

Kuželosečky

1. Kružnica a kruh

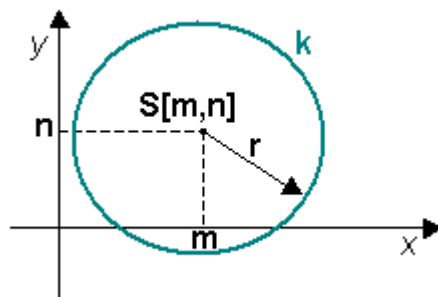
Definície: **Kružnica** je množina všetkých bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od daného bodu S – **stred kružnice** – je konštantná, t.j. rovná sa kladnému reálnemu číslu – **polomeru kružnice**. Množina všetkých bodov v rovine, ktoré ležia na kružnici alebo v jej vnútri tvorí **kruh**.

Napíšte rovnicu, ktorá platí pre všetky body X ležiace na kružnici k so stredom $S[m,n]$ a polomerom r .

Podľa definície: $|XS| = r$

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$$

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$



Definície: Rovnica $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, $r \in \mathbb{R}^+$ sa nazýva **rovnicou kružnice v stredovom tvare**. Bod $S[m,n]$ je stred kružnice, číslo r je polomer kružnice.

Nerovnica $(x-m)^2 + (y-n)^2 \leq r^2$, $r \in \mathbb{R}^+$ sa nazýva **analytické vyjadrenie kruhu** so stredom S a polomerom r . Rovnica $x^2 + y^2 + a.x + b.y + c = 0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ sa nazýva **rovnicou kružnice vo všeobecnom tvare**.

1. veta: Každá kružnica má práve jednu rovnicu vo všeobecnom tvare.

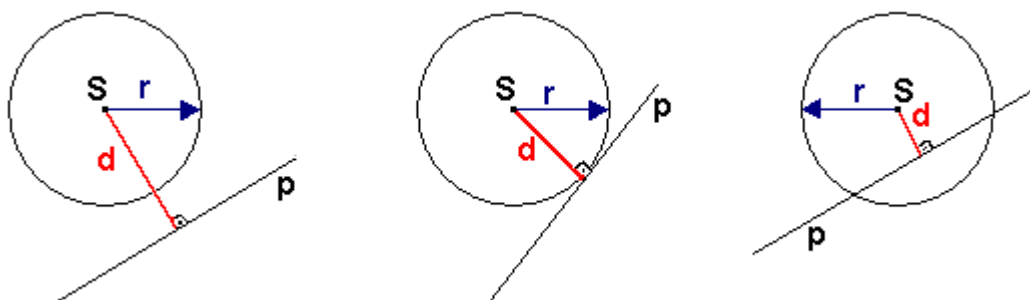
Niektoré rovnice v tvare $x^2 + y^2 + a.x + b.y + c = 0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ nie sú rovnicami kružníc.

Študent musí vedieť:

- napísať rovnicu kružnice (vyjadrenie kruhu), ak pozná polomer a súradnice stredu
- zakresliť kružnicu (kruh) v sústave súradníc
- zistiť, či daná rovnica je rovnicou kružnice – potom určiť súradnice stredu a polomer
- zistiť, či daný bod leží na kružnici (vo vnútri kruhu)
- napísať rovnicu kružnice, ak pozná súradnice 3 bodov, ktoré ležia na kružnici

2. Vzájomná poloha priamky a kružnice

Dotyčnica kružnice



Pre vzájomnú polohu priamky p a kružnice k platí:

$|Sp| > r$ p je nesečnica

Sústava vytvorená z rovníc priamky a kružnice nemá riešenie

$|Sp| = r$ p je dotyčnica

Sústava vytvorená z rovníc priamky a kružnice má jedno riešenie – súradnice bodu dotyku

$|Sp| < r$ p je sečnica

Sústava vytvorená z rovníc priamky a kružnice má dve riešenia – súradnice priesečníkov

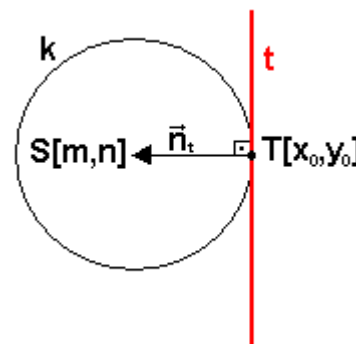
Študent musí vedieť :

- zistiť vzájomnú polohu priamky a kružnice
- vypočítať súradnice spoločných bodov priamky a kružnice (ak existujú)

Úloha : Aká môže byť **vzájomná poloha 2 kružníc**, vzhľadom na vzdialenosť ich stredov a veľkosť polomerov ? Ako vypočítame súradnice ich spoločných bodov ?

2. veta : **Rovnica dotýčnice t ku kružnici k: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, ak bodom dotyku je bod $T[x_0, y_0]$, je t: $(m - x_0) \cdot (x - x_0) + (n - y_0) \cdot (y - y_0) = 0$.**

Dôkaz : Daná je kružnica k: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, bod $T[x_0, y_0]$ je bod dotyku, $X[x, y]$ je ľubovoľný bod ležiaci na dotýčnici t. Pretože $TS \perp t$, môže byť vektor $\vec{n}_t = TS = [m - x_0, n - y_0]$ normálový vektor dotýčnice t. Po dosadení do všeobecnej rovnice dotýčnice t dostaneme :
 $t: (m - x_0) \cdot x + (n - y_0) \cdot y + c = 0$ Dosadíme $x = x_0, y = y_0$, vypočítame c, dosadíme do rovnice dotýčnice a upravíme :
 $t: (m - x_0) \cdot (x - x_0) + (n - y_0) \cdot (y - y_0) = 0$



3. veta : **Rovnica dotýčnice t ku kružnici k: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, ak bodom dotyku je bod $T[x_0, y_0]$, je t: $(m - x_0) \cdot (m - x) + (n - y_0) \cdot (n - y) = r^2$.**

Dôkaz : pomocou diferenciálneho počtu (4. ročník gymnázia)

Nezáleží na tom, ktorú rovnicu dotýčnice ku kružnici budete používať. Prvá rovnica sa dá ľahko odvodiť, druhú si môžete ľahšie zapamätať, pretože sa podobá na rovnicu kružnice. Častejšie sa používa druhá rovnica.

Úloha : Napíšte (smernicovú) rovnicu dotýčnice ku kružnici, ak poznáte rovnicu kružnice a súradnice bodu, ktorý leží na dotýčnici ale neleží na kružnici. !

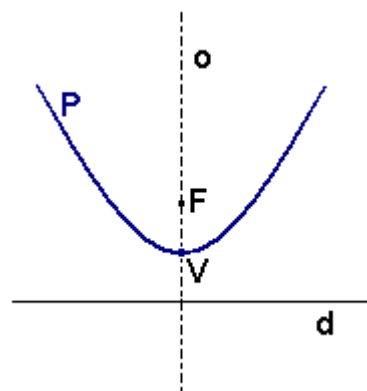
Študent musí vedieť :

- napísať rovnicu dotýčnice ku kružnici, ak pozná súradnice bodu dotyku
- napísať rovnicu dotýčnice ku kružnici, ak dotýčnica je kolmá (rovnobežná) na danú priamku
- zistiť, pod akým uhlom vidieť kružnicu z daného bodu (bez použitia dotýčníc)

3. Parabola

Definícia : Množina všetkých bodov X roviny, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od danej priamky d a bodu F, nazývame **parabola s riadiacou priamkou d a ohniskom F**. Ozn.

P: $|Xd| = |XF|$. Budeme sa zaoberať iba parabolami, ktoré majú riadiacu priamku rovnobežnú s x-osou alebo y-osou. Bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od ohniska aj riadiacej priamky paraboly, sa nazýva **vrchol paraboly**. Os súmernosti paraboly sa nazýva **os paraboly**.



4. veta : **Ohnisko a vrchol ležia na osi paraboly. Os paraboly je kolmá na riadiacu priamku paraboly.**

Definícia : Reálne číslo p, pre ktoré platí $|p| = |Fd|$, sa nazýva **parameter paraboly**.

Ak ohnisko leží nad riadiacou priamkou alebo vpravo od nej, tak $p > 0$. Ak ohnisko leží pod riadiacou priamkou alebo vľavo od nej, tak $p < 0$. Vzhľadom na polohu riadiacej priamky a ohniska rozlišujeme 4 typy paraboly.

5. veta : Každá parabola, ktorá má riadiacu priamku rovnobežnú s x-osou (os rovnobežnú s y-osou) a vrchol $V[v_1, v_2]$ má rovnicu $(x - v_1)^2 = 2p \cdot (y - v_2)$. Každá parabola, ktorá má riadiacu priamku rovnobežnú s y-osou (os rovnobežnú s x-osou) a vrchol $V[v_1, v_2]$ má rovnicu $2p \cdot (x - v_1) = (y - v_2)^2$.

Dôkaz : Budeme uvažovať o parabole na obr.

$$d: y - v_2 + \frac{1}{2}p = 0$$

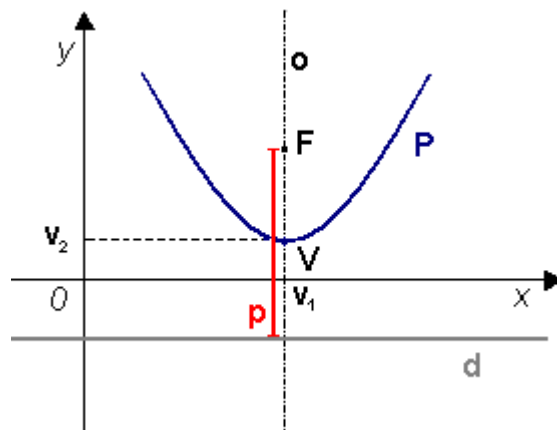
$$F[v_1, v_2 + \frac{1}{2}p]$$

Podľa definície : $|Xd| = |XF|$

Dosadíme do vzorcov pre vzdialenosť bodu od priamky a vzdialenosť dvoch bodov :

$$|y - v_2 + \frac{1}{2}p| = \sqrt{(x - v_1)^2 + (y - v_2 - \frac{1}{2}p)^2}$$

Po správnom umocnení a úprave dostaneme : $(x - v_1)^2 = 2p \cdot (y - v_2)$



Poznámka : Parabola, ktorá má vrchol v bode $V[0,0]$ má rovnicu $2p \cdot y = x^2$ alebo $y^2 = 2p \cdot x$.

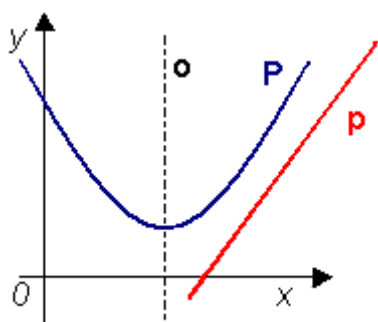
Definícia : Rovnica $x^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ alebo $y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sa nazýva **všeobecná rovnica paraboly**.

6. veta : Každá parabola má práve jednu všeobecnú rovnicu. Každá rovnica, ktorá má taký tvar ako niektorá z rovníc v predchádzajúcej definícii, je všeobecnou rovnicou paraboly.

4. Vzájomná poloha paraboly a priamky Dotyčnica paraboly

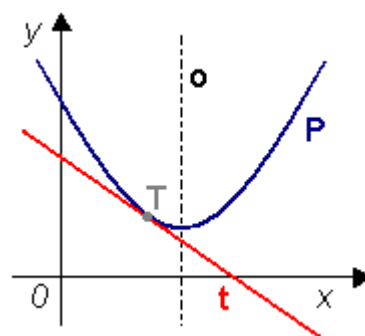
Definícia : **Vnútna oblasť paraboly** je množina všetkých bodov X roviny, ktorých vzdialenosť od riadiacej priamky paraboly je väčšia ako vzdialenosť od ohniska, t.j. $|Xd| > |FX|$.

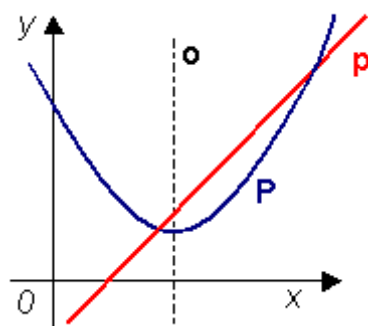
Vzájomná poloha paraboly a priamky môže byť nasledovná :



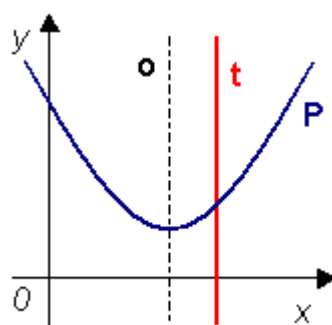
priamka p je nesečnica
sústava vytvorená z rovnice
priamky a rovnice paraboly
nemá riešenie

priamka t je dotyčnica
rôznobežná s osou paraboly
sústava vytvorená z rovnice
priamky a rovnice paraboly má 1 riešenie – súradnice bodu
dotyku T





priamka p je sečnica
sústava vytvorená z rovnice
priamky a rovnice paraboly má
2 riešenia – súradnice
priesečníkov
alebo priamka p je rovnobežná
s osou paraboly a priamka
a parabola majú 1 spoločný bod



7. veta : Ak má parabola rovnicu $x^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, tak jej **dotyčnica v bode $T[x_0, y_0]$ má smernicu $k = -(2x_0 + a)/b$.**

Ak má parabola rovnicu $y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tak jej dotyčnica v bode $T[x_0, y_0]$ **má smernicu $k = -a/(2y_0 + b)$.**

Študent musí vedieť :

- napísať rovnicu paraboly ak pozná súradnice vrcholu a parameter
- napísať rovnicu paraboly ak pozná súradnice ohniska a rovnicu riadiacej priamky
- z rovnice paraboly zistiť súradnice jej vrcholu a ohniska, parameter a rovnicu riadiacej priamky
- znázorniť parabolu v sústave súradníc
- zistiť vzájomnú polohu paraboly a priamky a vypočítať súradnice ich spoločných bodov
- napísať rovnicu dotyčnice ku parabole, ak pozná súradnice bodu dotyku

5. Elipsa

Definícia : Množinu všetkých bodov X roviny, ktorých súčet vzdialeností od daných bodov F a G je konštantný – rovný kladnému reálnemu číslu $2a > |FG|$ – nazývame **elipsa**.

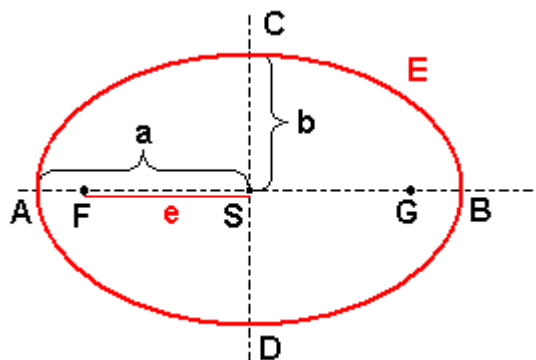
E : $|FX| + |GX| = 2a$

Body **F a G** sú **ohniská elipsy**, číslo **a** je **hlavná polos**, stred **S** úsečky FG je **stred elipsy**, vzdialenosť ohnisk od stredu elipsy sa nazýva

excentricita (výstrednosť), ozn. **e**, číslo **b = $\sqrt{a^2 - e^2}$** je **vedľajšia polos**. Body **A, B** sú **hlavné vrcholy**, body **C, D** sú **vedľajšie vrcholy**.

Platí : $|AS| = |SB| = a$

$|CS| = |SD| = b$

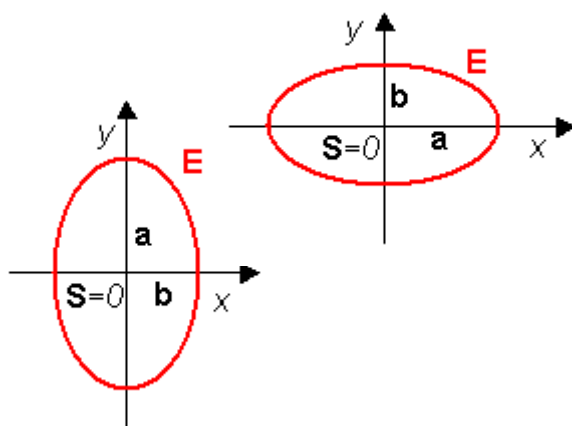


Poznámka : Elipsa, ktorá má stred $S[0,0]$ a jej

ohniská ležia na x-osi, má rovnicu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Elipsa, ktorá má stred $S[0,0]$ a jej ohniská

ležia na y-osi, má rovnicu $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$



8. veta : Každá elipsa, ktorá má stred $S[m,n]$ a hlavnú polos a rovnobežnú s x-osou, má

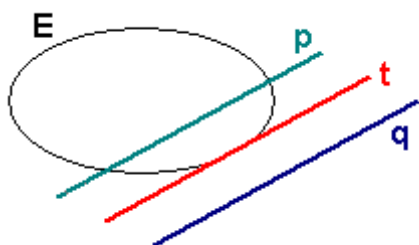
práve jednu rovnicu tvaru $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Každá elipsa, ktorá má stred $S[m,n]$ a hlavnú polos a rovnobežnú s y-osou, má práve

jednu rovnicu tvaru $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$

Definícia : Rovnicu $a.x^2 + b.y^2 + c.x + d.y + e = 0$, kde $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$ nazývame **všeobecná rovnica elipsy**.

9. veta : Každá rovnica typu $a.x^2 + b.y^2 + c.x + d.y + e = 0$, kde $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$, je rovnicou najviac jednej elipsy. Pozor ! Koeficienty a,b nie sú polosy elipsy !



Vzájomnú polohu elipsy a priamky zistíme podľa počtu riešení sústavy rovníc vytvorenej z rovnice elipsy a rovnice (vyjadrenia) priamky :

priamka p je sečnica $\Leftrightarrow$ sústava má 2 riešenia

priamka t je dotyčnica $\Leftrightarrow$ sústava má 1 riešenie

priamka q je nesečnica $\Leftrightarrow$ sústava nemá riešenie

Pomôcka pri určovaní vzájomnej polohy priamky p a elipsy sa stredom S :

a) ak $|Sp| < b$, tak p je sečnica

b) ak $|Sp| > a$, tak p je nesečnica

c) ak $a > |Sp| > b$, tak vzájomná poloha priamky a elipsy môže byť akákoľvek

Poznámka : Obsah plochy ohraničenej elipsou je $S = \pi ab$, kde a,b sú polosy elipsy.

Študent musí vedieť :

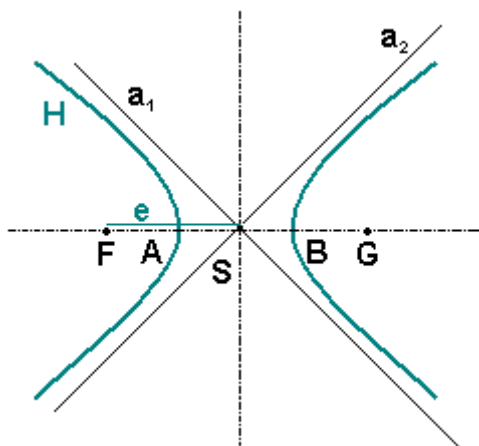
– napísať rovnicu elipsy, ak pozná súradnice jej stredu a veľkosť a polohu polosí

– vypočítať excentricitu a súradnice ohnísk elipsy

– z rovnice elipsy určiť súradnice jej stredu, vrcholov a ohnísk, veľkosť a polohu polosí

– zistiť vzájomnú polohu priamky a elipsy a vypočítať súradnice ich spoločných bodov

6. Hyperbola

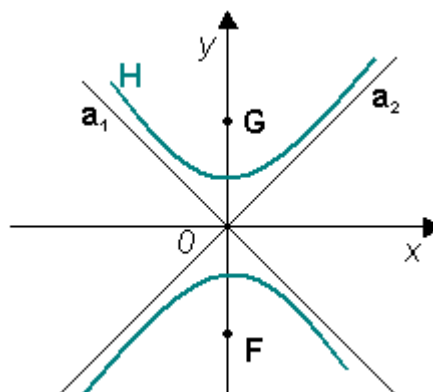
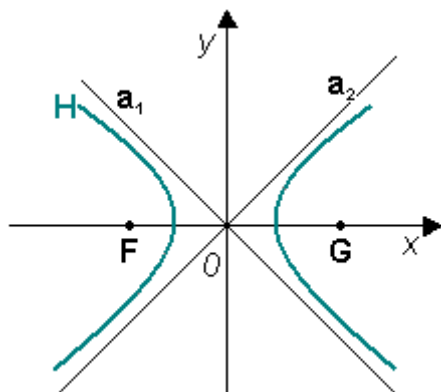


Definícia : Množinu všetkých bodov X roviny, ktorých rozdiel vzdialeností od daných bodov F a G je konštantný – rovný kladnému reálnemu číslu $2a < |FG|$ – nazývame **hyperbola**.

H : $||FX| - |GX|| = 2a$

Body **F a G** sú **ohniská hyperboly**, číslo **a** je **hlavná polos**, stred **S** úsečky FG je **stred hyperboly**, vzdialenosť ohnísk od stredu hyperboly sa nazýva **excentricita** ozn. **e**, číslo **b = $\sqrt{e^2 - a^2}$** je **vedľajšia**

polos. Body **A,B** sú **hlavné vrcholy**, vedľajšie vrcholy hyperbola nemá. Hyperbolu tvoria dve **vetvy**. Pre všetky body X ležiace na jednej vetve platí $|FX| - |GX| = 2a$, pre body na druhej vetve platí $|GX| - |FX| = 2a$.



Poznámka : Hyperbola, ktorá má stred $S[0,0]$ a jej ohniská ležia na x-osi, má rovnicu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbola, ktorá má stred $S[0,0]$ a jej ohniská ležia na y-osi, má rovnicu

Definícia : **Asymptoty hyperboly** sú priamky, ktoré prechádzajú stredom hyperboly, pričom pre ich smernice platí :
ak FG je rovnobežná s x-osou, tak $k = \pm b/a$
ak FG je rovnobežná s y-osou, tak $k = \pm a/b$.

10. veta : **Asyptota nemá s hyperbolou spoločné body. Každá priamka rovnobežná s niektorou asymptotou pretína hyperbolu práve v jednom bode.**

Dôkaz : príliš zložitý

11. veta : **Každá hyperbola, ktorá má stred $S[m,n]$ a hlavnú polos rovnobežnú s x-osou, má práve jednu rovnicu tvaru**

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

Každá hyperbola, ktorá má stred $S[m,n]$ a hlavnú polos rovnobežnú s y-osou, má práve jednu rovnicu tvaru

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$$

Definícia : Rovnicu $a.x^2 + b.y^2 + c.x + d.y + e = 0$, kde $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$ $a.b < 0$ nazývame **všeobecná rovnica hyperboly**.

12. veta : Každá **rovnica typu $a.x^2 + b.y^2 + c.x + d.y + e = 0$, kde $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$, je rovnicou najviac jednej hyperboly**. Pozor ! Koeficienty a,b nie sú polosi hyperboly !

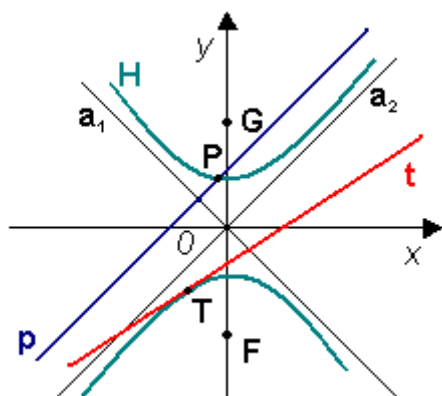
Vzájomnú polohu priamky a hyperboly zistíme podľa počtu riešení sústavy vytvorenej z rovnice hyperboly a rovnice priamky :

2 riešenia => priamka je sečnica

1 riešenie => ak je priamka rovnobežná s asymptotou, tak je sečnica

ak priamka nie je rovnobežná s asymptotou, tak je dotyčnica

0 riešení => priamka je nesečnica



Študent musí vedieť :

- napísať rovnicu hyperboly, ak pozná súradnice jej stredu a veľkosť a polohu polosí
- vypočítať excentricitu a súradnice ohnisk hyperboly
- z rovnice hyperboly určiť súradnice jej stredu, vrcholov a ohnisk, veľkosť a polohu polosí
- zistiť vzájomnú polohu priamky a hyperboly a vypočítať súradnice ich spoločných bodov

13. veta : Rovnoosová hyperbola ($a = b$), ktorá má stred v bode $S[m,n]$ a asymptoty rovnobežné so súradnicovými osami, má rovnicu $2.(x - m).(y - n) = \pm a^2$

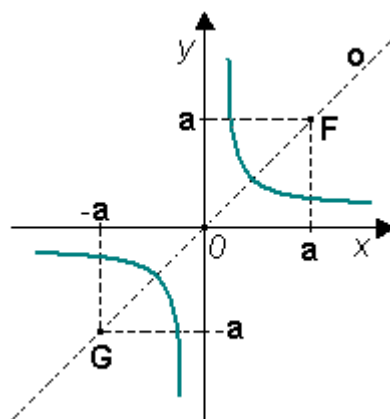
Dôkaz : urobíme pre hyperbolu so stredom $S[0,0]$. Pretože $a = b$, je z obr. zrejmé, že ohniská majú súradnice $F[a,a]$ a $G[-a,-a]$, kde a je hlavná polos.

Podľa definície : $|FX| - |GX| = 2a$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} - \sqrt{(x + a)^2 + (y + a)^2} = 2a$$

Jednu odmocninu prenesieme na pravú stranu, dvakrát umocníme a upravíme.

Výsledný tvar : $2xy = a^2$



Autor : **Beata Hegerová**, Gymnázium Nováky

Použitá literatúra :

Šedivý a kolektív : **Matematika pre 3.ročník gymnázia**