Kvadratické rovnice

Algebraické rovnice druhého stupňa sa v špeciálnych úlohách vyskytujú na hlinených babylonských doskách i čínskych zbierkach príkladov z 18 st. p. n. l. Babylončania vedeli riešiť kvadratickú rovnicu $x^2 + px + q = 0$ s doplnením na štvorec. Číňania v 7. st. n. l. už vedeli riešiť kubické rovnice, čo dokazuje kniha matematiky z roku 625 n. l. od Van Sautuna. V učebnici Hisáb al – džabr va – l – mukábala vydanej v roku 825 n. l., v ktorej špičkový islamský matematik Musa al Chavarizmi uvádza tri kvadratické rovnice $x^2 + 10x = 39$, .$x^2 + 21 = 10x$, $x^2 = 3x + 4$; Výber nie je náhodný, lebo reprezentujú tri základné typy kvadratickej rovnice $x^2 + px + q = 0$; Žil v rokoch 780 – 847.

Pojem kvadratická rovnica

Veľa problémov , ktoré prináša každodenný život sa dá z matematického hľadiska riešiť základnými arimatickými výpočtami alebo lineárnymi rovnicami ale mnohé úlohy z fyziky nás zavedú k riešeniu rovníc, ktoré obsahujú neznámu vyššieho stupňa.

Pre názornosť uvedieme príklad.

V pravouhlom trojuholníku je jedna odvesna o 15 cm kratšia ako druhá, prepona má 75 cm. Určíme jeho odvesny.

Riešenie: Nech je veľkosť dlhšej odvesny x cm. Potom veľkosť kratšej odvesny je (x – 15)cm Pre číselné hodnoty týchto veľkostí podľa Pythagorovej vety platí

$$.x^2 + (x - 15)^2 = 75^2$$

Po umocnení na druhú dostaneme rovnicu

$$.x^2 + x^2 - 30x + 225 = 5\,625$$

po úprave dostaneme tvar rovnice

$$2x^2 - 30x - 5\,400 = 0$$

Ak rovnicu vydelíme dvoma dostaneme konečný tvar

$$.x^2 - 15x - 2\,700 = 0$$

v ktorej sa nachádza okrem lineárneho a absolútneho člena ešte kvadratický člen $\mathbf{x^2}$. Túto rovnicu nazývame **kvadratickou** a jej riešením sa budeme v nasledujúcich článkoch zaoberať

Definícia

Výroková forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, $\mathbf{a, b, c \in R, a \neq 0}$, sa nazýva **kvadratická rovnica** s neznámou **x** alebo aj rovnica druhého stupňa s neznámou **x**.

V rovnici

$$.ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

sa nazýva člen $\mathbf{ax^2}$ **kvadratický, bx lineárny** a **c absolútny.**
V kvadratickej rovnici je vždy $\mathbf{a \neq 0}$; pre $\mathbf{a = 0}$ sa rovnica redukuje na rovnicu $\mathbf{bx + c = 0}$, ktorá už nie je kvadratická.
Ak aj $\mathbf{b \neq 0, c \neq 0}$, kvadratická rovnica sa nazýva **úplná.**
Ak $\mathbf{b = 0}$ alebo $\mathbf{c = 0}$, kvadratická rovnica sa nazýva **neúplná.**
Ak $\mathbf{b = 0}$, rovnica má tvar

$$\mathbf{ax^2 + c = 0} \qquad (2)$$

a nazýva sa **rydzokvadratická** bez lineárneho člena.
Ak $\mathbf{c = 0}$; rovnica má tvar

$$\mathbf{ax^2 + bx = 0} \qquad (3)$$

a nazýva sa **kvadratická rovnica bez absolútneho člena.**
Ak rovnicu (1) delíme číslo $\mathbf{a \neq 0}$, dostaneme

$$\mathbf{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0}$$

Označme $\mathbf{\frac{b}{a} = p}$, $\mathbf{\frac{c}{a} = q}$, potom kvadratická rovnica bude mať tvar

$$\mathbf{x^2 + px + q = 0} \qquad (4)$$

ktorý nazývame **normovaný tvar** kvadratickej rovnice.

Rýdzokvadratická rovnica

Podľa predchádzajúceho vysvetlenia je rýdzokvadratická rovnica daná výrokovou formou

$$\mathbf{V(x) : ax^2 + c = 0, \qquad a, c \in R, \; a \neq 0}$$

Našou úlohou je nájsť množinu všetkých jej koreňov, alebo určiť obor pravdivosti **P** výrokovej formy **V(x)** v množine **R** (všetkých reálnych čísiel) alebo v niektorej jej podmnožine. Rovnicu $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ budeme riešiť v množine **R.** Delením čísla $\mathbf{a \neq 0}$ upravíme túto rovnicu najskôr na tvar

$$\mathbf{x^2 + \frac{c}{a} = 0} \qquad (1)$$

Ak $\frac{c}{a} < 0$, je $-\frac{c}{a} > 0$. Označme $-\frac{c}{a} = r^2$. Potom dostaneme

$$x^2 - r^2 = 0$$

alebo $$(x - r).(x + r) = 0$$

Súčin dvoch činiteľov, ako vieme , sa rovná nule práve vtedy, keď aspoň jeden z činiteľov sa rovná nule. Teda potom platí

$$(x - r).(x + r) = 0 \Leftrightarrow x = r \vee x = -r$$

Korene rovnice $ax^2 + c = 0$ sú navzájom opačné čísla

$$x = r = \sqrt{-\frac{c}{a}}\ ;\quad x = -r = -\sqrt{-\frac{c}{a}}\ ;$$

čo stručne zapisujeme

$$\mathbf{x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}\ ; \qquad \mathbf{(2)}$$

(Zápis $x_{1,2}$ znamená, že ide o dva korene: x_1, x_2.)

Ak $\frac{c}{a} > 0$ a označíme $\frac{c}{a} = r^2$, tak rovnica (1) bude mať tvar $x^2 + r^2 = 0$

Pretože $r^2 > 0$, neexistuje reálne číslo x, ktoré by vyhovovalo predchádzajúcej rovnici. Rovnica teda nemá v tomto prípade koreň v R; jej oborom pravdivosti je prázdna množina.

Ak $\frac{c}{a} = 0$, a c = 0 má rovnica (1) tvar $x^2 = 0$

a jej koreňom , a to jediným, je nula alebo P = {0}.

V prípade $\frac{c}{a} \le 0$ možno korene rovnice (1) získať aj týmto postupom

$$\mathbf{x^2 = -\frac{c}{a}, \qquad -\frac{c}{a} \ge 0}$$

$$\mathbf{\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

$$\mathbf{|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

Z tohto zápisu dostaneme

$$\mathbf{x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}, \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

V praxi má vzorec tvar zápisu

$$\mathbf{x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\ ;}$$

Máme riešiť rýdzo kvadratickú rovnicu $25x^2 - 36 = 0$;

Riešenie; Neznámu x^2 ponecháme na ľavej strane a ostatné členy rovnice presunieme na pravú stranu čím dostaneme zápis tvaru

$$x^2 = \frac{36}{25}$$

ak odmocníme všetkých členov rovnice dostaneme

$$|x| = \frac{6}{5}\ ;$$

Ak $x > 0$, potom $x = \dfrac{6}{5}$;

Ak $x < 0$, potom $|x| = -\dfrac{6}{5}$;

Daná rovnica má dva korene $x_1 = \dfrac{6}{5}$; $x_2 = -\dfrac{6}{5}$;

Skúška riešenia;

$$25 \,.\, \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 36 = 0$$

$$25.\frac{36}{25} - 36 = 0$$

$$36 - 36 = 0;$$
$$0 = 0;$$

Taký istý výsledok dostaneme aj pri zápornom koreni $x_2 = -\dfrac{6}{5}$.

Príklad. Riešte rýdzo kvadratickú rovnicu $x^2 + 9 = 0$;

Riešenie: Malou úpravou dostaneme $x^2 = -9$;

Teraz máme nájsť také číslo x, ktorého druhá mocnina sa má rovnať zápornému číslu. Ale ako vieme, také číslo v obore reálnych čísel neexistuje, teda rovnica nemá riešenie.

Príklad. Ako dlho bude padať kameň volne pustený do šachty hlbokej 55 m?

Riešenie: Dráha volného pádu je daná vzorcom $s = \dfrac{g}{2} t^2$;

Toto je rovnica, v ktorej neznáma je **t**, **s** , a **g** , sú konštanty.
Vypočítajte teda t^2 z rýdzo kvadratickej rovnice.

$.t^2 = \dfrac{2s}{g}$; odmocnením dostaneme tvar

$$.t = \sqrt{\frac{2s}{g}};$$

čísla g a s sú kladné čísla , potom rovnica bude mať tvar

$$.t = \sqrt{\frac{2\,.\,55}{10}} = \sqrt{\frac{110}{10}} = \sqrt{11} = 3{,}316;$$

Kvadratická rovnica bez absolútneho člena

Kvadratická rovnica bez absolútneho člena je daná výrokovou formou

$$\mathbf{V(x): ax^2 + bx = 0, \qquad a, b \in R,\ a \neq 0}$$

Pri riešení tejto rovnice rozložíme ľavú stranu na súčin:

$$\mathbf{x(ax + b) = 0}$$

pričom platí

$$\mathbf{x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0}$$

Z rovnice ax + b = 0 vyplýva $\mathbf{x = -\frac{b}{a}}$. Kvadratická rovnica bez absolútneho člena má teda korene

$$\mathbf{x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Ak b ≠ 0, tak

$$\mathbf{P = \{ 0; -\frac{b}{a} \}}$$

Ak b = 0, to je vtedy ak má rovnica tvar $ax^2 = 0$ tak má jediný koreň x = 0 , P = {0}.

Majme príklad na riešenie tohto druhu kvadratických rovníc.
Riešme v množine R rovnicu $5x^2 + 11x = 0$.

Riešenie: Oborom rovnice je množina R (reálnych čísel). Ak výraz na ľavej strane rozložíme na súčin, dostaneme

$$x(5x + 11) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 5x + 11 = 0$$

a z tohto dostaneme korene

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{11}{5}$$

Skúška riešenia.
Dosadením do základného tvaru rovnice dostaneme

$$5x^2 + 11x = 0$$

$$5\left(\frac{-11}{-5}\right)^2 + 11 . -\frac{11}{5} = 0$$

$$5\left(\frac{121}{25}\right) - \frac{121}{5} = 0$$

$$\frac{605}{25} - \frac{121}{5} = 0$$

$$605 - 605 = 0$$

$$0 = 0;$$

Prvý koreň $x_1 = 0$ rozoberať nebudeme , lebo obsahuje iba nulu.

Príklad. Riešme kvadratickú rovnicu v množine R^+ (množina kladných reálnych čísel).

$$\frac{2x}{x-3} - \frac{3x+2}{x-2} = 1$$

Riešenie. Oborom rovnice je množina $M = R^+ \ \{2; 3\}$ $x \neq 2$, $x \neq 3$, pretože pre $x = 2$ a .$x = 3$ nemajú zlomky vyskytujúce sa v rovnici zmysel.

Obidve strany rovnice násobíme výrazom $(x-2)(x-3)$, ktorý je v množine M rôzny od nuly, po úprave postupne dostaneme.

$$2x(x-2) - (3x+2)(x-3) = (x-3)(x-2)$$

$$2x^2 - 4x - 3x^2 + 7x + 6 = x^2 - 5x + 6$$

$$-2x^2 + 8 = 0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x\ 0 \vee x - 4 = 0$$

Odtiaľ dostaneme $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, Pretože $x_1 \notin M$, potom riešením úlohy je iba $x_2 = 4$.

Majme príklad. $$\frac{3x-5}{x} + \frac{x}{3x-5} = \frac{25}{x(3x-5)}$$

Riešenie: Ak budeme daný príklad riešiť v množine R , potom musí platiť $x \neq 0$, $3x - 5 \neq 0$;

Oborom rovnice je množina M = R okrem $\{0; \frac{5}{3}\}$

Obidve strany rovnice vynásobíme výrazom $x(3x-5) \neq 0$;

Teda $(3x-5)(3x-5) + x \cdot x = 25$ alebo skrátene $(3x-5)^2 + x^2 = 25$
Ďalšími ekvivalentnými úpravami dostaneme:

$$9x^2 - 30x + 25 + x^2 = 25$$

$$10x^2 - 30x = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 3 = 0$$

Korene poslednej rovnice sú $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Prvý koreň nevyhovuje podmienke $x \neq 0$ a teda nemôže byť koreňom danej rovnice. Rovnica má jediný koreň $x = 3$, takže $P = \{3\}$.
Dosadením do rovnice sa môžeme presvedčiť , že číslo 3 vyhovuje danej rovnici.

Riešenie úplnej kvadratickej rovnice

Teraz sa sústredíme na riešenie rovnice

$$.ax^2 + bx + c = 0$$

v prípade, že a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0, tak hovoríme o úplnej kvadratickej rovnici.
Úplnú kvadratickú rovnicu možno riešiť troma spôsobmi:

Riešením kvadratickej rovnice doplnením na druhú mocninu dvojčlena

Často sa tomuto spôsobu hovorí (doplnením na štvorec).

Majme príklad. Riešme v množine R rovnicu $x^2 – 4x – 21 = 0$.

Riešenie: Najskôr rovnicu upravíme na tvar

$$.x^2 – 4x = 21 \qquad (1)$$

Teraz k obidvom stranám rovnice pričítame také vhodné číslo, aby výraz na ľavej strane bol druhou mocninou dvojčlena. Pričom použijeme vzorec

$$.a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \qquad (2)$$

ktorý už poznáme z oboru mocnín a mnohočlenov.
Keď porovnáme ľavé strany rovníc (1) a (2) zistíme, že tým vhodným číslom, ktoré k obidvom stranám rovnice (1) pripočítame je číslo b^2, pričom

$$.a = x, \quad 2ab = – 4x$$

potom

$$2b = – 4 \quad \text{alebo} \quad b = – 2$$

Rovnicu (1) upravíme na tvar

$$.x^2 – 4x + 4 = 21 + 4$$

$$(x – 2)^2 = 25$$

Túto rovnicu riešime ako rýdzokvadratickú rovnicu a neznámou x – 2.

$$|x – 2| = \sqrt{25}$$

$$.x – 2 = \pm \sqrt{25}$$

$$.x = 2 \pm 5$$

Ako korene rovnice sme dostali $x_1 = 7$, $x_2 = – 3$.
Všetky úpravy, ktoré sme vykonali pri riešení rovnice, boli ekvivalentné. Oborom pravdivosti rovnice v R je P = {7; –3}.

Príklad. Riešme v množine R kvadratickú rovnicu.

$$5x^2 + 33x - 14 = 0$$

Riešenie. Pre zjednodušenie upravíme rovnicu na normovaný tvar

$$.x^2 + \frac{33}{5}x - \frac{14}{5} = 0$$

Pri riešení využijeme postup ako v predchádzajúcom príklade.

$$.x^2 + \frac{33}{5}x = \frac{14}{5}$$

$$.x^2 + \frac{33}{5}x + \left(\frac{33}{10}\right)^2 = \frac{14}{5} + \left(\frac{33}{10}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{33}{10}\right)^2 = \frac{1369}{100}$$

$$.x + \frac{33}{10} = \pm\sqrt{\frac{1369}{100}}$$

$$.x + \frac{33}{10} = \pm\frac{37}{10}$$

$$.x = \frac{33 \pm 37}{10}$$

Z tohto zápisu nám vyjdú dva korene $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = -7$,

Všetky úpravy boli ekvivalentné a oborom pravdivosti je $P = \{ \frac{2}{5}; -7 \}$

Pre ukážku si vyriešime príklad. V množine R riešme rovnicu $4x^2 - 5x + 12 = 0$.

Riešenie. Znova upravíme rovnicu na normovaný tvar

$$.x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{12}{4} = 0$$

$$.x^2 - \frac{5}{4} + 3 = 0$$

$$.x^2 - \frac{5}{4} = -3$$

Rovnicu upravíme rozšírením na štvorec

$$x^2 - \frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 = -3 + \frac{25}{64}$$

$$\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{-167}{64}$$

V poslednej rovnici nastal problém, lebo ľavá strana rovnice je kladná a druhá záporná, Teda $P = \theta$.

Uvedieme príklad, pri ktorom môže ísť o rovnicu s jedným koreňom.
Riešme v množine R rovnicu $9x^2 + 30x + 25 = 0$

Riešenie. Rovnicu môžeme zapísať priamo druhou mocninou dvojčlena

$$(3x + 5)^2 = 0$$

Vzhľadom nato, že druhou odmocninou sa nám pravá strana nezmení získame tvar

$$3x + 5 = 0$$

teda koreň rovnice je $x = -\frac{5}{3}$

Oborom pravdivosti danej rovnice je jednoprvková množina $P = \{ -\frac{5}{3} \}$.

Riešenie kvadratickej rovnice podľa vzorca v normovanom tvare.

Rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ upravíme na normovaný tvar tak, že

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

pričom $\frac{b}{a} = p$, a $\frac{c}{a} = q$, potom rovnica bude v normovanom tvare

$$x^2 + px + q = 0$$

Aplikujme známy vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pre lepšiu predstavu, ako sa získa vzorec pre výpočet takejto kvadratickej rovnice.
Teda majme

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Ak sa **$a = x$, $2ab = px$** potom **$2b = p$** a stoho dostaneme **$b = \frac{p}{2}$;**

potom $(a + b)^2$ sa rovná tvaru $(x + \frac{p}{2})^2$

Ak prvé dva členy rovnice rozšírime druhou mocninou dvojčlena, potom dostaneme

$$(x + \frac{p}{2})^2 = x^2 + \frac{p}{2}x + \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Ak platí $x^2 + px = -q$

Potom $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$

alebo $(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$

Rovnicu, ktorú sme dostali, je rýdzokvadratická a má riešenie za predpokladu, že

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

V takomto prípade môžeme zapísať $x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

teda korene rovnice sú $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Tieto výsledky v tvare $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, sa často používajú.

Riešenie úplnej kvadratickej rovnice pomocou vzorca.

Základný tvar úplnej kvadratickej rovnice je

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ za predpokladu , že $a \neq 0$ (1)

Ak rovnicu upravíme na normovaný tvar

$$\mathbf{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0}$$

a ďalšou úpravou na tvar

$$x^2 + \frac{b}{a} x = - \frac{c}{a}$$

Ľavá strana je prvými členmi druhej mocniny dvojčlena

$$x + \frac{b}{2a}$$

lebo platí $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} \right) = x^2 + \frac{b}{2a} x + \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2}$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2}$$

aby platila rovnica $x^2 + \frac{b}{a} x = - \frac{c}{a}$

musíme pripočítať k obom stranám posledného člena druhej mocniny dvojčlena

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

ľavú a pravú stranu zjednodušíme

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

pričom koreň $x_1 = - \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$$x_2 = - \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

V oboch prípadoch , keď sa $a \neq 0$ sú korene rovnice určené vzorcom

$$x_{1,2} = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminant kvadratickej rovnice

Pri riešení príkladov v predchádzajúcich článkoch sme zistili, že kvadratická rovnica môže mať v množine R dva rôzne korene alebo jeden koreň alebo žiaden koreň. Tento obor pravdivosti P kvadratickej rovnice môže byť dvojprvková alebo jednoprvková alebo prázdna množina.

Tento záver vyplýva priamo zo vzorcov pre normovanú a úplnú kvadratickú rovnicu, ktoré obsahujú druhú odmocninu výrazu $\frac{p^2}{4} - q$ pre normovaný tvar

a pre úplnú $b^2 - 4ac$. Tento výraz sa nazýva **diskriminant rovnice** z latinského slova discriminare = rozlišovať a budeme ho označovať symbolom **D.**

Po úprave ma rovnica tvar $$\left(x + \frac{.b}{2a} \right)^2 = \frac{D}{4a^2} ; \qquad (3)$$

Toto je rýdzo kvadratická rovnica, ktorá ma tri možnosti riešenia.

a). Ak $D > 0$, potom môžeme ľavú i pravú stranu odmocniť

$$\left| x + \frac{.b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{D}}{2a} ;$$

pre $x + \frac{.b}{2a} > 0$ je $\left| x + \frac{b}{2a} \right| = x + \frac{b}{2a}$; $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ alebo $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$;

pre $x + \frac{.b}{2a} < 0$, je $\left| x + \frac{b}{2a} \right| = -x - \frac{b}{2a}$; teda $-x - \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$;

po úprave dostaneme $$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} ;$$

Rovnici vyhovujú dva korene $\mathbf{x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}}$; $\mathbf{x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$;

čo stručne zapisujeme ako $$\mathbf{x_{1,2} = \frac{- \pm \sqrt{D}}{2a}} ;$$

b). Ak $D = 0$, potom z rovnice (3) dostaneme rovnicu

$$\left(x + \frac{.b}{2a} \right)^2 = 0$$

Táto rovnica ma jeden koreň

$$.x = - \frac{.b}{2a} ;$$

c). Ak $D < 0$; nemá rovnica reálne korene, pretože druhá odmocnina zo záporného čísla neni definovaná. Preto výraz $D = b^2 - 4ac$ ma rozhodujúci význam pre riešenie kvadratickej rovnice. Pri riešení kvadratickej rovnice určíme najskôr diskriminant.

Sledujte postup výpočtu diskriminantu.

$2x^2 - x - 1 = 0$; $D = (-1)^2 - [\,4 \,.\, 2 \,.(-1)] = 1 - (-8) = 9$;

$4x^2 - 4x + 1 =$; $D = (-4)^2 - (\,4 \,.\, 4 \,.\, 1\,) = 16 - 16 = 0$;

$x^2 - x + 1 = 0$; $D = (-1)^2 - (\,4 \,.\, 1 \,.\, 1\,) = 1 - 4 = -3$;

Poznámka. Pri dosadení členov do vzorca $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; je potrebné zmeniť znamienko u člena **b**, ak je v rovnici znamienko +, potom vo vzorci je znamienko – ale ak je v rovnici znamienko –, potom vo vzorci je znamienko +.

Napr. $4x^2 - 6x + 24 = 0$; do vzorca už pred písmeno b znamienko – nedávame, teda písmeno b ma kladnú hodnotu.

Kvadratická rovnica s neznámou v menovateli.

Kvadratické rovnice s neznámou v menovateli riešime podľa rovnakých pravidiel, ako kvadratické rovnice o jednej neznámej, ale s podmienkou, za ktorých má lomený výraz zmysel a porovnanie týchto podmienok s vypočítanými koreňmi.

Majme príklad ; $\dfrac{x - 11}{x^2 - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1} = \dfrac{2(x + 7)}{x + 1} - 4$

Riešenie. Rovnica ma zmysel iba ak všetky menovatele sú rôzne od nuly.

Teda $x^2 - 1 = (x + 1)\,(x - 1) \neq 0$;

$x + 1 \neq 0$; alebo $x \neq -1$;

$x - 1 \neq 0$; alebo $x \neq 1$;

Prvá podmienka $x + 1 \neq 0$ platí i pre ostatné zlomky, teda za predpokladu, že $x \neq 1$, $x \neq -1$, majú všetky tri zlomky zmysel. Najmenším spoločným menovateľom je $(x + 1)\,(x - 1)$ a riešenie rovnice ma tvar

$$(x + 11) - (x - 1)(x - 1) = 2(x + 7)(x - 1) - (x + 1)(x - 1)$$

$$x + 11 - (x^2 - 2x + 1) = 2x^2 + 12x - 14 - (\,4x^2 - 4)$$

$$-x^2 + 3x + 10 = -2x^2 + 12x - 10$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 ;$$

Pomocou diskriminantu rozhodneme či rovnica má reálne korene a koľko.

$D = b^2 - 4ac = 9^2 - (4 . 1 . 20) = 81 - 80 = 1$;

Diskriminant je kladný a preto môžeme použiť vzorec pre výpočet koreňov

$$.x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{+9 \pm 1}{2} \text{ ; teda } x_1 = 5 \text{ ; } \quad x_2 = 4 \text{ ;}$$

Korene rovnice sú $x_1 = 5$; a $x_2 = 4$; ani jeden koreň neodporuje podmienke danej pri riešiteľnosti danej rovnice.

Dosadením za neznámu x číslo z prvého koreňa $x_1 = 5$ dostaneme.

$$L = \frac{5 + 11}{25 - 1} - \frac{5 - 1}{5 + 1} = \frac{16}{24} - \frac{4}{6} = \frac{16}{24} - \frac{16}{24} = 0 \text{ ;}$$

$$P = \frac{2 . (5 + 7)}{5 + 1} - 4 = \frac{10 + 14}{6} - 4 = \frac{24 - 24}{6} = \frac{24}{6} - \frac{24}{6} = 0 \text{ ;}$$

Kvadratické rovnice s neznámou v odmocnenci.

Rovnica, v ktorej sa vyskytuje neznáma v odmocnenci, sa nazýva iracionálnou rovnicou. Pozor na rozdiel medzi rovnicami iracionálnymi a rovnicami racionálnymi s odmocninami.

Iracionálna rovnica $x + \sqrt{a + x^2} = b$; neznáma je v odmocnenci.

Racionálna rovnica $ax + \sqrt{a + b^2} = x^2$; parametre v odmocnenci.

Pri riešení iracionálnych rovníc postupujeme obvykle tak, že

a). rovnicu vhodne upravíme

b). odstránime odmocniny umocnením ľavej í pravej strany rovnice

c). získanú kvadratickú rovnicu riešime podľa vzoru (rovnice o jednej neznámej)

d). o správnosti riešenia sa presvedčíme skúškou

Všimnite si jednoduchého príkladu riešenia iracionálnej rovnice

$$\sqrt{x^2 - 5} = 2 \text{ ;}$$

Ak umocníme ľavú i pravú stranu rovnice dostaneme kvadratickú rovnicu

$$.x^2 - 5 = 4 \text{ ; } \quad \text{alebo} \quad x^2 = 9 \text{ ;}$$

Korene tejto rovnice sú $x_{1,2} = \pm 3$; sú i kereňmi iracionálnej rovnice $\sqrt{x^2 - 5} = 2$;

Umocňovaním iracionálnej rovnice môžeme získať aj lineárnu rovnicu. V tomto prípade vypočítame koreň ako (lineárna rovnica o jednej neznámej).

Napr. umocnením iracionálnej rovnice

$\sqrt{6 - x} = 2$; dostaneme $6 - x = 4$;

teda $-x = -2 \,/ -1$; $x = 2$; čo je koreň iracionálnej rovnice.

Umocnenie nemusí byť vždy ekvivalentnou úpravou. Preto si treba zapamätať!

a). Rovnica získaná umocnením danej iracionálnej rovnice môže mať i niektoré ďalšie korene, ktoré nemusia iracionálnej rovnici vyhovovať.

b). V obore reálnych čísel nevyhovujú danej iracionálnej rovnici ani tie korene, ktoré po dosadení majú tvar, kde dostaneme odmocniny so záporným odmocnencom.

Skúška správnosti riešenia je teda dôležitou súčasťou riešenia.

Majme príklad. Ak umocníme iracionálnu rovnicu $\sqrt{2x - 1} = x - 2$ dostaneme

.$x^2 - 6x + 5 = 0$;

je to obecná kvadratická rovnica, kde kvadratický člen sa rovná 1; po vyriešení danej rovnice dostaneme korene $x_1 = 5$; $x_2 = 1$; ale danej iracionálnej rovnici vyhovuje iba koreň $x_1 = 5$;

Skúška: Pre $x_1 = 5$; $L = \sqrt{2 . 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$; $P = 5 - 2 = 3$;

Pre $x_2 = 1$; $L = \sqrt{2. 1 - 1} = \sqrt{1} = 1$; $P = 1 - 2 = -1$;

Iracionálne rovnice upravujeme pred umocnením spravidla na jeden z týchto spôsobov.

$\sqrt{A} = B$; ak obsahuje rovnica jednu odmocninu

$\sqrt{A} = \sqrt{B} + C$; ak obsahuje rovnica dve odmocniny

$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} + D$; ak obsahuje rovnica tri odmocniny atď. pričom (A,B,C,D) sú ľubovolné výrazy.

Pamätajte! Ak tvorí ľavú alebo pravú stranu iracionálnej rovnice mnohočlen, musíme rovnicu umocňovať ako mnohočlen. V niektorých prípadoch odstránime odmocninu až po opakovanom umocňovaní.

Postup umocnenia rovnice:

Správne: $x = \sqrt{x} + 3 \;\rightarrow\; x^2 = x + 6\sqrt{x} + 9$;

Nesprávne : $x = \sqrt{x} + 3 \rightarrow x^2 = x + 9$;

Sledujte postup riešenia;

Iracionálna rovnica $\sqrt{3x + 1} - x = 1$

Upravený tvar $\sqrt{3x + 1} = x + 1$

umocníme $(\sqrt{3x + 1})^2 = (x + 1)^2$

dostaneme $3x + 1 = x^2 + 2x + 1$

po úprave $x^2 - x = 0$

Dostali sme kvadratickú rovnicu bez absolútneho člena , ktorú riešime spôsobom

$$.x^2 - x = 0$$

$$x (x - 1) = 0$$

pričom platí $x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{1} = 1$;

Skúška : pre $x_1 = 0$; L $\sqrt{3.0 + 1} - 0 = 1$; P = 1;

Pre $x_2 = 1$; L $\sqrt{3.1 + 1} - 1 = 1$; P = 1;

Korene $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; sú riešením danej iracionálnej rovnice.

Sledujte postup riešenia iracionálnej rovnice s troma odmocninami.

Iracionálna rovnica $\sqrt{x + 3} - \sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 1} = 0$

Rovnicu upravíme $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{3x + 1}$

Rovnicu umocníme podľa vzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Teda $(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1})(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1}) = (\sqrt{3x + 1})(\sqrt{3x + 1})$

$$(x + 3) - 2\sqrt{x + 3} \,.\, \sqrt{x - 1} + (x - 1) = 3x + 1$$

Rovnicu upravíme $-2\sqrt{x + 3}\,\sqrt{x - 1} = x - 1$

Umocníme $4(x + 3)(x - 1) = (x - 1)(x - 1)$

$$(4x + 12)(x - 1) = (x - 1)(x - 1)$$

$$4x^2 + 12x - 4x - 12 = x^2 - 2x + 1$$

Upravíme na tvar $3x^2 + 10x - 12 = 0$

Riešenie obecnej (úplnej) kvadratickej rovnice si prevedieme ako samokontrolu.
Daná rovnica ma korene $x_1 = 1$;

$$.x_2 = -4\frac{1}{3} ;$$

Skúška.

Pre $x_1 = 1$; $L = \sqrt{1 + 3} - \sqrt{3 \,.\, 1 .+ 1} - \sqrt{1 - 1} = 0$

Pre $x_2 = -4\frac{1}{3}$; Všetky odmocniny majú záporného odmocnenca, a preto nemajú v obore reálnych čísel zmysel.

Iracionálna rovnica ma iba jediný koreň $x_1 = 1$;

Kvadratické rovnice s parametrom.

Kvadratické rovnice s parametrom riešime podobne ako kvadratické rovnice s číslami. Násobiť alebo deliť rovnicu výrazom obsahujúcim neznámu alebo parameter môžeme iba vtedy, ak sa tieto výrazy pre vypočítané hodnoty koreňov alebo zvolené hodnoty parametrov nerovnajú nule. Stanovenie podmienok, za ktorých rovnicu týmto výrazmi násobíme alebo delíme, je jedným zo základných predpokladov správnej diskusie riešenia.

a). Sledujte diskusiu riešenia rovnice s jedným parametrom.

Rovnica $\frac{x - a}{x + a} + \frac{x + a}{x - a} = \frac{2(a^2 + 1)}{1 - a^2}$; /. $(x + a)(x - a)(1 - a)(1 + a) \neq 0$ (1)

Násobiť môžeme iba za podmienok ak $x + a \neq 0 \rightarrow x \neq -a$;

$x - a \neq 0$; $\rightarrow$ $x \neq a$;

$1 - a \neq 0$; $\rightarrow$ $a \neq 1$;

$1 + a \neq 0$; $\rightarrow$ $a \neq -1$;

$a \neq 0$;

Po vynásobení a úprave dostaneme

$a^2x^2 = a^2$ / : $a^2 \neq 0$ (2)

$x^2 = 1$; (3)

$x_{1,2} = \pm 1$ (4)

b). Diskusia riešenia.

Rovnica (1) ma zmysel iba ak $a \neq 1$; $a \neq -1$;

Z úpravy rovnice (2) vyplýva, že $a \neq 0$; Ak by sa **a** rovnalo nule, potom po dosadení do rovnice (1) dostaneme 2 = 2 čiže, rovnica by mala nekonečne veľa riešení.

Z podmienok rovnice (1) $x \neq -a$; $x \neq a$ vyplýva

1). Koreň $x_1 = +1$; $1 \neq -a \rightarrow a \neq -1$

$1 \neq a \rightarrow a \neq 1$

Ak $a = -1$ alebo $a = 1$; nemá rovnica zmysel, lebo odporuje podmienke

$a \neq 1$; $a \neq -1$;

2). Koreň $x_2 = -1$ $-1 \neq -a \rightarrow a \neq 1$
$-1 \neq a \rightarrow a \neq -1$

Ak $a = 1$ alebo $a = -1$ nemá rovnica zmysel
$a = 0$ ma rovnica nekonečne veľa riešení
$a \neq 1$, $a \neq -1$, $a \neq 0$, ma rovnica jediné riešenie $x_{1,2} = \pm 1$;

Teraz si ukážeme riešenie ešte jedného príkladu.

Máme rovnicu $$\frac{ax}{a+1} = \frac{a+1}{ax} ; \qquad (1)$$

Najmenším spoločným menovateľom je /. $(a+1)ax$; ak sa nerovná nule môžeme previesť násobenie za podmienok:

Ak $a + 1 \neq 0 \rightarrow a \neq -1$;
$ax \neq 0 \rightarrow a \neq 0$; $x \neq 0$;

Rovnica ma po vynásobení ma rovnica tvar

$a^2x^2 = (a +)^2$ /: a^2 za predpokladu, že $a^2 \neq 0 \rightarrow a \neq 0$; (2)

tvar rovnice po úprave $$x^2 = \frac{(a+1)^2}{a^2} ; \qquad (3)$$

Odmocnením dostaneme korene
$$x_{1,2} = \pm \frac{a+1}{a} ; \qquad (4)$$

Diskusia riešenia:

A. Rovnica (1) ma zmysel, iba ak $a \neq -1$; $a \neq 0$;
B. Z delenia rovnice (2) opäť vyplýva, že $a \neq 0$;
C. Z podmienok rovnice (1) $x \neq 0$ vyplýva

a). Pre koreň $x_1 = \frac{a+1}{a}$ musí platiť $0 \neq \frac{a+1}{a} \rightarrow a \neq -1$;

b). Pre koreň $x_2 = \frac{a+1}{a}$ musí platiť $0 \neq -\frac{a+1}{a} \rightarrow a \neq -1$;

Záver. Pre $a = -1$; $a = 0$; nemá rovnica zmysel.
Pre $a \neq -1$; $a \neq 0$; ma rovnica dva rôzne korene $x_{1,2} = \pm \frac{a+1}{a}$;

Sledujte diskusiu riešenia rovnice s dvoma parametrami.

Majme rovnicu $\dfrac{2x + a}{.x - a} = \dfrac{.x + b}{.2x - b}$; (1)

Rovnica ma najmenší spoločný menovateľ $(x - a)(2x - b)$

Násobiť môžeme iba ak $x - a \neq 0 \rightarrow x \neq a$;

$$2x - b \neq 0 \rightarrow x = \frac{.b}{2} ;$$

vzorec po vynásobení ma tvar $3x(x + a - b) = 0$; (2)

Rovnicu riešime ako kvadratickú bez absolútneho člena a jej korene sú

$.x_1 = 0$; $x_2 = b - a$; (3)

Diskusia riešenia.

A. Rovnica (1) má zmysel pre ľubovolné **a** i **b** ;
B. Z podmienok rovnice (1) $x \neq a$; $x \neq \dfrac{2}{.b}$; vyplýva

1). Pre koreň $x_1 = 0$ $0 \neq a \rightarrow a\ 0$;

$$0 \neq \frac{.b}{2} \rightarrow b \neq 0 ;$$

.a). Ak $a = 0$; $b = 0$; dosadením do rovnice (1) dostaneme $2 \neq \dfrac{1}{2}$

.b). Ak $a = 0$; $b \neq$; dosadením do rovnice (1) dostaneme

$\dfrac{2x}{.x} = \dfrac{x + b}{2x - b}$ a za predpokladu, že $x \neq 0$; $x \neq \dfrac{b}{2}$ vypočítame

$.x_1 = 0$; $x_2 = b$; pretože však $x \neq 0$ ma rovnica jediný koreň $x = b$;

.c). Ak $a \neq 0$; $b = 0$; vypočítame podobným postupom ako v b). že $x = - a$;

.d). Ak $a \neq 0$; $b \neq 0$; ma rovnica dva rôzne korene $x_1 = 0$; $x_2 = b - a$;
pre koreň $x_2 = b - a$; $a \neq b - a \rightarrow b \neq 2a$

$$\frac{.b}{2} \neq b - a \rightarrow b \neq 2a$$

.1). Ak $b = 2a$ dosadením do rovnice (1) dostaneme $3x(x - a) = 0$ a potom $x_1 = 0$; $x_2 = a$. Pretože podmienky rovnice (1) sú $x \neq a$; ma rovnica jediný koreň $x = 0$;

2). Ak $b \neq 2a$ ma rovnica dva rôzne korene $x_1 = 0$; $x_2 = b - a$;

Záver. Pre $a = 0$; $b = 0$; nemá rovnica žiadne riešenie
Pre $a = 0$; $b \neq 0$; ma rovnica jediný koreň $x = b$;
Pre $a \neq 0$; $b = 0$; ma rovnica jediný koreň $x = -a$;
Pre $b = 2a$ ma rovnica jediný koreň $x = 0$;
Pre $a \neq 0$; $b \neq 0$; $b \neq 2a$ ma rovnica dva rôzne reálne korene $x_1 = 0$; $x_2 = b - a$;

Grafické riešenie kvadratických rovníc

Pri grafickom riešení kvadratických rovníc využijeme grafy funkcií

$$y = ax + b \quad \text{a} \quad y = ax^2$$

Ak je kvadratická rovnica daná v normovanom tvare

$$x^2 + px + q = 0$$

upravíme ju na tvar

$$x^2 = -px - q$$

a ten nahradíme dvoma rovnicami

$$y = x^2 \wedge y = -px - q$$

Prvou rovnicou je daná kvadratická funkcia, ktorej grafom je v karteziankej súradnicovej sústave parabola, ktorá má za os súradnicovú os **y** a vrchol v začiatku súradnicovej sústavy. Druhou rovnicou je daná lineárna funkcia, ktorej grafom je priamka. Súradnice priesečníkov paraboly a priamky vyhovujú jednak prvej rovnici $\mathbf{y = x^2}$, jednak druhej rovnici $\mathbf{y = -px - q.}$ Prvé súradnice týchto priesečníkov vyhovujú potom i danej kvadratickej rovnici, a teda sú jej koreňmi. Ak nie je kvadratická rovnica daná v normovanom tvare, tak ju na tento tvar napred uvedieme.

Majme príklad. V množine R graficky riešme kvadratickú rovnicu.

$$x^2 - x - 2 = 0 ;$$

Riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $x^2 = x + 2$ a rozložíme na dve rovnice

$$y = x^2 \wedge y = x + 2$$

Funkcie dané týmito rovnicami graficky znázorníme na karteziánskom grafe a odmeriame prvé súradnice priesečníkov. V našom prípade priamka má s parabolou spoločné dva body, teda je sečnicou paraboly. Daná rovnica má dva korene $\mathbf{x_1 = -1}$; $\mathbf{x_2 = 2}$;

Riešenie je znázornené na obrázku.

Vlastnosti koreňov kvadratickej rovnice

Súčet a súčin koreňov kvadratickej rovnice.

Vieme, že korene kvadratickej rovnice v normovanom tvare

$$x^2 + px + q = 0$$

dostaneme zo vzorcov $x_1 = -\dfrac{p}{2} + \sqrt{D}$, $x_2 = -\dfrac{p}{2} - \sqrt{D}$

Kde $D = \dfrac{p^2}{4} - q$

Teraz utvorme súčet a súčin obidvoch koreňov.

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) = -p$$

$$x_1 . x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) . \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) = \frac{p^2}{4} - D = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q$$

Tak dostaneme vzorce

$$\mathbf{x_1 + x_2 = -p}$$

$$\mathbf{x_1 x_2 = q}$$

Ktoré vyjadruje veta:

Veta 1.

Súčet koreňov kvadratickej rovnice normovaného tvaru je číslo opačné ku koeficientu lineárneho člena; súčin jej koreňov sa rovná absolútnemu členu. Platí to i obrátene.

Veta 2.

Ak čísla $x_1, x_2 \in R$ spĺňajú podmienky $x_1 + x_2 = -p$, $x_1.x_2 = q$, tak sú koreňmi rovnice $x^2 + px + q$.

Dôkaz. Dosaďme do rovnice $x^2 + px + q$ za p, q výrazy $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1x_2$.

Dostaneme $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

Ďalej

$$x^2 - x_1x_2 - x_2x + x_1x_2 = 0$$
$$(x - x_1)x - x_2(x - x_1) = 0$$
$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Poslednej rovnici, a teda i rovnici $x^2 + px + q$, vyhovujú čísla $x = x_1$ a $x = x_2$ a žiadne iné. Tým sme vetu dokázali. Obidve vety možno vyjadriť v tvare ekvivalencie:

Čísla $x_1, x_2 \in R$ sú korene rovnice $x^2 + px + q = 0$ práve vtedy, keď pre ne platia vzťahy $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x = q$.

Ak kvadratická rovnica má všeobecný tvar

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

tak $p = \dfrac{b}{a}$, $q = \dfrac{c}{a}$

a vzťahy pre korene rovníc sú vyjadrené vzorcami

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Uvedené vlastnosti koreňov kvadratickej rovnice môžeme využiť pri riešení niektorých jednoduchších rovníc.

Ak sú známe korene x_1 a x_2 potom môžeme zostaviť kvadratickú rovnicu.

Sledujte postup riešenia :

Poznáme korene rovnice $x_1 = \dfrac{1}{3}$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$; Potom platí:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3} = x^2 - x + \frac{2}{9} = 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

alebo

$$(x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} = 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

Príklad. Určime korene rovnice $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Riešene. Hľadáme čísla x_1, x_2, pre ktoré platí

$$x_1 + x_2 = -2 ; \qquad x_1x_2 = -15 ;$$

Pretože $-15 = -5 \cdot 3$, a $-2 = -5 + 3$ stoho vyplýva, že $x_1 = -5$; $x_2 = 3$;

Tieto vzťahy možno využiť na rýchle vykonávanie skúšky správnosti kvadratických rovníc.

Majme rovnicu: $x^2 - 6x + 8 = 0$;

Pre normovaný tvar rovnice platí $p = -6$; $q = 8$;

Potom musí platiť $8 = x_1x_2$, $-(-6) = 6 = x_1 + x_2$

Z uvedených možností zostavíme tvary

$$8 = (+1)(+8) = (-1)(-8) = (+2)(+4) = (-2)(-4)$$

z čoho vznikne $8 = (+2)(+4) = x_1x_2$; $6 = (+2)(+4) = x_1 + x_2$;

Rovnica $x^2 - 6x + 8 = 0$ ma teda korene $x_1 = 2$; $x_2 = 4$;

Ukážme si ešte jeden príklad.
Riešme v množine R rovnicu $x^2 - 3{,}58x + 2{,}856 = 0$ a urobme skúšku.

Riešenie. Rovnicu riešime podľa vzorca

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

v ktorom $p = -3{,}58$, $q = 2{,}856$;

potom dostaneme $x_{1,2} = 1{,}79 \pm \sqrt{3{,}2041 - 2{,}856} = 1{,}79 \pm \sqrt{0{,}3481} = 1{,}79 \pm 0{,}59$

korene rovnice sú $x_1 = 2{,}38$, $x_2 = 1{,}2$;

Skúška. $x_1 + x_2 = 2{,}38 + 1{,}2 = 3{,}58 = -p$

$x_1x_2 = 2{,}38 \,.\, 1{,}2 = 2{,}856 = q$

Skúška potvrdila správnosť riešenia.

Rozklad kvadratických trojčlenov

Z dôkazu vlastností koreňov $\mathbf{x_1, x_2}$ rovnice $x^2 + px + q = 0$, ktorý sme vykonali v predchádzajúcom článku, vyplýva, že platí

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$ sa teda dá vyjadriť ako súčin dvoch lineárnych činiteľov $x - x_1$ a $x - x_2$; nazývame ich **koreňové činitele.**
Napríklad kvadratický trojčlen $x^2 + 2x - 15$, o ktorom vieme, že nulové hodnoty nadobúda pre $x = -5$, a $x = 3$, môžeme písať v tvare

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

Ak kvadratický trojčlen má všeobecný tvar $ax^2 + bx + c$, možno ho upraviť na tvar

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ (alebo aj nulové body trojčlena $ax^2 + bx + c$).

Príklad: Rozložme na súčin lineárnych činiteľov trojčlen

$$20x^2 - x - 12,$$

Riešenie: Rovnica $20x^2 - x - 12 = 0$ má, ako môžeme zistiť použitím vzorca na výpočet koreňov kvadratickej rovnice, korene

$$x_1 = -\frac{3}{4}, \qquad x_2 = \frac{4}{5};$$

Teda platí

$$20x^2 - x - 12 = 20(x + \frac{3}{4})(x - \frac{4}{5}) = 20.\frac{4x+3}{4}.\frac{5x-4}{5} = (4x + 3)(5x - 4)$$

Rovnosť $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ možno využiť aj pri zostavovaní kvadratickej rovnice, keď poznáme jej korene.

Sústava kvadratickej a lineárnej rovnice

Riešenie sústavy kvadratickej a lineárnej rovnice s dvoma neznámymi.

Výroková forma s dvoma premennými je

$$V(x, y) : ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Kde $a, b, c, d, e, f \in R$, pričom aspoň jedno z čísel a, b, c je rôzne od nuly,
Nazývame kvadratickou rovnicou s dvoma neznámymi x, y.
Takouto rovnicou je teda napríklad rovnica

$$3x^2 - 7xy + 4y^2 - 5x - 28 = 0$$

Ak k danej kvadratickej rovnici pripojíme ešte ďalšiu rovnicu s dvoma neznámymi, ktorá je lineárna alebo kvadratická, dostaneme **kvadratickú sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi.**

Ak je oborom každej z obidvoch rovníc sústavy množina R, oborom sústavy je množina R x R. Riešiť túto sústavu (v množine R x R) znamená určiť jej obor pravdivosti P, čiže množinu všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y] \in R \times R$, ktoré vyhovujú súčasne obidvom rovniciam. Ak P_1, P_2 sú obory pravdivosti jednotlivých rovníc sústavy, tak $P = P_1 \cap P_2$.

Ďalej sa budeme zaoberať sústavami dvoch rovníc s dvoma neznámymi, z ktorých jedna je kvadratická a druhá lineárna.

Tak ako pri riešení sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi aj v tomto prípade používame ekvivalentné úpravy rovníc, pri ktorých daná i novovzniknutá sústava majú rovnakú množinu riešení(obidve sústavy sú ekvivalentné). Zvyčajne postupujeme tak, že z lineárnej rovnice vyjadríme jednu neznámu a výraz, ktorý pre túto neznámu dostaneme, dosadíme do kvadratickej rovnice. Podrobnejšie si tento postup ukážeme na príkladoch. Riešiť budeme v množine R x R.

Príklad: V množine R x R riešme sústavu rovníc

$$.x^2 - 2y^2 - 2x + 3y = 1$$
$$x + y = 3$$

Riešenie: Z danej rovnice vyjadríme y. Dostaneme sústavu ekvivalentnú s danou sústavou:

$$.y = 3 - x$$
$$.x^2 - 2y^2 - 2x + 3y = 1$$

Výraz $3 - x$ dosadíme za y do druhej (kvadratickej) rovnice. Dostaneme sústavu

$$.x^2 - 2(3 - x)^2 - 2x + 3(3 - x) = 1$$
$$.y = 3 - x$$

po úprave dostaneme $.x^2 - 7x + 10 = 0$

$$.y = 3 - x$$

Kvadratická rovnica tejto sústavy má korene $x_1 = 2$; $x_2 = 5$. Z lineárnej rovnice potom vyplýva $y_1 = 1$, $y_2 = -2$;
Pretože pri riešení sme použili ekvivalentné úpravy, je obor pravdivosti danej sústavy
$P = \{ [2, 1], [5, -2]\}$.

Skúška: (Pretože sme použili len ekvivalentné úpravy, v tomto prípade má skúška povahu kontroly numerických výpočtov.)
Ak označíme $A_1(x, y)$, $A_2(x, y)$ ľavé strany daných rovníc, $B_1(x, y)$, $B_2(x, y)$ ich pravé strany, po dosadení dostaneme:

$$A_1(2, 1) = 2^2 - 2.1^2 - 2.2 + 3.1 = 1 = B_1(2, 1)$$

$$A_2(2, 1) = 2 + 1 = 3 = B_2(2, 1)$$

$$A_1(5, -2) = 5^2 - 2.(-2)^2 - 2.5 + 3.(-2) = 1 = B_1(5, -2)$$

$$A_2(5, -2) = 5 + (-2) = 3 = B_2(5, -2)$$

Príklad. V množine R x R riešme sústavu rovníc

$$4x^2 - 9x^2 = 36$$
$$5x + 6y - 9 = 0$$

Riešenie: Z lineárnej rovnice vyjadríme y a dosadíme do kvadratickej rovnice. Postupne dôjdeme k sústave :

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$y = \frac{-5x + 9}{6}$$

z toho $x = 5$ (jediný , dvojnásobný koreň) $y = -\frac{8}{3}$

Pri riešení sme použili len ekvivalentné úpravy. Obor pravdivosti danej sústavy je

$$P = \{ [5, -\frac{8}{3}]\}$$

Urobte skúšku správnosti riešenia.

Príklad. V množine R x R riešme sústavu rovníc

$$x^2 + 3y^2 = 5$$
$$x - 2y = 7$$

Riešenie: Dosadením $x = 2y + 7$ z druhej do prvej rovnice dostaneme rovnicu

$$7y^2 + 28y + 44 = 0$$

čo je kvadratická rovnica so záporným diskriminantom

$$D = 28^2 - 4 \,.\, 7 \,.\, 44 = -448$$

Táto rovnica nemá v množine R nijaký koreň. Teda ani daná sústava nemá v množine R x R nijaké riešenie : jej obor pravdivosti je

$$P = 0.$$

Príklad: V množine R x R riešme sústavu rovníc

$$-\quad 2x + y = 5$$
$$2xy + 10x - y^2 + 25 = 0$$

Riešenie : Dosadením $y = 2x + 5$ z prvej rovnice do druhej rovnice sústavy dostaneme rovnicu

$$0 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x = 0$$

Tejto rovnici vyhovuje každé reálne číslo x. Preto riešením danej sústavy sú všetky dvojice

$$x = m, \quad y = 2m + 5$$

kde m je ľubovoľné reálne číslo, oborom pravdivosti sústavy je množina

$$P = \{ [m, n] \in R \times R \,;\; n = 2m + 5\}$$

Urobte skúšku.

Slovné úlohy

Slovné úlohy, ktoré sa riešia jednou kvadratickou rovnicou.

Postup pri riešení slovných úloh, ktoré sa riešia kvadratickými rovnicami, je podobný ako v prípade slovných úloh, ktoré sa riešia lineárnymi rovnicami. Často ani nemôžeme vopred určiť, akým typom rovnice sa bude slovná úloha riešiť.

Za príklad si zvolíme úlohu: Za aký čas dosiahne strela vystrelená rýchlosťou 500 ms^{-1} zvisle nahor výšku 3680 m ? Odpor vzduchu zanedbáme a g = 10 ms^{-2}.

Riešenie. Z fyziky vieme, že dráhu vrhu zvisle nahor je daná vzorcom

$$.s = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

kde v_0 je začiatočná rýchlosť, g je gravitačné zrýchlenie, t je čas.

V našom prípade s = 3680 m, v_0 = 500 ms^{-1}, g = 10 ms^{-2} ; neznámou je čas t v sekundách. Po dosadení číselných hodnôt do vzorca dostaneme rovnicu

$$.7360 = 500t - \frac{1}{2}10t^2$$

$$.7360 = 1000t - 10t^2$$

$$t^2 - 100t + 736 = 0$$

Rovnica je kvadratická v normovanom tvare, ktorej oborom je množina $M = R^+$. Korene rovnice sú $t_1 = 8$, $t_2 = 92$. Platí $t_1 \in M$, $t_2 = \in M$. Danej úlohe vyhovujú oba korene, o čom sa môžeme presvedčiť skúškou. Strela dosiahne výšku 3680 m najskôr za 8 sekúnd, keď strela letí hore , potom padá dolu a výšku 3680 metrov dosiahne za 92 sekúnd.

Teraz uvedieme ďalší príklad: Obsah štvorca zmenšíme jeden raz o 7m^2, druhý raz o 15m^2. Ak premeníme každý z obidvoch nových obrazcov na štvorec, tak súčet dĺžky strany prvého a dĺžky strany druhého štvorca sa rovná dĺžke strany pôvodného štvorca. Aký je obsah daného štvorca?

Riešenie: Nech obsah daného štvorca je xm^2, $x \in R^+$. Obsahy obidvoch menších štvorcov potom sú (x – 7)m^2 a (x – 15)m^2, veľkosti strán týchto štvorcov sú

$$\sqrt{x - 7}\,m \text{ a } \sqrt{x - 15}\,m .$$

Podľa podmienky úlohy platí rovnica

$$\sqrt{x - 15} = \sqrt{x} - \sqrt{x - 7}$$

Úpravami rovnice neznámej v odmocnenci dostaneme

$$3x^2 - 44x - 64 = 0$$

Táto obecná kvadratická rovnica má dva reálne korene $x_1 = 16$, $x_2 = -\frac{4}{3}$,

Pretože neznámou je obsah štvorca, ktorý nemôže byť záporný, číslo druhého koreňa nemôže byť riešením danej úlohy.

Ak dosadíme prvý koreň za neznámu dostaneme

$$\sqrt{16 - 15} + \sqrt{16 - 7} = \sqrt{16}$$

$$\sqrt{1} + \sqrt{9} = \sqrt{16}$$

$$1 + 3 = 4$$

$$4. = 4$$

Súčet strán obidvoch menších štvorcov je 3m + 1m = 4m; a tento súčet sa skutočne rovná veľkosti strany pôvodného daného štvorca. Daný štvorec má obsah $16 m^2$.

Slovné úlohy, ktoré sa riešia sústavou kvadratickej a lineárnej rovnice.

Príklad: Výslednica dvoch síl, ktoré pôsobia v pravom uhle, má veľkosť 34N.Určte veľkosť síl, keď jedna má veľkosť o 1N väčšiu ako je jedna polovica druhej sily.

Riešenie: Nech dané sily sú $F_1 = x N$, $F_2 = y N$. Ich výslednica je

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{x^2 + y^2}\ N$$

Teda platí sústava rovníc (jednej kvadratickej a jeden lineárnej)

$$.x^2 + y^2 = 34^2$$

$$x = \frac{y}{2} + 1$$

ktorej oborom je množina $R^+ \times R^+$; po jej úpravách dostaneme rovnicu

$$5x^2 - 8x - 1152 = 0$$

táto rovnica má v R^+ jediný koreň $x_1 = 16$. Keď dosadíme túto hodnotu za x do druhej rovnice sústavy, dostaneme

$$y_1 = 2x_1 - 2 = 2 \,.\, 16 - 2 = 30$$

Obor pravdivosti sústavy obidvoch rovníc je teda $P = \{[16; 30]\}$.
Veľkosti síl $F_1 = 16N$, $F_2 = 30N$ vyhovujú aj podmienkam danej slovnej úlohy.

Odpoveď: Veľkosti síl sú 16N a 30N.

Majme príklad: V obvode, ktorým prechádza pri napätí 220 V prúd 4 A, sú paralelne zapojené dva odpory. Ak ich zapojíme do série, klesne prúd na 1 A. Aké veľké sú tieto odpory?

Riešenie: Označme prvý odpor $R_1 = x\ \Omega$, druhý $R_2 = y\ \Omega$. Pre celkový odpor R_p paralelne zapojených odporov a celkový odpor R_s sériovo zapojených odporov R_1, R_2 platia vzťahy, ktoré sú nám známe z fyziky.

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \qquad R = R_1 + R_2$$

V našom prípade $R_p = \frac{U}{I_1}$, kde $U = 220$, $I_1 = 4$ A, t. j.

$$R_p = \frac{220}{4}\ \Omega = 55\ \Omega$$

$R_s = \frac{\quad}{\quad}$, kde $U = 220$ V, $I_2 = 1$ A, t, j,

$$R_s = \frac{220}{1}\ \Omega = 220\ \Omega$$

Pre neznáme x, y dostaneme sústavu rovníc

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{55}$$

$$.x + y = 220$$

po úprave dostaneme $55x + 55y = xy$

$$.x + y = 220$$

Oborom sústavy je zrejme množina $M = R^+ \times R^+$.
Dosadením $y = 220 - x$ do prvej rovnice sústavy dostaneme kvadratickú rovnicu

$$.x^2 - 220x + 12\,100 = 0$$

s dvojnásobným koreňom $x = 110$.

Zodpovedajúca hodnota druhej neznámej je

$$.y = 220 - 110$$

$$.y = 110.$$

Pretože dvojica $[\,x, y\,] = [\,110, 110\,] \in M = R^+ \times R^+$, obor pravdivosti sústavy je $P = \{[110; 110]\}$.

Z toho vyplývajúce hodnoty odporov $R_1 = 110\ \Omega$ a $R_2 = 110\ \Omega$ vyhovujú podmienkam úlohy.

Odpoveď: Odpory, ktoré sú zaradené do obvodu, majú veľkosť $R_1 = 110\ \Omega$, $R_2 = 110\ \Omega$.