete s presnosťou na 5 desatinných miest !

α	0°	30°	45°	60°	90°	$22^\circ 30'$	$39^\circ 15'$	$42^\circ 50'$	$79^\circ 35'$	$89^\circ 59'$
sin α										
cos α										
tan α										

Zistiť na kalkulačke hodnotu goniometrickej funkcie uhla (daného v stupňoch a minútach) môžete jedným z nasledujúcich postupov :

Nové kalkulačky :

1. stlač tlačítka s označením funkcie
2. napíš stupne a stlač tlačítka $^\circ$
3. napíš minúty a stlač tlačítka $'$
4. stlač =

Staršie kalkulačky :

1. napíš stupne a minúty oddelené desatinnou bodkou
2. stlač tlačítka **DEG**
3. stlač tlačítka s označením funkcie

2. Zisti veľkosť uhla (s presnosťou na minúty), ak poznáme hodnotu funkcie :

sin α	α	cos α	α	tan α	α
0,12345		0,12345		0,12345	
0,45000		0,30303		0,22222	
0,51266		0,50000		1,73205	
0,70711		0,71525		5,10000	
0,99990		0,83000		10,65403	
0,99999		0,99990		100	

Zistiť na kalkulačke hodnotu uhla, ak viete hodnotu goniometrickej funkcie, môžete jedným z nasledujúcich postupov :

Nové kalkulačky :

1. stlač tlačítko **Shift** (**2ndF** alebo **Inv**)
2. stlač tlačítko s označením funkcie
3. napíš hodnotu funkcie
4. stlač =
5. stlač tlačítko označené $^{\circ}$

Staršie kalkulačky :

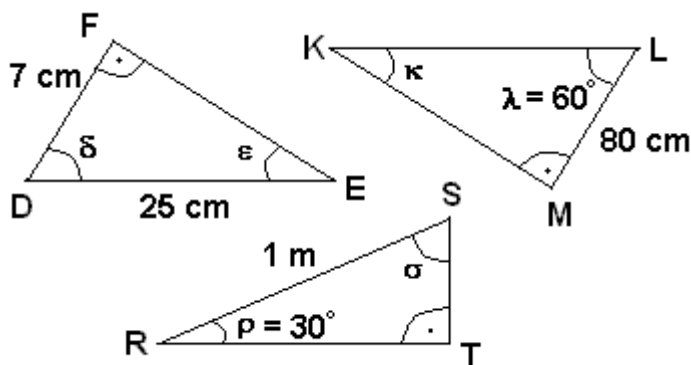
1. napíš hodnotu funkcie
2. stlač tlačítko **2ndF** (**Shift** alebo **Inv**)
3. stlač tlačítko s označením funkcie
→ zistíš uhol v stupňoch
4. znovu stlač tlačítko **2ndF** (**Shift** alebo **Inv**)
5. stlač tlačítko označené **D.M.S** → prvé dve čísla za desatinnou čiarkou sú minútv

3. V pravouhlom trojuholníku ABC (s preponou c) vypočítaj dĺžky strán (s presnosťou na 2 desatinné miesta), ak poznáme :

a) $c = 10 \text{ cm}, \alpha = 30^\circ$	b) $c = 120 \text{ cm}, \alpha = 65^\circ 15'$	c) $a = 25 \text{ m}, \alpha = 60^\circ$
d) $a = 1000 \text{ mm}, \alpha = 82^\circ 20'$	e) $b = 6 \text{ cm}, \alpha = 36^\circ$	f) $b = 84 \text{ cm}, \alpha = 22^\circ 22'$
4. V pravouhlom trojuholníku ABC (s preponou c) vypočítaj veľkosť uhlov (s presnosťou na minúty), ak poznáme :

a) $a = 12 \text{ cm}, c = 20 \text{ cm}$	b) $b = 100 \text{ m}, c = 260 \text{ m}$	c) $a = 15 \text{ cm}, b = 17 \text{ cm}$
d) $a = 2 \text{ m}, c = 12 \text{ m}$	e) $b = 35 \text{ mm}, c = 6 \text{ cm}$	f) $a = 75 \text{ cm}, b = 1,7 \text{ m}$

5. Riešiť trojuholník znamená vypočítať dĺžky všetkých jeho strán, veľkosti uhlov, obvod a obsah trojuholníka. Rieš trojuholníky, ktoré sú na obrázku !



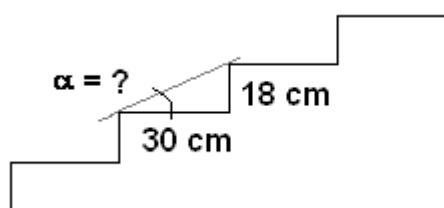
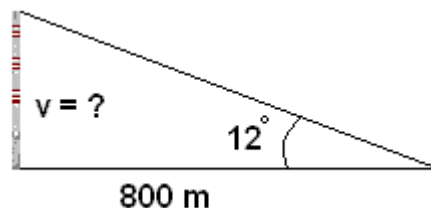
6*. Okrem funkcií sínus, kosínus a tangens sa používala ešte jedna goniometrická funkcia. Zisti ako sa nazýva a ako je definovaná. Vysvetli, prečo sa táto funkcia v súčasnosti už nepoužíva.

2. K čomu je to dobré ?

Úlohy riešené pomocou goniometrických funkcií

Úlohy :

1. Aký vysoký je komín, ktorý je od nás vzdialený 800 m, ak vidíme jeho vrchol vo výškovom uhle 12° ? Výškový uhol meriame od vodorovnej roviny smerom hore.



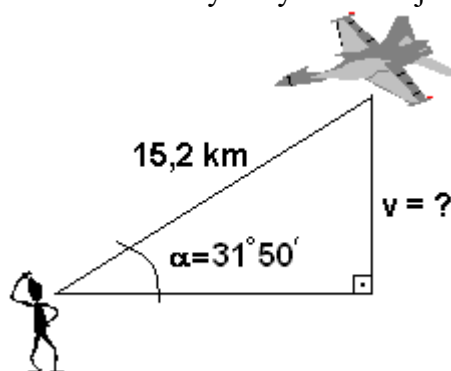
2. Výška schodu je 18 cm a šírka 30 cm. Vypočítaj, v akom uhle stúpa schodište !
3. Dopravná značka je vysoká 2,5 m, jej tieň je dlhý 3,63 m. V akom uhle dopadajú na zem slnečné lúče ?

4. Rebrík dlhý 8,5 m je opretý o múr. Uhol medzi zemou a rebríkom je 72° . Na najvyššom

bode rebríka sedí mačka. Ako vysoko je nad zemou ?

5. Lanovka dlhá 2150 m stúpa pod uhlom 36° . Vypočítaj rozdiel nadmorských výšok dolnej a hornej stanice lanovky !

6. Medzi pozorovateľom na zemi a lietadlom je vzdialenosť 15,2 km (nameraná radarom). Pozorovateľ vidí lietadlo vo výškovom uhle $31^\circ 50'$. V akej výške letí lietadlo ?



7. Lietadlo letí vo výške 10,5 km. Vzdialenosť medzi lietadlom a letiskom je 80,5 km. Pod akým uhlom musí lietadlo klesať, aby bezpečne pristálo ?

8. Miesto na kopci, kde bude stáť horná stanica lanovky, je o 380 m vyššie, ako miesto, na ktorom bude dolná stanica. Z (budúcej) hornej stanice vidíme (budúcu) dolnú stanicu v hĺbkovom uhle $25^\circ 20'$. Vypočítaj dĺžku lanovky ! Hĺbkový uhol meriame od vodorovnej roviny smerom dole.

9. Aký dlhý musí byť rebrík na hasičskom aute, aby jeho horný okraj dosiahol na 10. poschodie ? Uhol medzi zemou a rebríkom môže byť najviac 75° , jedno poschodie je vysoké približne 3,2 m.

10. Lietadlo, ktoré letí vo výške 4,5 km vidí pozorovateľ vo výškovom uhle $29^\circ 30'$. Aká je vzdialenosť medzi pozorovateľom a lietadlom ?

3. Pravouhlé trojuholníky sú tak nudné ...

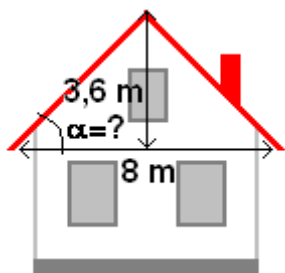
Použitie goniometrických funkcií v iných útvaroch

1. Vypočítaj dĺžky neznámych strán, veľkosť uhlov a výšku na základňu (ak nie je daná) v rovnoramennom trojuholníku DEF so základňou f , ak poznáme :

a) $e = d = 45 \text{ mm}$, $\delta = 68^\circ$

b) $e = d = 6 \text{ cm}$, $\phi = 108^\circ$

c) $v_f = 100 \text{ m}$, $\delta = 48^\circ$



2. Dvojité rebríky má každé rameno 4 m dlhé. Jeho spodné konce sú od seba vzdialené 2,2 m. Do akej výšky rebrík dosahuje ?

3. Štít domu má tvar rovnoramenného trojuholníka s výškou 3,6 m a základňou 8 m. Vypočítaj sklon strechy (t.j. uhol medzi strechou a vodorovnou rovinou). Pôdorys domu je obdĺžnik, dom je dlhý 12 m. Koľko m^2 krytiny treba na pokrytie strechy ?

4. Aký uhol zvierajú uhlopriečky v obdĺžniku, ktorý má strany dlhé 9 m a 18 m ?

5. Uhlopriečka obrazovky televízora dlhá 85 cm zvierá s vodorovnou stranou uhol $32^\circ 37'$. Vypočítaj pomer dĺžok strán obrazovky.

6. Kosoštvorec ABCD má uhlopriečky $|AC| = 30 \text{ cm}$ a $|BD| = 15 \text{ cm}$. Vypočítaj dĺžku jeho strany a veľkosti vnútorných uhlov. Uhlopriečky v kosoštvorci sú na seba kolmé a rozpoľujú sa.

7. Pozemok má tvar rovnoramenného lichobežníka so základňami dlhými 102 m a 52 m. Uhol medzi ramenom a dlhšou základňou má veľkosť $\alpha = 78^\circ$. Vypočítaj dĺžku plotu okolo pozemku a výmeru pozemku.

8. Vypočítaj uhol medzi telesovou a stenovou uhlopriečkou kocky. V kocke ABCDEFGH je to napr. uhol úsečiek AC a AG. Závaži tento uhol od dĺžky hrany kocky ?

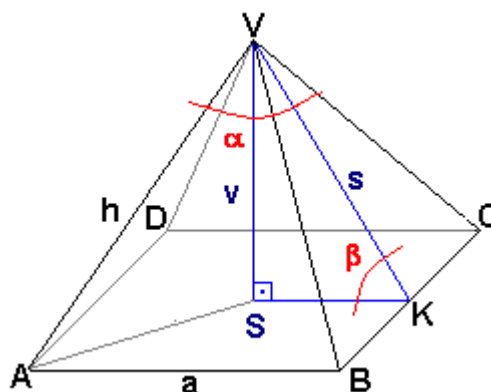
9. Pravidelný štvorboký ihlan ABCDV má podstav-
né hrany dlhé 6 cm a bočné hrany dlhé 9 cm.

Vypočítaj uhol

a) dvoch protíahlých bočných hrán (ozn. α)

b) uhol bočnej steny a roviny podstavy (ozn. β)

10. Veľká pyramída v Gíze (Egypt) má tvar pravi-
delného štvorbokého ihlanu. Podstavná hrana je
dlhá približne 227 m, uhol bočných stien
s rovinou podstavy je 51° . Vypočítaj výšku
pyramídy !



4. Ach, tak veľa vzorcov !

Vzťahy medzi goniometrickými funkciami

Medzi goniometrickými funkciami existuje obrovské množstvo vzájomných vzťahov a súvislostí. V nasledujúcich úlohách sú uvedené tie najviac používané.

Riešený príklad :

Dokáž, že **pre každý uhol α platí : $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.**

Zápis $\sin^2 \alpha$ znamená to isté, ako zápisy $(\sin \alpha)^2$ alebo $(\sin \alpha) \cdot (\sin \alpha)$.

Zápis $\sin \alpha^2$ je nesprávny (ak zapisujeme veľkosť uhla v stupňoch).

Riešenie :

V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou c platí :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Úlohy :

1. Dokáž, že **pre každý uhol α platí : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$**

2. Bez toho, aby si počítal veľkosť uhla α , vypočítaj hodnoty zvyšných dvoch goniometric-
kých funkcií, ak

a) $\sin \alpha = 0,6$

b) $\cos \alpha = 0,28$

c) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$

d) $\cos \alpha = \frac{5}{12}$

3*. Dokáž, že **pre každý uhol α platí :** a) $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$

b) $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$

4*. **Kotangens** uhla (ozn. cotg) je pomer dĺžok **pril'ahlej odvesny a protíahllej odvesny** pravouhlého trojuholníka. Dokáž, že **pre každý uhol α platí :**

a) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$

Použitá literatúra :

V.Burian,A.Bastlová : Matematika základnej školy v textoch

Šedivý a kol. : Matematika pre 9. ročník základných škôl – 2.časť