Limita funkcie

Jedným zo základných pojmov, ktorý má veľký význam nielen v matematickej analýze, ale aj v iných odvetviach matematiky, je pojem **limity funkcie**. Ako väčšina významných matematických pojmov nebol ani pojem limity určený najskôr jednoznačne, ale jeho formulácia sa postupne spresňovala v procese vývoja matematiky. Snáď najklasickejším prípadom je Archimedov postup pri výpočte plošného obsahu kruhu, a to postupným vpisovaním a opisovaním pravidelných **n – uholníkov**, ktorých plošné obsahy poznal. Už Eudoxos z Knidu a po ňom Euklides vychádzali pri porovnaní objemov ihlanu a hranolu z úvah, ktoré sa v podstate zakladali na limitách.

V matematike 17. storočia sa postupy pri výpočte plošných obalov a objemov rôznych tvarov veľakrát opakujú. Klasický je výrok známeho anglického matematika Isaaca Barrowa (1630 – 1677) : „Mohli by sme tieto postupy stále opakovať, ale aký by to malo zmysel ?

Definíciu limity postupnosti podal J.L.d´Alembert. Neskôr , na začiatku 19. storočia A.L.Cauchy definuje pojem limity funkcie v bode. Mimoriadne veľký prínos pre presný pojem limity a jej využitie boli práce českého matematika B. Bolzana. Bolzanovo dielo bolo správne zhodnotené až po roku 1921 po preštudovaní jeho rukopisu, ktorý bol dovtedy neznámy. V rukopise sú zachytené významné myšlienky, ktorými Bolzano výrazne predstihol svojích súčasníkov. Jeho výsledky ho zaraďujú na popredné miesto medzi svetových matematikov bádateľov.

Francúzky matematik Henri Cartan zaviedol pojem filtra. Pomocou toho pojmu bol definovaný pojem limity, ktorý poskytuje jednotný pohľad na dosial známe limitné procesy, ale aj také, ktoré sa na pohľad nezdajú byť limitou napr. supremum usporiadanej množiny.

Pojem limity funkcie

V niektorých funkciách sa stáva, že keď argument **x** funkcie **y = f(x)** sa stále viac blíži určitému číslu **a**, blížia sa príslušné funkčné hodnoty **f(x)** bez obmedzenia určitému číslu **A**. V takomto prípade hovoríme, že funkcia **f(x)** má limitu **A** pre **x** blížiace sa číslu **a**, ktorú zapisujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Slovo „ blíži sa bez obmedzenia“ znamená, že rozdiel **f(x) – A,** prípadne **A – f(x)** môže byť ľubovoľne malý, to znamená, že menší ako vopred zvolené malé kladné číslo **k**. Z toho hneď vyplýva podmienka pre limitu funkcie:

Ak lim f(x) = A, potom platí

$$\left| f(x) - A \right| < k \qquad (\mathrm{I})$$

Pre všetky $x \neq a$ z nejakého okolia **J(a)** čísla **a**. V podstate to znamená, že k ľubovoľnému okoliu **J(A)** čísla **A** (limity funkcie) sa dá nájsť okolie **J(a)** čísla **a** (limity argumentu) tak, aby podmienka (I) bola splnená . Okolie **J(A)** je interval **(A– k; A + k)**, kde **k** > **0** je ľubovoľne malé vopred zvolené číslo. Okolie **J(a)** je interval **(a – h; a + h)**, kde **h** > **0** je číslo závislé od čísla **k**. Znak absolútnej hodnoty v uvedenej podmienke píšeme preto, aby sme nemuseli rozlišovať, či sa blíži f(x) číslu A od hodnôt menších ako A alebo od hodnôt väčších ako A. Zavedený pojem si objasníme na jednoduchom príklade.

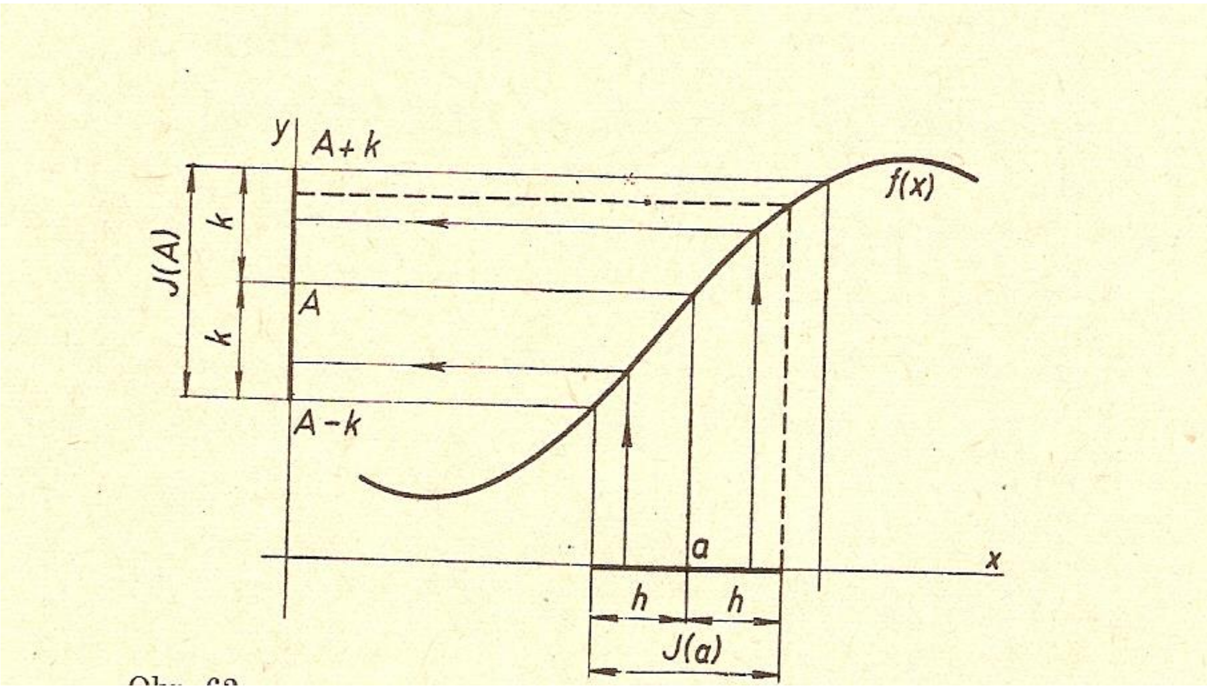
2. Príklad 1. máme dokázať: $\lim_{x \to 5} (4x - 12) = 8$

Riešenie: V tomto prípade $f(x) = 4x - 12$, $a = 5$, $A = 8$.
Pri dôkaze vychádzame z podmienky (I).
Ak má platiť vzťah $|(4x - 12) - 8| < k$,
. ktorý po úprave môžeme zapísať $4|x - 5| < k$,
. stačí ak bude $|x - 5| < \dfrac{k}{4} = h$

Tým sme vlastne dôkaz uskutočnili, lebo k ľubovoľnému okoliu J(A) čísla A, v našom prípade k okoliu $(8 - k; 8 + k)$, sme vyhľadali príslušné okolie J(a) čísla a, v našom prípade okolie $(5 - h; 5 + h)$ tak, že podmienka (I)je splnená. Napr. pre $k = 0{,}02$ sa

. $h = \dfrac{k}{4} = 0{,}005$, $J(A) \equiv (7{,}98; 8{,}02)$, $J(a) \equiv (4{,}995; 5{,}005)$, takže pre všetky $x \neq 5$ z intervalu $(4{,}995; 5{,}005)$ padnú príslušné funkčné hodnoty f(x) do intervalu $(7{,}98; 8{,}02)$ a líšia sa od čísla 8 (svojej limity) o hodnotu menšiu ako $k = 0{,}02$. Ak chceme vyhľadať funkčné hodnoty ešte bližšie k číslu 8, volíme číslo k stále menšie a menšie.

Aj grafické znázornenie môže prispieť k lepšiemu pochopeniu podmienky pre limitu funkcie. Obrázok znázorňuje obidve okolia J(A) a J(a) a graficky ukazuje, že pre $x \neq a$ z J(a) padnú čísla f(x) do J(A), takže platí $|f(X) - A| < k$.



Teraz uvedieme definíciu limity funkcie iným spôsobom.

Nech je funkcia **f** definovaná pre všetky $\mathbf{x \neq a}$ z niektorého okolia bodu **a**. Potom hovoríme, že funkcia **f** má v bode **a** limitu **b**, ak pre každú postupnosť $\{\mathbf{x_n}\}$ spĺňajú podmienky

$$x_n \in D(f),\ x_n \neq a,\ \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

má odpovedajúca postupnosť funkčných hodnôt {f(x)} limitu b.
Ak má funkcia f v bode **a** limitu **b**, tak to zapisujeme ako

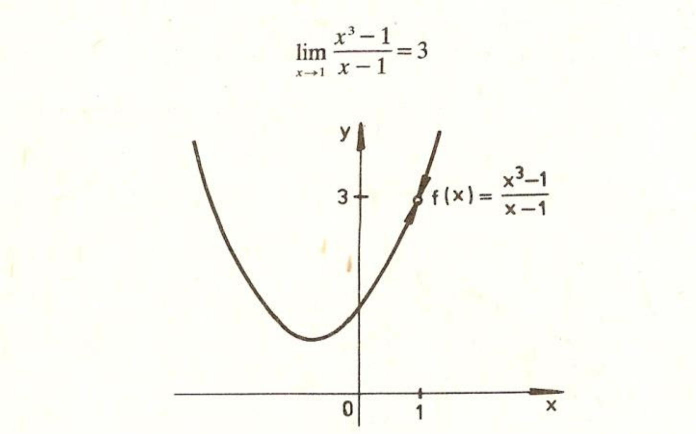
$$\lim f(x) = b$$

Teda $\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow [\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b]$

Krátko povedané : Pre hodnoty **x** málo odlišné od **a**(ale rôzne od a) sú hodnoty f(x) málo odlišné od **b**. A všimnime si, že v definícii limity funkcie v bode **a** sa predpokladá, že $\mathbf{x_n \neq a}$ To znamená, že sa vôbec nehovorí o hodnote funkcie f(a) v samotnom bode **a**. Teda existencia ani hodnota limity funkcie f v bode **a** nezávisí od hodnoty f(a), dokonca ani od toho, či f(a) je vôbec definované alebo nie.

Príklad 2. Dokážeme, že funkcia $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ má v bode a = 1 limitu b = 3 to znamená, že

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$



Obr. 5.3

Hoci v bode a = 1 táto funkcia nie je definovaná. Nech $\{x_n\}$ je ľubovoľná postupnosť, spĺňajúca podmienky

$$x_n \neq 1, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

Dokážeme, že odpovedajúca postupnosť $\{f(x_n)\}$ má limitu 3, to znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 3$$

Vydelíme polynóm $x^3 - 1$ polynómom $x - 1$. Dostaneme

$$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$$

Teda pre $x \neq 1$ $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$.

Funkcie určené výrazmi $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, $\varphi(x) = x^2 + x + 1$

sú rôzne. Prvá z nich je definovaná pre $x \neq 1$ a druhá pre všetky x . $\varphi(1) = 3$, $f(1)$ nemá zmysel. Pre $x \neq 1$ sa však $f(x) = \varphi(x)$, a teda

$$f(x_n) = \varphi(x_n) = x^2 + x + 1$$

Pretože $x_n \neq 1$ pre všetky n. Ak $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, tak $\lim_{n\to\infty} x^2_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) (\lim_{n\to\infty} x_n) = 1 . 1 = 1.$

Na základe toho a vety 10 v postupnosti čísel dostaneme.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x^2_n + x_n + 1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Pri výpočte tejto limity sme o postupnosti $\{x_n\}$ predpokladali iba to , že $x_n \neq 1$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.
Teda pre každú postupnosť $\{x_n\}$, ktorá spĺňa podmienky $x \neq 1$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, sa $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 3$.

To znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Teda v tom prípade

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 3, \ f(1) \text{ však nie je definovaná.}$$

Príklad 3. Funkcia $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$ je definovaná v každom bode $x \neq 0$. Ukážeme, že hoci daná funkcia v bode $x = 0$ nie je definovaná, má v tomto bode limitu. Nech $\{x_n\}$ je ľubovoľná postupnosť taká, že $x_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Uvažujme k nej zodpovedajúcu postupnosť funkčných hodnôt

$$\{f(x_n) = \{x_n \cos \frac{1}{x_n} \}$$

Potom by malo platiť

$$0 \leq \left| x_n \cos \frac{1}{x_n} \right| = |x_n| \left| \cos \frac{1}{x_n} \right| \leq |x_n| . 1 = |x_n|$$

To znamená, že $0 \leq \left| x_n \cos \frac{1}{x_n} \right| \leq \left| x_n \right|$

Ale podľa predpokladu $\lim x_n = 0$, a teda podľa vety 5. aj $\lim_{n\to\infty} \left| x_n \right| = 0$. Z toho a z vety .o limite troch postupností vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} \left| x_n \cos \frac{1}{x_n} \right| = 0$$

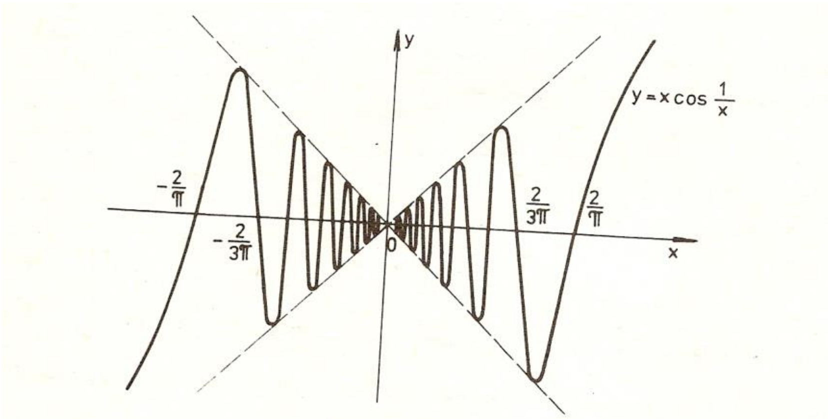
.a teda na základe vety 5. (veta 5. je o limite postupnosti) $\lim_{n\to\infty} x_n \cos \frac{1}{x_n} = 0$

Tým sme dokázali, že $\lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$. čo je vidieť na obrázku

Príklad 4. Vychádzajúc z Cauchyho definície dokážeme, že

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Treba teda dokázať toto: Ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre $0 < \left| x - 0 \right| < \delta$ platí $\left| \cos x - 1 \right| < \varepsilon$.



Obr. 5.4

Zvoľme si ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Hľadajme príslušné $\delta > 0$. Vieme, že

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

. z čoho dostaneme

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad , \qquad \cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

teda $\left|\cos x - 1\right| = \left|-2\sin^2\frac{x}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x}{2}\right| \le 2\left|\frac{x}{2}\right|\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{x^2}{2}$

K zvolenému číslu $\varepsilon > 0$ hľadáme také číslo $\delta > 0$, aby pre $0 < |x| < \delta$ bolo

$$\left|\cos x - 1\right| \le \frac{x^2}{2} < \varepsilon$$

Vidíme, že môžme položiť $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$. Skutočne, ak je $0 < |x| < \sqrt{2\varepsilon} = \delta$

tak $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$, to znamená, že $|\cos x - 1| < \varepsilon$

Platí teda $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Podobne môžeme dokázať, že $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Základné vety o limite funkcie.

Špeciálnym prípadom definície limity funkcie je definícia limity postupnosti, ak uvážime, že postupnosť je funkcia definovaná na **N** a že hromadným bodom množiny **N** (a to jediným) je bod $+\infty$. Ak použijeme definíciu limity funkcie na postupnosť ľahko zistíme, že nedostaneme nič iného než definíciu limity funkcie na postupnosti.

V uvedených jednoduchých príkladoch sme mohli hodnotu limity intuitívne odhadnúť a dôkazom iba potvrdiť správnosť tohto odhadu. Nezaoberali sme sa však otázkou, či každá funkcia má v každom bode (ktorý je hromadným bodom definičného oboru) limitu, či môže mať v danom bode viac limit.

Z Heineho definície limity funkcie a z viet 3. , 4. , 6. , a 7. z postupnosti čísel vyplývajú tieto vety.

Veta 1. Funkcia f môže mať v bode **a** najviac jednu limitu

Veta 2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} [\, f(x) - b \,] = 0.$

Príklad 5. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, a teda $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x - 1) = 0$

Vlastnosť „funkcia f má v bode **a** limitu“ je lokálna vlastnosť funkcie – závisí na priebehu funkcie v bodoch ľubovoľne blízkych bodu **a**.

Veta 3. Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a nech existuje také okolie $U_\varepsilon(a)$, že pre všetky $x \in U_\varepsilon(a)$, $x \ne a$, je $c_1 \le f(x) \le c_2$. Potom platí $c_1 \le b \le c_2$.

Veta 4. (veta o limite troch funkcii). Ak $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b$ a ak existuje také okolie U(a) bodu **a**, že pre všetky $x \in U(a)$, $x \ne a$, je

$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$, tak $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Príklad 6. Nech $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $a = 0$. Máme zistiť, či existuje $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

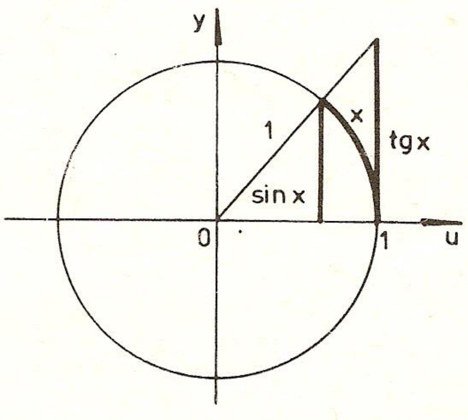
Pre každé x platí $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \le 1$

teda $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \le |x|$

to znamená, že $-|x| \le x \sin \frac{1}{x} \le |x|$

Ale $\lim_{x \to 0} (-|x|) = \lim_{x \to 0} |x| = 0$, a teda $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

Príklad 7. Nech $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $a = 0$. Treba zistiť či existuje $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.



Obr. 5.8

Z obrázku je vidieť, že pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = U_{\pi/2}(0)$, $x \ne 0$

je $|\sin x| < |x| < |\text{tg}\, x|$, $|\sin x| > 0$, z čoho dostaneme

$$1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{|\text{tg}\, x|}{|\sin x|}$$

to znamená, že

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\sin x}\right|$$

Ale pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$ je $\frac{x}{\sin x} > 0$, $\cos x > 0$, a teda

$$\left|\frac{x}{\sin x}\right| = \frac{x}{\sin x}, \qquad |\cos x| = \cos x$$

Na základe toho dostaneme

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

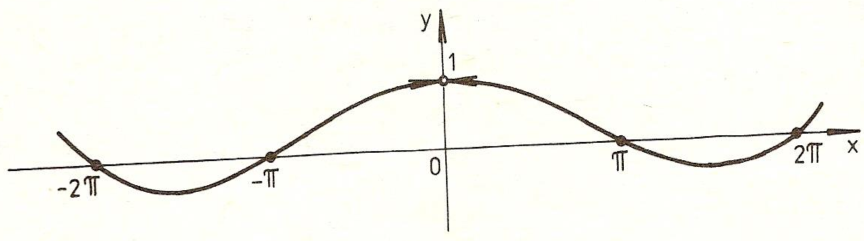
to znamená, že

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Vieme, že $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, a teda platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (1)$$

Graf funkcie $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je na obrázku



Obr. 5.9

Pomocou vzorca (1) tiež dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Tu sme už použili vetu, ktorá je dôsledkom Heineho definície limity funkcie a vetu o konvergencii postupnosti.

Veta 5. Ak $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$, tak

1) $\lim\limits_{x\to a} [f_1(x) + f_2(x)] = b_1 + b_2$

2) $\lim\limits_{x\to a} [f_1(x)\, f_2(x)] = b_1 b_2$

3) ak okrem toho $b_2 \neq 0$, tak $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

Poznámka 1. V prípade, že f_2 je konštantná funkcia, to znamená, že $f_2(x) = k$, potom je zrejme, že $\lim f_2(x) = k$ a tvrdenie 2 má tvar 2a.

2a. Ak je k ľubovoľné číslo (konštanta) tak

$$\lim_{x\to a} [k f_1(x)] = k b_1$$

špeciálne, ak $k = -1$, máme $\lim\limits_{x\to a} [-f_1(x)] = -b_1$

Z toho a tvrdenia poznámky 1. vyplýva:

1a. $\lim [f_1(x) - f_2(x)] = b_1 - b_2$

Z poznámky 1. a 2a. vyplýva toto tvrdenie:

1b. Ak k_1, k_2 sú ľubovoľné čísla a $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$, tak

Je zrejmé, že tvrdenie 1b. a 2 môžeme metódou matematickej indukcie zovšeobecniť pre ľubovoľný konečný počet sčítancov, pripadne činiteľov.

Príklad 9. Dokázali sme, že $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

Potom platí

$$\lim_{x\to 0} \left(x\cos\frac{1}{x} + \cos x\right) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \left(x\cos\frac{1}{x}\ \cos x\right) = 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \left(x\cos\frac{1}{x}\ \cos x\right) = 0 \,.\, 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos 1/x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Príklad 10. Máme zistiť, či existuje limita $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + 3}$, a ak áno, čomu sa rovná.

Všeobecne platí $\lim_{x\to a} (kx^n) = ka^n$

$$\lim_{x\to a} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + ... + a_{n-1}a + a_n , \quad (2)$$

Teda v našom prípade $\lim_{x\to 1} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3$, $\lim_{x\to 1} (x^3 + 3) = 1^3 + 3 = 4$;

Teda podľa vety 5. platí $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + 3} = \dfrac{3}{4}$;

Príklad 11. Ak máme vypočítať limitu $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$, nemôžeme použiť vetu 5. pretože $\lim_{x\to 1} (x^3 - 1) = 1^3 - 1 = 0$.

V tom prípade sa však $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$

teda pre $x \neq 1$ platí $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

teda $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1} = \dfrac{1 + 1}{1^2 + 1 + 1} = \dfrac{2}{3}$;

Pri počítaní limit je často používaná veta 6., ktorú uvedieme bez dôkazu.

Veta 6. (veta o limite zloženej funkcie) Nech je

1) $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$, $\lim_{\mu\to b} f(\mu) = B$

2) existuje také okolie U(a) bodu **a** , že pre všetky $x \in U(a)$, $x \neq a$ sa $\varphi(x) \neq b$.
potom zložená funkcia $f(\varphi(x))$ má v bode **a** limitu a platí

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x) = \lim_{\mu\to b} f(\mu) = B$$

Príklad 12. Máme nájsť $\lim_{x\to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt[3]{(x - 1)} - 2}$

majme $\mu = \varphi(x) = \sqrt[3]{x - 1} - 2$

z čoho $\sqrt[3]{x - 1} = \mu + 2$

$x - 1 = (\mu + 2)^3$

$$x = (\mu + 2)^3 + 1$$

$$x - 9 = (\mu + 2)^3 - 8$$

Teda daná funkcia, ktorej limitu v bode x – 9 hľadáme môžeme považovať za **Zloženú funkciu** s hlavnou zložkou.

$$y = f(\mu) = \frac{(\mu + 2)^3 - 8}{\mu} = \mu^2 + 6\mu + 12$$

s vedľajšou zložkou

$$\mu = \varphi(x) = \sqrt[3]{x - 1} - 2$$

A zrejme platí $\lim\limits_{x\to 9} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 9} [\sqrt[3]{x - 1} - 2] = 0$

$$\lim f(\mu) = \lim (\mu^2 + 6\mu + 12) = 12$$

Pre všetky $x \neq 9$ sa $\varphi(x) = \sqrt[3]{x - 1} - 2 \neq 0$. Teda podľa vety 6. platí

$$\lim_{x\to 9} \frac{x - 9}{\sqrt[3]{x - 1} - 2} = \lim_{\mu\to 0} (\mu^2 + 6\mu + 12)$$

Príklad 13. Treba nájsť $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

majme $\mu = \sqrt{x + 1} - 1$

z čoho dostaneme

$$\sqrt{x + 1} = \mu + 1$$

$$x + 1 = \mu^2 + 2\mu + 1$$

to znamená, že $x = \mu^2 + 2\mu$

Danú funkciu môžeme teda považovať za **zloženú funkciu** s hlavnou zložkou

$$y = f(\mu) = \frac{\mu}{\mu^2 + 2\mu}$$

s vedľajšou zložkou $\mu = \varphi(x) = \sqrt{x + 1} - 1$

z čoho platí $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{x + 1} - 1) = 0$

 Limitu lim f(μ) nemôžeme počítať podľa vety 5., pretože menovateľ má limitu 0.

Ale $$\frac{\mu}{\mu^2 + 2\mu} = \frac{\mu}{\mu(\mu + 2)}$$

teda pre $\mu \neq 0$ platí $$f(\mu) = \frac{\mu}{\mu^2 + 2\mu} = \frac{1}{\mu + 2}$$

a teda $$\lim_{\mu\to 0} f(\mu) = \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{\mu + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

Okrem toho pre $x \neq 0$ sa $\varphi(x) = \sqrt{x + 1} - 1 \neq 0$. Podľa vety 5. teda platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x} = \lim_{\mu\to 0} \frac{\mu}{\mu^2 + 2\mu} = \frac{1}{2}$$

Poznámka 2. Túto limitu môžeme však nájsť jednoduchším spôsobom, lebo platí:

$$\frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{x + 1} - 1)(\sqrt{x + 1} - 1)}{x(\sqrt{x + 1} + 1} = \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x + 1} + 1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x + 1} + 1}$$

pre $x \neq 0$ platí $$\frac{\sqrt{x +1} - 1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x + 1} + 1}$$

teda $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x + 1} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Tu sme už mohli použiť vetu 5., pretože limita menovateľa druhého zlomku je číslo nerovnajúce sa nule.

Na základe Cauchyho definície limity funkcie dokážeme ešte dve vety.

Veta 7. Nech má funkcia f v bode **a** limitu. Potom existuje také okolie $U\delta(a)$, že $x \in U\delta(a)$, $x \neq a$, je $f(x) > 0$ $(f(x))) < 0$, ak $\lim_{x\to a} f(x) > 0$($\lim_{x\to a} f(x)) < 0$-

Dôkaz: Nech $\lim f(x) = b > 0$. To znamená, že ku každému číslu $\varepsilon > 0$, teda aj k číslu $\varepsilon = \frac{b}{2}$

existuje také číslo δ, že pre $0 < |x - a| < \delta$ platí

$$|f(x) - b| < \frac{b}{2}$$

to znamená, že $$-\frac{b}{2} < f(x) - b < \frac{b}{2}$$

. z toho vyplýva $f(x) > b - \dfrac{b}{2} = \dfrac{b}{2} > 0$ pre $0 < |x - a| < \delta$

Teda pre $x \in U_\delta(a)$, $x \neq a$ je $f(x) > 0$. Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b < 0$;

Veta 8. Nech funkcia $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}$ majú v bode **a** limitu a nech $\lim f_1(x) < \lim f_2(x)$.
Potom existuje okolie $U_\delta(a)$ také, že pre $x \in U_\delta(a)$, $x \neq a$ je $f_1(x) < f_2(x)$.

Dôkaz: Majme $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Potom asi platí

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} [\, f_1(x) - f_2(x)\,] = \lim_{x\to a} f_1(x) - \lim_{x\to a} f_2(x) < 0$$

Z toho a z predchádzajúcej vety vyplýva , že existuje také okolie $U_\delta(a)$, že pre
$x \in U_\delta(a)$, $x \neq a$, je $F(x) < 0$, to znamená, že $f_1(x) - f_2(x) < 0$, a teda $f_1(x) < f_2(x)$.

Limita v nevlastnom bode

V niektorých prípadoch sa stáva, že funkcia sa blíži k nejakej hodnote, keď argument rastie alebo klesá bez obmedzenia. Potom hovoríme o limite v nevlastnom čísle a zapisujeme ju v tvare

$$\mathbf{\lim_{x\to\infty} f(x) = A} \qquad \text{alebo} \qquad \mathbf{\lim_{x\to -\infty} f(x) = A}$$

Podmienky pre danú limitu:

Ak $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, platí $|f(x) - A| < k$ pre $x > L$ (I)

Ak $\lim f(x)$ % A, platí $|f(x) - A| < k$ pre $x < -L$ (II)

V oboch podmienkach je **k** ľubovoľne malé vopred zvolené kladné číslo a **L** je kladné číslo závislé od čísla **k**.

Príklad 14. Dokážte, že a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Riešenie: a) Podľa (I) ma platiť $\left|\dfrac{1}{x}\right| <$ pre $x > L$. Pretože je $x > 0$, $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{x}$

a podmienka (I) bude $\dfrac{1}{x} < k$, z čoho vyplýva $x > \dfrac{1}{k} = L$.

Možno teda k ľubovoľnému **k** nájsť číslo L a podmienka (I) je splnená.

b) Podľa (II) má platiť $\left|\frac{1}{x}\right| < k$ pre $x < -L$. Pretože je $x < 0$, $\left|\frac{1}{x}\right| = -\frac{1}{x}$

a podmienka (II) bude $-\frac{1}{x} < k$, z čoho postupne vyplýva : $\frac{1}{x} > -k$,

$1 < -kx$, $x < -\frac{1}{k} = -L$. Možno teda k ľubovoľnému **k** nájsť číslo **– L**

a podmienka (II) je splnená.

Príklad 15. Dokážte, že pre $0 < a < 1$ sa $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$.

Riešenie: Podľa (I) má platiť $|a^x| < k$ pre $x > L$. Pretože je $a > 0$, $|a^x| = a^x$
a podmienka (I) bude $a^x < k$. Z toho vyplýva $x \log a < \log k$, a ak delíme
nerovnosť číslom $\log a < 0$ (alebo je $a < 1$), dostaneme

$x > \frac{\log k}{\log a} = L$. K číslu k sme našli číslo L a podmienka (I) je splnená.

Napr. pre $a = 0{,}5$, $k = 10^{-6}$ sa $L = \frac{\log k}{\log a} = \frac{-6}{-0{,}3} = 20$, takže pre $x > 20$ sú
hodnoty $0{,}5^x < 10^{-6}$

Nevlastná limita funkcie

V definícii limity funkcie písmená **a, b** označujú čísla. Ak v tejto definícii nahradíme všade písmeno **a** alebo **b** symbolom ∞ **,** prípadne –∞**,** dostaneme definíciu **nevlastnej limity funkcie v bode a**, ktorá znie:

Nech funkcia f definovaná pre všetky $x \neq a$ z niektorého okolia bodu **a**. Hovoríme, že funkcia f má v bode **a** nevlastnú limitu ∞ prípadne – ∞, ak podmienky

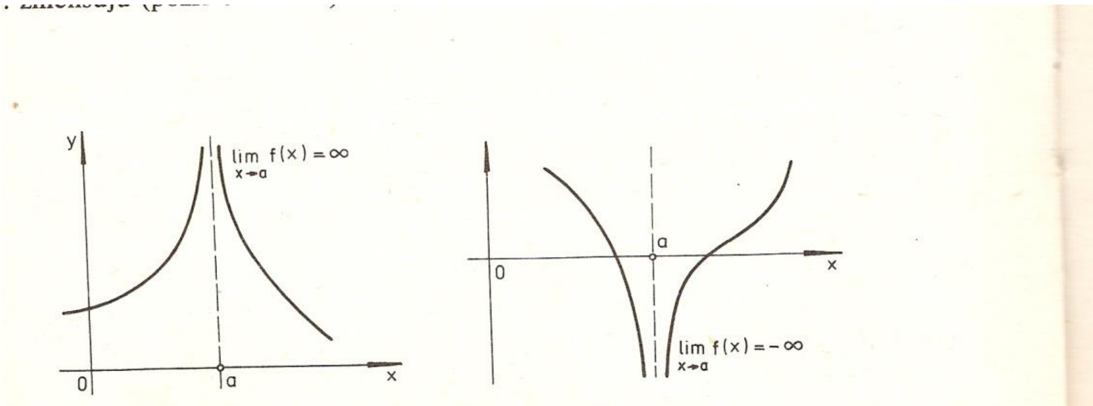
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$, vyplýva vždy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \infty$, prípadne $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = -\infty$.

Píšeme pritom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, prípadne $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, teda

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \leftrightarrow [\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq a \rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x) = \infty]$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \leftrightarrow [\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq a \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x) = -\infty\ ]$

Približne povedané : Symbol $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, prípadne $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ znamená, že ak sa **x** približuje k číslu (bodu) **a** (ale sa nerovná **a**) hodnoty f(x) sa stále viac zväčšujú alebo zmenšujú ako to vidieť na obr.



Obr. 5.10

Príklad 16. Dokážte, že funkcia $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ má v bode a = 0 nevlastnú limitu ∞, to

to znamená, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Riešenie: Nech $\{x_n\}$ je ľubovoľná postupnosť taká, že $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Treba dokázať, že k nej patriaca postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\} = \{\dfrac{1}{x^2_n}\}$

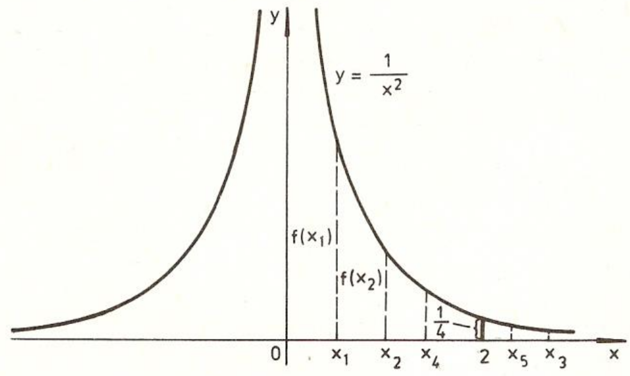
má nevlastnú limitu ∞, to znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^2_n} = \infty$, ak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Skutočne, ak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, tak aj $\lim\limits_{n\to\infty} x^2_n = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = 0$ a na základe

vety 4. z postupnosti čísel dostaneme

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^2_n} = \infty$, pretože $x^2_n > 0$.

Teda skutočne $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^2_n} = \infty$



Obr. 5.1

Poznámka 3. Podobne ako limite postupnosti sa aj limite funkcie v bode **a** hovorí **vlastná limita** aby sa odlišovala od **nevlastnej limity.**

Opierajúc sa o vety o nevlastnej limite postupnosti (veta 14) možno dokázať tieto tvrdenia.

Veta 9. a) Ak $\lim_{x\to a} f_1(x) = b > 0$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = 0$ a pre každé $x \neq a$ z niektorého okolia bodu **a** platí $f_2(x) > 0$, ($f_2(x) < 0$) tak

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty \qquad \left(\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = -\infty \right)$$

Špeciálne pre $f_1(x) = 1$ sa $\lim_{x\to a} \frac{1}{f_2(x)} = \infty$, $\left(\lim_{x\to a} \frac{1}{f_2(x)} = -\infty \right)$

b) Ak je funkcia f_1 v určitom okolí bodu **a** ohraničená a $\lim f_2(x) = \infty$,

tak $\lim_{x\to a} [f_1(x) + f_2(x)] = \infty$, $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$

c) Ak $\lim_{x\to a} f_1(x) = \infty$ a existuje také číslo **p** > **0**, že pre všetky $x\neq a$ z niektorého okolia bodu **a** je $f_2(x) > p$, tak $\lim [f_1(x)\, f_2(x)] = \infty$

Príklad 17. Máme nájsť limitu $\lim_{x\to 1} \frac{-5}{(1-x)^2}$. Majme $f(x) = \frac{(1-x)^2}{-5}$. Zrejme platí

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^2}{-5} = 0$$

Pre $x \neq 1$ je $\dfrac{(1-x)^2}{-5} < 0$, a teda $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-5}{(1-x)^2} = -\infty$

Limita a nevlastná limita funkcie v bodoch ∞ a $-\infty$

Ak v definícii limity funkcie nahradíme všade písmeno **a**, ktoré označuje číslo, symbolom ∞, prípadne $-\infty$. Ak aj $b = \infty$, $b = -\infty$, tak hovoríme o nevlastnej limite v bode ∞, prípadne $-\infty$. Teda

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow [\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,\ x_n \in D(f) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b\,]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow [\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,\ x_n \in D(f) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b\,]$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow [\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,\ x_n \in D(f) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty\,]$$

Analogický význam majú symboly

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Príklad 18. Nech

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{5x^3 - x}$$

Riešenie: Nech $\{x_n\}$ je ľubovoľná postupnosť hodnôt argumentu taká, že $\lim x_n = \infty$.

Potom $$\{f(x_n)\} = \left\{ \frac{2x^3_n + x^2_n - 1}{5x^3_n - x_n} \right\}$$

Na základe viet o limitách postupnosti (veta 10 a 14) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x^3_n + x^2_n - 1}{5x^3_n - x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x^3_n}}{5 - \dfrac{1}{x^2_n}} = \frac{2 + 0 - 0}{5 - 0} = \frac{2}{5}$$

Pri výpočte tejto limity sme o postupnosti $\{x_n\}$ predpokladali iba to, že

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $x_n \in D(f)$. teda $f(x_n) \to \dfrac{2}{5}$, ak $x_n \to \infty$.

To znamená, že $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 - 1}{5x^3 - x} = \dfrac{2}{5}$.

Príklad 19. Nech $f(x) = a^x$, $a > 1$. Nech $\{x_n\}$ je ľubovoľná postupnosť, pre ktorú platí

$\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$. Potom postupnosť odpovedajúcich funkčných hodnôt je

$f(x_n) = \{a^{x_n}\}$.

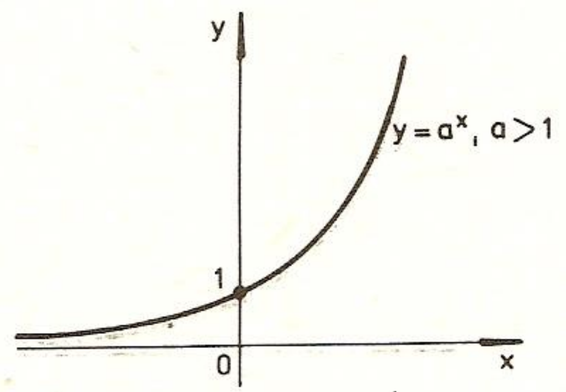
Riešenie: Dokážeme, že táto postupnosť má nevlastnú limitu ∞, to znamená, že $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \infty$. To znamená, že ku každému číslu A existuje také číslo n_0, že pre $n > n_0$ je $f(x_n) > A$, čiže $a^{x_n} > A$.

Zvoľme si ľubovoľné číslo A. Zrejme platí

$$\mathbf{a^x > A \Leftrightarrow x > \log_a A} \qquad (1)$$

Podľa predpokladu $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. To znamená, že ku každému číslu, a teda aj k číslu $\log_a A$, existuje také číslo n_0, že pre $n > n_0$ je $x_n > \log_a A$. Z toho a z (1) vyplýva, že pre $n > n_0$ je $a^{x_n} > A$. Tým je dokázané, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \infty$.

Pretože $\{x_n\}$ bola ľubovoľná postupnosť taká, že $\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$, môžeme písať $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ (obr. 5.11). Podobne by sme dokázali, že $\lim a^x = 0$, ak $a < 1$, platilo by $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$.



Obr. 5.11

Príklad 20. Nech $f(x) = \sin x$. Nech $\{x_n\}$ je ľubovoľná postupnosť, pre ktorú platí $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Ukážeme, že správanie sa postupnosti $\{f(x_n)\} = \{\sin x_n\}$ príslušných funkčných hodnôt závisí od postupnosti $\{x_n\}$, čiže nie je pravda, že pre každú postupnosť $\{x_n\}$, pre ktorú $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, má postupnosť $\{f(x_n)\}$ stále tú istú limitu.

napríklad ak $\{x_n\} = \{n\pi\}$, tak $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n\pi = \infty$ a $f(x_n) = \sin x_n = \sin n\pi = 0$ pre $n = 1,2,3...$, a teda $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Ale ak $\{x_n\} = \{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\}$, tak $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ a $f(x_n) = \sin x_n = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$ pre $n = 1, 2, 3...$, a teda $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.

To znamená, že $\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje.

Veta 9. platí aj pre nevlastné limity v bodoch ∞ a $-\infty$, čiže pre $a = \infty$, alebo $a = -\infty$.

Príklad 21. Pretože $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ a funkcia $\sin x$ je ohraničená na $(-\infty, \infty)$, podľa tvrdenia b) vety 9. platí $\lim_{x\to\infty} (x + \sin x) = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

ďalej platí $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, $2 + \sin x \geq 1$ pre všetky x, a teda podľa tvrdenia c) vety 9.platí $\lim_{x\to\infty} x^2 (2 + \sin x) = \infty$.

Veta o limite zloženej funkcie platí aj pre nevlastné limity v nevlastných bodoch. Veta 5. platí aj pre vlastné limity v nevlastných bodoch.

Príklad 22. Ak dosky kondenzátora (obr. 5 .12) s kapacitou C, nabitého na napätie U_0 spojíme s vodičom s odporom R, vo vzniknutom obvode preteká elektrický prúd intenzity

$$I = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC}$$

pričom čas t počítame od okamihu uzavretia obvodu. Dokážeme, že

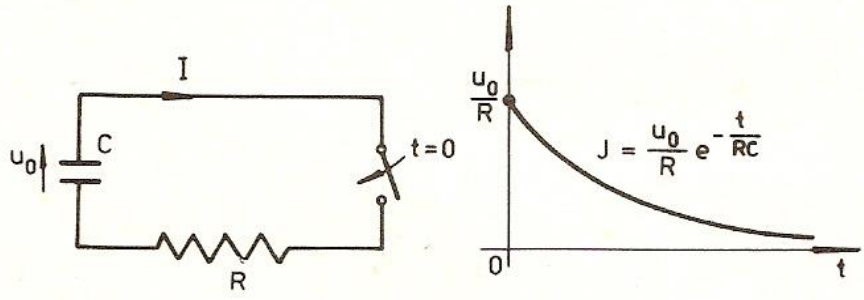
$$\lim_{t\to\infty} I = \lim_{t\to\infty} \frac{U_0}{R} e^{-t/RC} = 0$$

Riešenie: Majme $I = f(u) = \frac{U_0}{R} e^u$, $u = \varphi(t) = -\frac{t}{RC}$

Potom platí $\lim_{x\to\infty} \varphi(t) = \lim \left(-\frac{t}{RC}\right) = -\infty$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{U_0}{R} e^u = \frac{U_0}{R} . 0 = 0$$

(pozrite si príklad 19). Teda podľa vety o limite zloženej funkcie dostaneme



Obr. 5.12

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U_0}{R} e^{-t/RC} = \lim_{u\to-\infty} \frac{U_0}{R} e^{u} = 0$$

Príklad 23. V článku o postupnostiach sme si ukázali postupnosť $\{ (1 + \frac{1}{n})^n \}$, ktorá je konvergentná. Číslo , ktoré je jej limitou, sme označili písmenom e. Teda

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Teraz dokážeme, že

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Riešenie: Nech x je ľubovoľné reálne číslo väčšie ako 1. Znakom {x} označme najväčšie celé číslo, pre ktoré platí [x] ≤ x < [x] + 1. Zrejme pre každé x > 1 platí

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \qquad (1)$$

označme [x] = n. Pretože $\lim_{x\to\infty} [x] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, bude platiť

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} . \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e . 1 = e$$

Z toho vzhľadom na (1) a vetu 4 dostaneme

$$.\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Ľahko dokážeme, že

$$. \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Skutočne $\left(1+\dfrac{1}{.x}\right)^{x} = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x} = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(1+\dfrac{1}{-x-1}\right)^{-x} =$

$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

kde $n = -x-1$. Pretože $\lim\limits_{n\to-\infty} n = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1) = \infty$, podľa vety o limite zloženej funkcie

$$.\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} . \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e . 1 = e$$

Jednostranné limity funkcie

Okrem pojmu limita funkcie **f** v bode **a** zavádzajú sa ešte pojmy limita funkcie **f** v bode **a** sprava alebo zľava.

Nech je funkcia **f** definovaná pre každé **$x \neq a$** z niektorého pravého alebo ľavého okolia bodu **a**. Hovoríme, že funkcia **f** má v bode **a** *limitu* sprava alebo zľava rovnajúcu sa **b**, pre každú postupnosť **$\{x_n\}$**, ktorá spĺňa podmienky

$$\lim_{n\to 0} x_n = a, \quad x_n \in D(f), \quad x_n > a \quad (x_n < a)$$

má postupnosť **$\{f(x_n)\}$** stále tú istú limitu rovnajúcu sa **b**. Pre limitu funkcie **f** v bode **a** sprava alebo zľava použijeme označenie

$$\lim_{x\to a+} f(x), \text{ prípadne } \lim_{x\to a-} f(x)$$

Teda

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b \Leftrightarrow [\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n > a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b]$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b \Leftrightarrow [\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n < a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b]$$

Ak **$b = \infty$,** alebo **$b = -\infty$**, hovoríme o <u>nevlastnej limite funkcie **f** v bode **a** sprava (zľava).</u>
Pre limitu sprava a limitu zľava používame spoločný názov **jednostranné limity**.
Ľahko sa dokáže pravdivosť tohto tvrdenia:

Veta 10. $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje vtedy a len vtedy, keď existujú $\lim_{x\to a-} f(x)$, $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$. Potom platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

Z toho vyplýva, že ak niektorá z jednostenných limít neexistuje, alebo existujú obidve, ale sú rôzne, tak $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

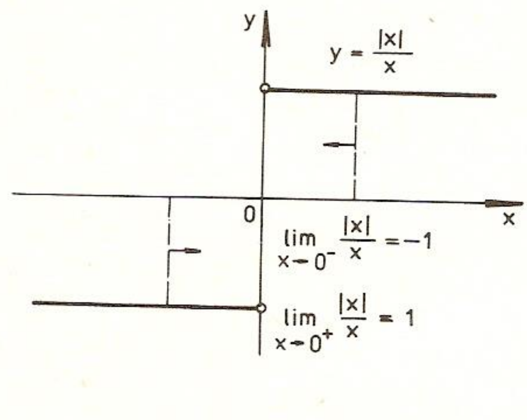
Limita $\lim_{x\to a} f(x)$ sa niekedy kvôli určitosti, ak ju chceme odlíšiť od jednostranných limít, nazýva <u>obojstranná limita.</u>
Pre jednostranné limity (vlastné) platí veta 5. aj veta o limite zloženej funkcie.

Príklad 24. Funkcia $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ na obr. 5.13 je definovaná pre všetky $x \neq 0$. Ak $x > 0$, tak $|x| = x$, a teda $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$. Ak $x < 0$, tak $|x| = -x$, $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$
Teda, ak si zvolíme ľubovoľnú postupnosť $\{x_n\}$ takú, že $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n > 0$, tak $f(x) = 1$ pre každé prirodzené číslo n. a teda $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, čo znamená, že

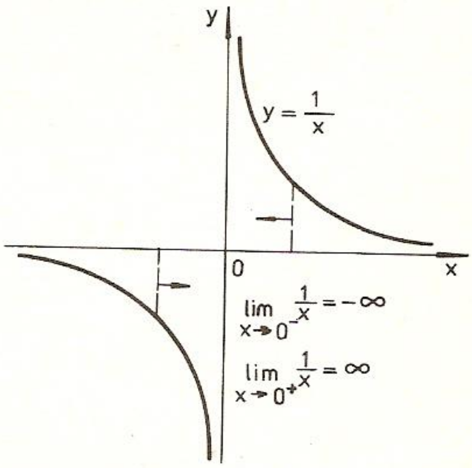
$$\lim_{a\to 0+} f(x) = 1$$

Ak postupnosť $\{x_n\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n < 0$, tak pre všetky prirodzené čísla n je $f(x_n) = -1$, a teda $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1$, čo znamená, že $\lim\limits_{n\to 0-} f(x) = -1$.

Obojstranná limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ v tomto prípade neexistuje.



Obr. 5.13



Obr. 5.14

Príklad 25. Ľahko sa dokáže

1. $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty$, a teda $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ neexistuje obr. 5.14
2. $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, $\lim\limits_{x\to +} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, a teda $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$ obr. 5.15
3. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)-} \operatorname{tg} x = \infty$, $\lim\limits_{x\to(\pi/2)+} \operatorname{tg} x = -\infty$, a teda $\lim\limits_{x\to(\pi/2)} \operatorname{tg} x$ neexistuje obr. 5.16
4. Ak $f(x) = \log_a x$, $a > 1$ obr. 5.17, tak $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$.

Symbol $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ nemá v tom prípade zmysel, pretože pre $x < 0$ táto nie je definovaná.

V takom prípade sa píše $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$

Príklad 26. Pomocou výsledkov z príkladu 10. dokážeme, že $\lim (1 + x)^{1/x} = e$

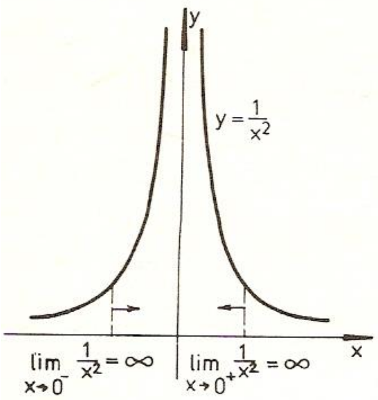
Riešenie. Majme $u = \dfrac{1}{.x}$. Potom $\lim\limits_{x\to 0+} u = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} u = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Z toho a z vety o limite zloženej funkcie vyplýva

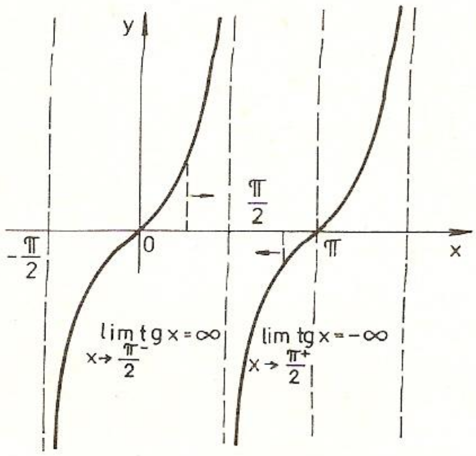
$$. \lim_{x\to 0+} (1 + x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

$$\lim_{x \to 0-} (1 + x)^{1/x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

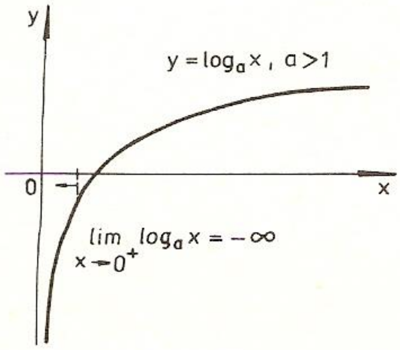
a teda aj $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$



Obr. 5.15



Obr. 5.16



Obr. 5.17

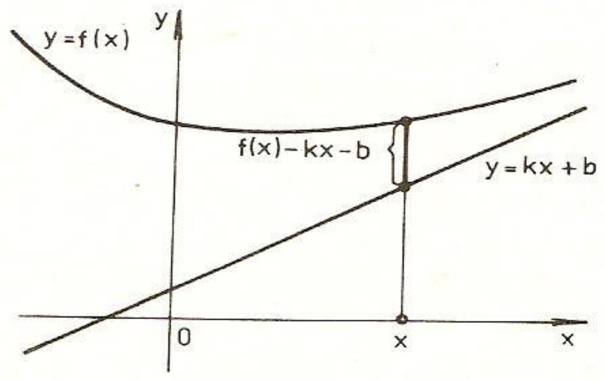
Asymptoty grafu funkcie

Pri skúmaní priebehu grafu funkcie a tým aj samotnej funkcie je dôležité zistiť, ako sa daný graf správa, ak sa jeho body vzďaľujú do nekonečna. Často sa stáva, že sa pritom body grafu približujú k bodom akejsi priamky obr. 5.18. Taká priamka sa nazýva **asymptota**.

Možné sú 2 prípady:

a) asymptota nie je kolmá na os x nazývame ju asymptota so smernicou,

b) asymptota je kolmá na os x hovoríme jej asymptota bez hranice.



Obr. 5.18

Definujeme : Priamka $y = kx + b$ sa nazývame asymptota so smernicou grafu funkcie f, .ak platí

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \quad \text{alebo} \quad \lim_{y\to-\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \qquad (1)$$

Predpokladajme, že priamka $y = kx + b$ je asymptota grafu funkcie $y = f(x)$, to znamená, že platí aspoň jeden zo vzťahov (1). Nech napr. platí

$$. \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0$$

Pretože aj $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, podľa vety 5. platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} [f(x) - kx - b] = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - kx - b}{x} = 0$$

Ale $\lim_{x\to\infty} \frac{kx - b}{x} = k$. Z toho a z vety 5. vyplýva

$$\lim_{x\to\infty} [\frac{f(x) - kx - b}{x} + \frac{kx + b}{x}] = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 + k$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

Zo vzťahu $\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0$ priamo vyplýva 2.

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$$

Vidíme teda, že nutnou podmienkou, aby priamka $y = kx + b$ bola asymptotou grafu funkcie $y = f(x)$ je , aby súčasne platilo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$$

Táto podmienka je aj postačujúca. Pretože z druhého z týchto vzťahov vyplýva

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0$$

čo znamená, že priamka $y = kx + b$ je asymptotou grafu funkcie f. Pritom platí táto veta.

Veta 11. Priamka $y = kx + b$ je asymptota so smernicou grafu funkcie f pre $x\to\infty$ vtedy a len vtedy, keď súčasne platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$$

Podobná veta platí zrejme aj pre $x \to -\infty$.

Príklad 26. Nech $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = k$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x} - 0 \,.\, x\right] = 0 = b$$

To isté by sme dostali aj pre $x\to -\infty$. Teda priamka $y = 0$ (os x) je asymptota so smernicou grafu funkcie

$$y = \frac{1}{x}.$$

Príklad 27. Nech $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x + 1}$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 = k$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 5}{x + 1} = 2 = b$$

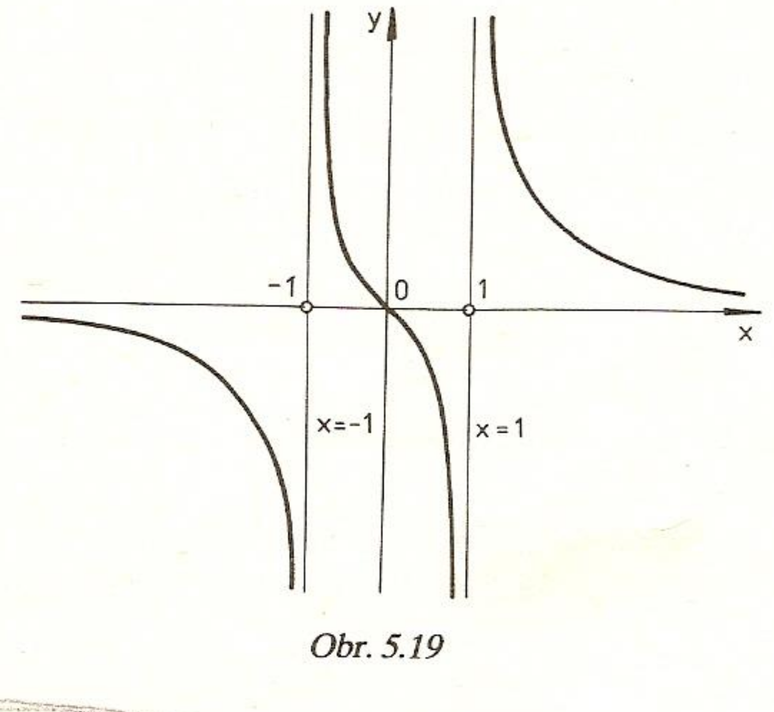
Teda priamka $y = x + 2$ je asymptota so smernicou grafu danej funkcie pri $x \to \infty$ a to iste je i pre $x \to -\infty$.

Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota** bez smernice grafu funkcie f, ak platí aspoň jeden z týchto štyroch vzťahov

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a+} = -\infty, \quad \lim_{x\to a-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a-} f(x) = \infty.$$

Napríklad priamka $x = 0$ (os y) je asymptota bez smernice grafu funkcie $y = \dfrac{1}{x}$.

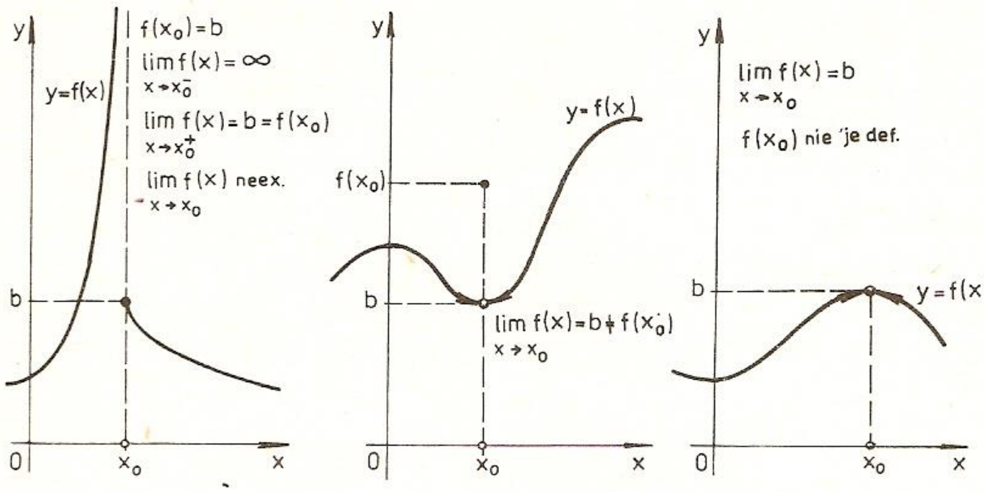
Z uvedenej definície hneď vyplýva spôsob hľadania asymptot bez smernice:
Hľadané body $x_1, x_2, ...$, v okolí ktorých je funkcia neohraničená. V prípade racionálnych funkcii to znamená nájsť tie body, v ktorých sa menovateľ rovná nule. Napríklad graf funkcie $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, ktorý je znázornený na obr. 19, má tieto asymptoty bez smernice $x = -1, x = 1$



Obr. 5.19

Spojitosť funkcie

V definícii limity funkcie f v bode x_0 sa nehovorí o hodnote $f(x_0)$. To znamená, že funkcia môže mať limitu aj v takom bode, v ktorom nie je definovaná. Môže sa tiež stať, že funkcia je v bode x_0 definovaná, ale nemá tam limitu (môže mať síce limitu sprava i zľava, ale tie sa nerovnajú). Ak je funkcia f v bode x_0 definovaná a má v tom bode limitu, táto limita sa nemusí rovnať $f(x_0)$. Vo všetkých týchto a podobných prípadoch (obr. 20) graf funkcie f v okolí bodu x_0 nie je súvislá (spojitá) krivka, graf je prerušený (nespojitý).



Obr. 5.20

Ak je však funkcia f v bode x_0 definovaná, má v tom bode limitu a platí

$$\lim f(x) = f(x_0)$$

jej graf nie je v bode $[x_0, f(x_0)]$ prerušený (nespojitý). Vedie to k tejto definícii:

Hovoríme, že funkcia f je v bode x_0 spojitá, ak

$$\mathbf{\lim_{h\to 0} f(x) = f(x_0)} \qquad (1)$$

Teda skutočnosť, že funkcia f je v bode x_0 spojitá, znamená, že

1. funkcia f je v bode x_0 definovaná,
2. má v tom bode limitu,
3. táto limita sa rovná hodnote funkcie f v bode x_0

Ak položíme $x = x_0 + h$, tak podmienku (1) môžeme zapísať v tvare

$$\mathbf{\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)}$$

Definícia spojitosti funkcie f v bode hovorí približne toto: *Pre hodnoty argumentu x málo odlišné od x_0 sa funkčné hodnoty f(x) málo líšia od $f(x_0)$.*

Poznámka: Ak vieme, že funkcia f je v bode x_0 spojitá, jej limitu v bode x_0 nájdeme jednoducho tak, že vypočítame $f(x_0)$.

Príklad 28. Nech $P_n(x)$ je polynóm a x_0 ľubovoľné číslo. Podľa podmienky (1) dostaneme

$$\lim_{x\to x0} P_n(x) = P_n(x_0)$$

To znamená, že polynóm je funkcia spojitá v každom bode.

Príklad 29. Funkcia $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ nie je v bode $x_0 = 1$ spojitá, pretože v ňom nie je definovaná.

Veta 12. Ak sú funkcie f_1, f_2 spojité v bode x_0, tak aj funkcie $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$ sú spojité v bode x_0. Ak okrem toho $f_2(x_0) \neq 0$, tak aj funkcia f_1 / f_2 je spojitá v bode x_0.

Z tejto vety a z toho, že polynóm je funkcia spojitá v každom bode, vyplýva, že racionálna funkcia je spojitá v každom bode, v ktorom je definovaná.
Ďalej možno dokázať, že aj trigonometrické funkcie sin x, cos x, tg x, cotg x a exponenciálna funkcia $\mathbf{a}^{\mathbf{x}}$ sú spojité v ľubovoľnom bode x_0, čo znamená, že platí

$$\lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0$$

Skutočne

$$\lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} [\sin x_0 \cos h + (\cos x_0) \lim \sin h] =$$

$$= (\sin x_0) \lim_{h\to 0} \cos h + (\cos x_0) \lim_{h\to 0} \sin h = \sin x_0$$

pretože $\lim\limits_{h\to 0} \cos h = 1$, $\lim\limits_{h\to 0} \sin h = 0$.

S pojmom jednostrannej limity (limity sprava, alebo zľava) súvisí pojem jednostrannej spojitosti funkcie v bode (spojitosť sprava, alebo zľava).

Hovoríme, že funkcia f je v bode x_0 spojitá sprava, zľava, ak

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = f(x_0), \quad \text{alebo} \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = f(x_0)$$

Príklad 30. Nech f je funkcia definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$ takto

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \geq 0 \\ -1 & \text{pre } x < 0 \end{cases}$$

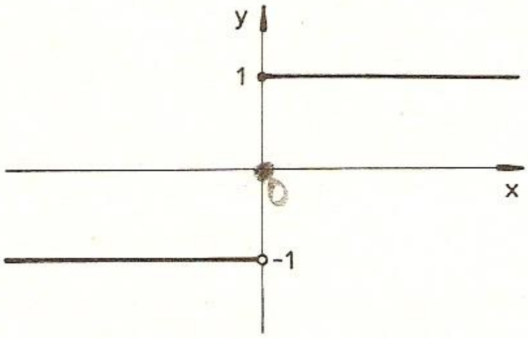
Asi platí $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$, a teda $\lim f(x)$ neexistuje. To znamená

že funkcia f nie je v bode x_0 spojitá. Je však v tom bode spojitá sprava, pretože $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1 = f(0)$. Nie je však v tom bode spojitá zľava, pretože $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$

ale f(0) sa tejto limite nerovná. (obr. 21)

Veta 13. Funkcia f je v bode x_0 spojitá vtedy a len vtedy, keď je v tom bode spojitá sprava i zľava.

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na otvorenom intervale (a, b), ak je spojitá v každom bode tohto intervalu.



Obr. 5.21

Funkcia f sa nazýva spojitá na uzavretom intervale ⟨a, b⟩, ak je spojitá v každom vnútornom bode tohto intervalu, teda na intervale (a, b), a ak okrem toho je v bode **a** spojitá sprava a v bode **b** spojitá zľava.

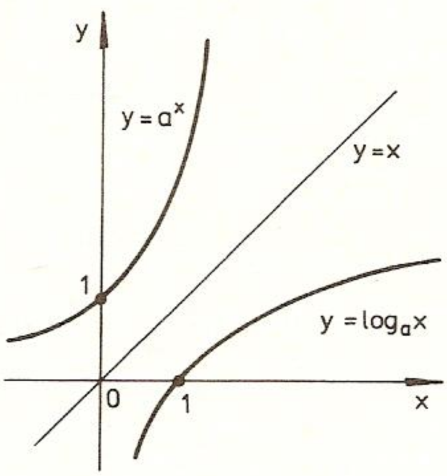
O funkcii f hovoríme, že je spojitá na intervale ⟨a, b), ak je spojitá na intervale (a, b) a v bode **a** je spojitá sprava.

Analogicky sa definuje spojitosť funkcie na intervale (a, b⟩.

Ak je funkcia f spojitá v každom bode svojho definičného oboru, stručne ju nazývame **spojitá funkcia**. Graf spojitej funkcie nazývame **spojitou krivkou** (čiarou). Uvedieme bez dôkazu ešte vety o spojitosti inverznej a zloženej funkcie.

Veta 14. (o spojitosti inverznej funkcie). Ak funkcia f je rastúca (klesajúca) a spojitá na nejakom intervale **J**, tak aj k nej inverzná funkcia $\mathbf{f^{-1}}$ je rastúca (klesajúca) a spojitá na množine funkčných hodnôt funkcie f, ktorá je tiež interval.

Príklad 31. Funkcia $f(x) = a^x$, $a > 1$, je spojitá a rastúca na intervale $(-\infty, \infty)$, a teda k nej .inverzná funkcia $f^{-1}(x) = \log_a x$ je spojitá a rastúca na $(0, \infty)$ obr. 22.



Obr. 5.22

Veta 15. Ak je $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$ a funkcia f(u) spojitá v bode u_0 tak

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(u_0) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x))$$

Táto veta platí i pre jednostranné limity a pre vlastné limity v nevlastných bodoch.

Príklad 32. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a funkcie e^u je spojitá v každom bode, teda aj v bode u = 1.

$$\lim_{x \to 0} e^{(\sin x) / x} = e^{\lim_{x \to 0} (\sin x)/x} = e^1 = e$$

Z vety 15. vyplýva ďalšia veta:

Veta 16. (o spojitosti zloženej funkcie). Ak je funkcia $\varphi(x)$ spojitá v bode x_0 a funkcia f(u) je spojitá v bode $u_0 = \varphi(x_0)$, tak aj zložená funkcia $f(\varphi(x))$ je spojitá v bode x_0.

Napríklad zložená funkcia

$$f(x) = \sin \frac{x^2 - 1}{3}$$

je spojitá v každom bode.

Z týchto viet a z toho, že polynóm, racionálna funkcia, exponenciálna funkcia a trigonometrické funkcie sú spojité v každom bode oboru definície, vyplýva táto veta:

Veta 17. Každá elementárna funkcia je spojitá v každom bode svojho oboru definície.

Ak je nejaké okolie bodu x_0 časťou definičného oboru funkcie f (v bode x_0 nemusí byť f definovaná), a v bode x_0 nie je splnená podmienka spojitosti $\lim_{x \to x_0} f(x_0)$, nazývame bod x_0 bodom nespojitosti funkcie f.

Bod x_0 môže byť bodom nespojitosti funkcie f z týchto príčin:

1. funkcia f nemá v bode x_0 limitu,
2. funkcia f nie je v bode x_0 definovaná,
3. funkcia f má síce v bode x_0 limitu, ale neplatí $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Body nespojitosti funkcie f, v ktorých má táto funkcia limitu zľava i limitu sprava, nazývame *bodmi nespojitosti prvého druhu*. Ostatné body nespojitosti funkcie nazývame *bodmi nespojitosti druhého druhu*.

Napríklad 0 je bodom nespojitosti prvého druhu funkcie $\frac{\sin x}{x}$, 1 je bodom nespojitosti prvého druhu funkcie $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$, $\frac{\pi}{2}$ je bodom nespojitosti druhého druhu funkcie tg x, 0 je bodom nespojitosti prvého druhu funkcie $\frac{|x|}{x}$.

Ak je bod x_0 bodom nespojitosti prvého druhu funkcie f a $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$, čo je, že existuje $\lim_{x\to x0} f(x) = b$, hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 odstrániteľnú nespojitosť.

V takom prípade funkcia f buď nie je definovaná v bode x_0 alebo je definovaná tak, že $f(x_0) \neq b$.

Definujeme teraz funkciu f^* takto $f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pre } x \neq x_0 \\ b & \text{pre } x = x_0 \end{cases}$

Táto funkcia je spojitá v istom okolí bodu x_0. Napríklad funkcia

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

má odstrániteľnú nespojitosť v bode 0.

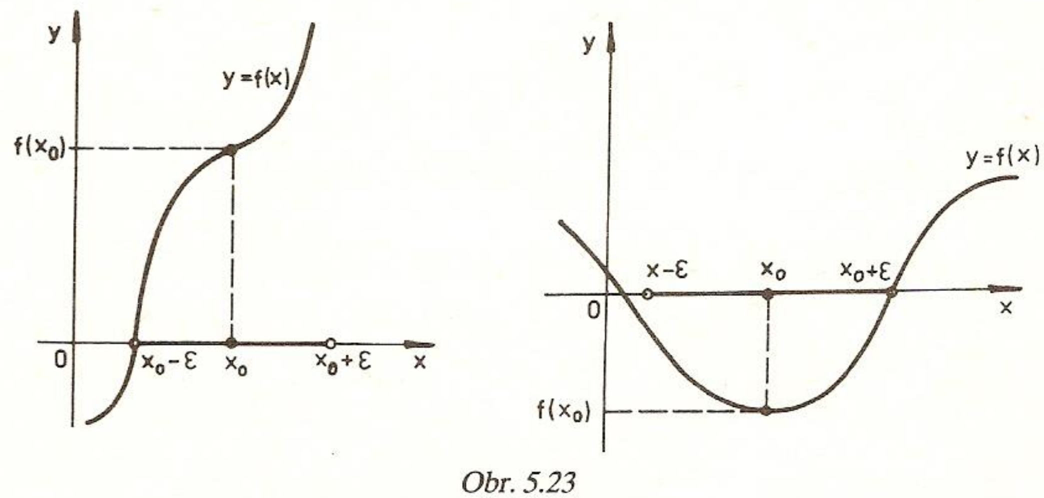
Funkcia $f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pre } x \neq 0 \\ 1 & \text{pre } x = 0 \end{cases}$

je spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$.

Odstránenie nespojitosti funkcie f v bode x_0 spočíva teda v nahradení tejto funkcie funkciou f^*, ktorá je v bode x_0 spojitá a taká, že $f^*(x) = $ f)x(pre $x \neq x_0$.

Vlastnosti spojitých funkcii na uzavretom intervale

V predchádzajúcom článku sme uviedli niekoľko viet o vlastnostiach funkcii spojitých v bode x_0. K ním pridáme bez dôkazu ešte túto vetu.

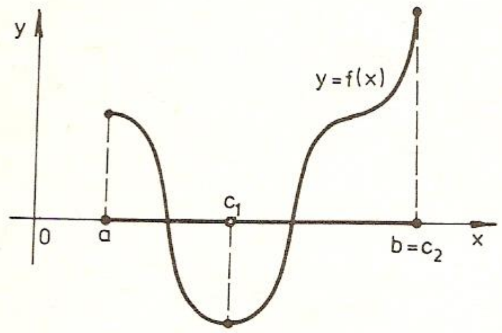


Obr. 5.23

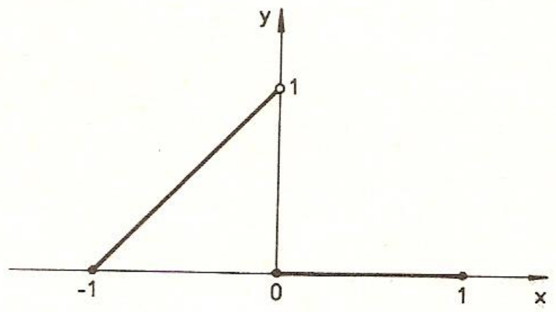
Veta 18. (o lokálnom zachovaní znamienka). Ak je funkcia f spojitá v bode x_0 a ak
. $f(x) > 0$ ($f(x_0) < 0$), tak existuje také okolie $U_\varepsilon(x_0)$, že pre každé $x \in U_\varepsilon(x_0)$
je $f(x) > 0$, ($f(x) < 0$).

Geometrická interpretácia tejto vety je na obr. 23.
Ďalej uvedieme bez dôkazu niekoľko viet o vlastnostiach funkcii, ktoré sú spojité na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$.

Veta 19. (Weierstassova veta). Ak je funkcia f spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$,
. aspoň jeden taký bod $c_1 \in \langle a, b\rangle$, že pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(c_1) \leq f(x)$,
. a aspoň jeden taký bod $c_2 \in \langle a, b\rangle$, že pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \leq f(c_2)$
obr. 24.



Obr. 5.24



Obr. 5.25

Weierstrassova veta teda hovorí, že ak je funkcia f spojitá na $\langle a, b\rangle$, tak na množine $H = \{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$ existuje maximum a minimum.
Funkcia spojitá na uzavretom intervale môže nadobudnúť maximálne, prípadne minimálne hodnoty vo viacerých bodoch. Napríklad funkcia $f(x) = \cos x$ nadobúda na intervale $\langle 0, 4\pi\rangle$, na ktorom je spojitá, maximálnu hodnotu v bodoch $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$ a minimálnu hodnotu v bodoch $x = \pi$, $x = 3\pi$.

Pre funkciu spojitú na otvorenom intervale (a, b) nemusí byť tvrdenie vety 19. správne. Napríklad funkcia $f(x) = x$ je spojitá na intervale (0, 1), ale nenadobúda na tomto intervale ani najmenšiu, ani najväčšiu hodnotu. Množina jej hodnôt pre $x \in (0, 1)$ má síce suprémum i infimum

$$\inf_{x\in(0,1)} f(x) = 0, \qquad \sup_{x\in(0,1)} f(x) = 1$$

.ale v nijakom bode intervalu (0, 1) nenadobúda táto funkcia ani hodnotu 0, ani hodnotu 1.

Tvrdenie vety nemusí byť správne, ani ak funkcia nie je spojitá na celom intervale $\langle a, b\rangle$. Napríklad funkcia obr. 25

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} 1 - x & \text{pre } x \in \langle -1, 0) \\ 0 & \text{pre } x \in \langle 0, 1\rangle \end{array} \right.$$

. je spojitá v každom bode intervalu $\langle -1, 1\rangle$ okrem bodu $x = 0$. Nenadobúda na tomto intervale maximálnu hodnotu (bod [0, 1] nie je bodom grafu tejto funkcie).

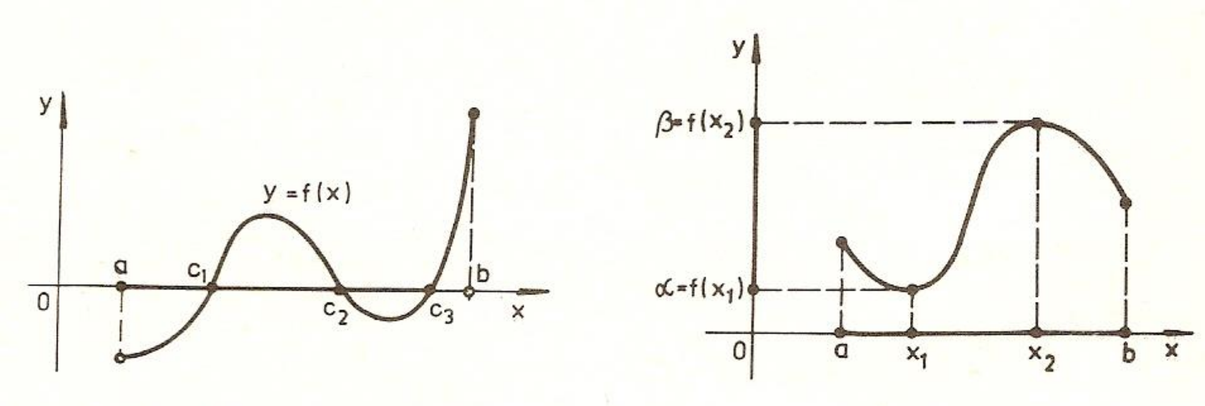
Dôsledkom vety 19. je veta :

Veta 20. Ak funkcia f je spojitá na intervale ⟨a, b⟩, je na tomto intervale ohraničená.
(Zhora číslom $f(c_2)$, zdola číslom $f(c_1)$, ako vo vete 19.

Ďalej platí: Veta 21. Nech je funkcia f spojitá na intervale ⟨a, b⟩ a nech $f(a) \neq f(b)$. Potom
. ku každému číslu K, ktoré leží medzi číslami f(a) a f(b), existuje
. aspoň jeden taký bod $c \in (a, b)$, že $f(c) = K$.

Veta 21. hovorí, že funkcia spojitá na uzavretom intervale ⟨a, b⟩ nadobúda na tomto intervale všetky hodnoty medzi f(a) a f(b).
Špeciálne platí ďalšia veta.

Veta 22. Ak je funkcia f spojitá na intervale ⟨a, b⟩ a čísla f(a), f(b) majú rôzne znamienka
. čo znamená, že $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$ taký, že
. $f(c) = 0$, obr. 26.



Obr. 5.26 *Obr. 5.27*

Veta 22. je veľmi užitočná pri numerickom riešení rovníc. Ak totiž riešime rovnicu $f(x) = 0$ a zistíme, že $f(a)f(b) < 0$, pričom f je spojitá funkcia na intervale ⟨a, b⟩, tak v intervale (a, b) leží aspoň jeden reálny koreň rovnice $f(x) = 0$.
Dôsledkom predchádzajúcich viet je veta:

Veta 23. Ak je funkcia f spojitá na intervale ⟨a, b⟩ a ak nie je f(x) = konštanta pre $x \in$ ⟨a, b⟩
,tak je množina $\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$ uzavretý interval obr. 27.

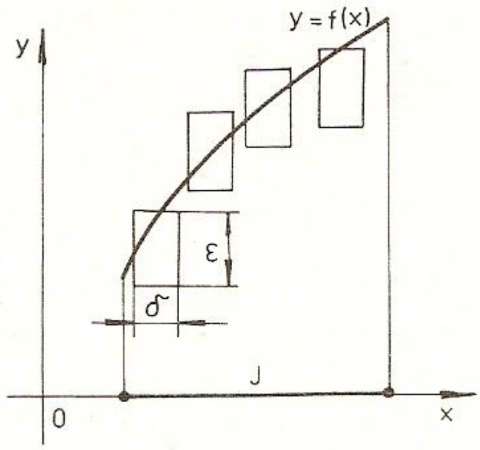
Zavedieme ešte jednu definíciu:

Hovoríme, že funkcia f je rovnomerne spojitá na intervale J, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre všetky $x_1, x_2 \in J$, ktoré spĺňajú nerovnosť $|x_2 - x_1| < \delta$, platí

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Geometrická interpretácia: Zostrojme obdĺžnik, ktorého strana rovnobežná s osou y má dĺžku ε a strana rovnobežná s osou x má dĺžku δ. Pri ľubovoľnom rovnobežnom posunutí tohto obdĺžnika v rovine nemôže graf funkcie, ktorá je na intervale J rovnomerne spojitá, pretínať obe strany tohto obdĺžnika rovnobežné s osou x (obr. 28). Túto vlastnosť nemajú všetky funkcie spojité na intervale J. Platí však táto veta.

Veta 24. (Cantorová veta). Ak je funkcia f spojitá na uzavretom intervale ⟨a, b⟩, je . tomto intervale rovnomerne spojitá.



Obr. 5.28