Logaritmy

Z definície mocniny vyplýva, že ku každému reálnemu číslu **y** existuje jediné reálne číslo **x**, pre ktoré platí:

$$.y = a^x \;; \qquad (a > 0 \;;\; a \neq 1)$$

Príklady: ak $a = 3$; $y = 27$; potom x je číslo 3 lebo $27 = 3^3 = 27$;

.ak $a = 7$; $y = 49$; potom x je číslo 2 lebo $49 = 7^2 = 49$;

Mocniteľom **x** môže byť ľubovolné reálne číslo, teda číslo záporné, zlomok alebo číslo iracionálne.

Ak $a = 10$; $y = 0{,}1$ potom x je číslo -1 lebo $0{,}1 = 10^{-1} = \dfrac{1}{10^1} = 0{,}1$;

Ak $a = 10$; $y = 1$ potom $x = 0$ lebo $10^0 = 1$;

Ak $a = 4$; $y = 2$ potom $x = 0{,}5$ lebo $0{,}5 = \dfrac{1}{2}$ potom $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$;

Mocniteľ **x**, ktorým je treba umocniť základ **a** , aby sme dostali číslo **y** sa nazýva logaritmus čísla **y**.

Definícia logaritmu

Logaritmus čísla *y* (y > 0) pri základe *a* (a > 0 ; a ≠ 1) je také číslo *x*, ktorým je treba umocniť základ *a* aby sme dostali číslo *y*.

1) Logaritmus záporného čísla **y** neexistuje, lebo žiadne reálne číslo **x** nevyhovuje podmienke, aby platilo

$$.a^x = y$$

Príklad: $y = -9$; $a = 3$; neexistuje reálne číslo x aby platilo $3^x = -9$;

2) Pre základ logaritmu musí platiť **a ≠ 1 .**

Príklad: $y = 4$; $a = 1$; nepoznáme také číslo x, aby platilo $1^x = 4$; lebo pre ľubovolného mocniteľa x platí

$$1^x = 1;$$

Ak označíme logaritmus čísla **y** pri základe **a** symbolom $\log_a y$, platí $x = \log_a y$ (čítame to ako logaritmus ypsilonu pri základe a). Ak platí $y = a^x$ potom platí aj $y = a^{\log_a y}$

Príklad: Sledujte postup určenia $\log_4 64$;

Riešenie : Zo vzťahu vyplýva a = 4; y = 64 ; Dosadením za $x = \log_a y$ dostaneme

$64 = 4^{\log a 64}$ alebo $64 = 4^x$ a teraz už môžeme určiť $64 = 4^3$; lebo $4^3 = 64$;

Platí teda, že $\log_4 64 = 3$;

Podobne platí aj $\log_6 1/36 = -2$; lebo $6^{-2} = \dfrac{1}{6^2} = \dfrac{1}{36}$;

$\log_{10} 0{,}001 = -3$; lebo $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$;

Zapamätajte si! **Logaritmus záporného čísla neexistuje.**

Logaritmus jednej sa pri ľubovolnom základe (a) rovná nule.

$\mathrm{Log}_a 1 = 0$; $a^0 = 1$;

Logaritmus základu sa pri ľubovolnom (a) rovná jednej.

$.\log_a a = 1$; $a^1 = a$;

logaritmus mocniny základu sa pri ľubovolnom základe (a) rovná mocniteľovi.

$.\log_a a^n = n$; $a^n = a^n$;

Všimnite si určenie logaritmov so základom a = 10.

$.\log_{10} 10^3 = 3$; $\log_{10} 10^{-2} = -2$; $\log_{10} 10^1 = 1$; $\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$;

ale $\log_{10} (-100) = -2$ neplatí, lebo $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$; a $0{,}01 \neq -100$;

preto platí, že písmená vo význame čísel sú čísla kladné.

Pravidlá pre počítanie s logaritmami.

Logaritmus súčinu sa rovná súčtu logaritmov jednotlivých činiteľov.

$$.\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \qquad (x > 0 ;\ y > 0)$$

.x	2	4	8	16	32
$.\log_2 x$	1	2	3	4	5

tabuľka platí pre **a** = 2;

Súčin 2 . 8 sa zapisuje $\log_2(2 . 8) = \log_2 2 + \log_2 8 = 1 + 3 = 4$;

Ak označíme hľadaný súčin x potom platí $\log_2 x = 4$; a z tabuľky vyčítame, že štvorke patrí za x číslo 16, teda 2 . 8 = 16 čo je správne.

Násobenie dvoch čísel sa tak zjednodušuje na sčítanie ich logaritmov.

Logaritmus podielu sa rovná logaritmu delenca (čitateľa) zmenšenému o logaritmus deliteľa (menovateľa).

$$.\mathbf{\log_a(x : y) = \log_a x - \log_a y}\ ; \qquad (x > 0\ ;\ y > 0)\ ;$$

Pre názornosť použijeme tabuľku pre výpočet 8 : 2.

$.\log_2 (8 : 2) = \log_2 8 - \log_2 = 3 - 1 = 2$; v tabuľke má x hodnotu číslo 4.

Logaritmus mocniny sa rovná logaritmu mocnenca násobeného mocniteľom.

$$.\mathbf{\log_a x^n = n . \log_a x}\ ; \qquad (x > 0)\ ;$$

.z tabuľky vyplýva $2^3 = x$

$.\log_2 2^3 = 3 . \log_2 2 = 3 . 1 = 3$; alebo $x = 8$;

Logaritmus odmocniny sa rovná logaritmu odmocnenca lomenému odmocniteľom.

$$.\mathbf{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}}\ ; \qquad (x > 0)\ ;$$

.z tabuľky vyplýva $\sqrt[3]{8} = x$;

$$.\log_2 \sqrt[3]{8} = \frac{.\log_2 8}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{alebo} \quad x = 2\ ;$$

Pamätajte. Logaritmus súčtu alebo rozdielu dvoch čísel sa nedá vyjadriť súčtom alebo rozdielom ich logaritmov.

$$.\mathbf{\log_a (4 + 4) \neq \log_a x \pm \log_a y}\ ;$$

Logaritmus súčtu alebo rozdielu môžeme určiť až po prevedení naznačených počtových výkonov,

$.\log_2(4 + 4) \neq \log_2 4 + \log_2 4 = 2 + 2 = 4$ nesprávne riešenie

$\log_2 (4 + 4) = \log_2 8 = 3$; správne riešenie

Príklad: Logaritmujme : $3m$; $\frac{3}{4}$; 4^3 ; $\sqrt{5}$;

Riešenie: $\log_a 3 + \log_a m$; $\log_a 3 - \log_a 4$; $3 \log_a 4$; $\frac{\log_a 5}{2}$

Zložené počtové výrazy logaritmujeme postupne.

Sledujte postup logaritmovania výrazu x^2y^3z ; $\sqrt{m}\cdot\sqrt[3]{x}$; $\dfrac{m^2n^3}{p^4r^2}$

$$\log_a(x^2y^3z) = \log_a x^2 + \log_a y^3 + \log_a z = 2\log_a x + 3\log_a y + \log_a z\,;$$

$$\log_a(\sqrt{m}\cdot\sqrt[3]{x}) = \log_a \sqrt{m} + \log_a \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}\log_a m + \frac{1}{3}\log_a x$$

$$\log_a \frac{m^2n^3}{p^4r^2} = \log_a m^2n^3 - \log_a p^4r^2 = \log_a m^2 + \log_a n^3 - (\log_a p^4 + \log_a r^2) =$$

$$= 2\log_a m + 3\log_a n - (4\log_a p + 2\log_a r)\,;$$

Ak určíme výraz x, ktorého logaritmus je daný, hovoríme, že sme odlogaritmovali.

Sledujte postup odlogaritmovania.

$$\log_a x = \frac{1}{3}(\log_a 4 + \log_a x - 2\log_a y) = \frac{1}{3}(\log_a 4\,.\,x - 2\log_a y) =$$

$$= \frac{1}{3}(\log_a 4x - \log_a y^2) = \frac{1}{3}\log_a \frac{4x}{y^2} = \log_a \sqrt[3]{\frac{4x}{y^2}}\,;$$

Logaritmovaný výraz je $x = \sqrt[3]{\dfrac{4x}{y^2}}$;

Dekadické logaritmy

V praxi počítame väčšinou s logaritmami, ktorých základ je **a = 10.** Tieto logaritmy sa nazývajú dekadické a označujeme ich zápisom

$\log x$ namiesto **$\log_{10} x$;**

Všimnite si niekoľkých logaritmov a niektorých násobkov desiatimi.

$\log 0{,}01 = -2$; lebo $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$;

$\log 0{,}1 = -1$; lebo $10^{-1} = \dfrac{1}{10^1} = 0{,}1$;

$\log 1 = 0$; lebo $10^0 = 1$;

$\log 10 = 1$; lebo $10^1 = 10$;

Logaritmus každého kladného čísla **N** môžeme zapísať v tvare

$$\log N = n + \log N_0$$

Zapamätajte si ! a) Číslo **n** sa nazýva charakteristika logaritmov čísla **N**. Charakteristika logaritmu je vždy celé číslo (kladné, záporné alebo nula) a rovná sa radu prvej platnej číslice čísla **N**.

b) Číslo **log N₀** sa nazýva mantisa logaritmu čísla **N**. Mantisy rôznych čísel **N** sú uvedené v logaritmických tabuľkách. Mantisy spĺňajú vždy nerovnosť $0 \le \log N_0 < 1$;

Mantisy logaritmov majú teda tvar 0,34242 ; 0,99 654 ; Logaritmus 3,64048 ma charakteristiku 3, mantisu 0,64048. Charakteristiku logaritmu daného čísla môžeme určiť mechanicky podľa pravidiel.

1) Charakteristika logaritmov základných jednotiek sa rovná nule.
2) Charakteristika logaritmov čísel väčších alebo menších, ako sú základné jednotky, sa rovná počtu miest odpočítaných po jednej od základného miesta vľavo alebo v pravo až k prvej platnej číslici.

Schematické znázornenie

9 2 4 3 1 , 7	0 , 0 0 8 2 3
←	→
4 3 2 1 0	0 , – 1 – 2 – 3

Charakteristika logaritmu 4, Charakteristika logaritmu – 3 ;

Logaritmy dvoch alebo viac čísel, ktoré sa líšia iba umiestnením desatinnej čiarky, majú rovnakú mantisu a líšia sa iba charakteristikou.

Napr. $\log 367 = \log 3{,}67 \cdot 10^2 = \log 3{,}67 + 2$

$\log 36{,}7 = \log 3{,}67 \cdot 10^1 = \log 3{,}67 + 1$;

$\log 3{,}67 = \log 3{,}67 \cdot 10^0 = \log 3{,}67 + 0$;

$\log 0{,}367 = \log 3{,}67 \cdot 10^{-1} = \log 3{,}67 - 1$;

Zapamätajte si ! a) Logaritmy čísel väčších ako 1 sú kladné a píšeme ich v tvare

$$\log (N > 1) = n , ...$$

kde **n** je kladná charakteristika alebo nula a bodky naznačujú päť prvých desatinných miest mantisy.

Logaritmus čísla 1 sa rovná nule a píšeme ho v tvare

log (N = 1) = 0,00000

Logaritmy čísel menších ako 1 sú záporné a píšeme ich v tvare

.log (N < 1) = 0,..... –n

kde **–n** je záporná charakteristika a bodky sú číslice mantisy.

Určenie logaritmov k danému číslu.

Príklad: Sledujte postup určenia logaritmu čísla x = 75,93 ;
Riešenie: Podľa vety určenia je charakteristika logaritmu n = 1.
Pod symbolom log čítame mantisu 88041 a výsledok je
.log x = log 75,93 = 1,88041 ;

Poznámka: Príklad je riešený pomocou tabuliek, ak použijeme kalkulačku tak výsledok
. sa ukáže na displeji automaticky.

Príklad: Riešme exponenciálnu funkciu $y = 2^x$;

Riešenie: Vidíme, že podľa tohto vzťahu môžeme ku každému číslu x určiť jednu hodnotu funkcie y. tak napr. x = 4, dostaneme $y = 2^4 = 16$;
Podľa tohto môžeme riešiť i podobné úlohy.

Príklad: Určite x , ak $2^x = 64$.
Riešenie: Je to rovnica exponenciálna, ktorú dokážeme riešiť ak sa nám podarí previesť ľavú i pravú stranu na mocniny o rovnakom základe.
Pretože $64 = 2^6$ môžeme zapísať
$2^x = 2^6$ alebo x = 6 ;
Túto istú hodnotu možno zapísať i pomocou logaritmov ako
.$x = \log_2 64$;

Príklad: Určime logaritmus čísla 27 pri základe 9.

Riešenie: $\log_9 27 = x$ alebo $9^x = 27$
$(3^2)^x = 3^3$
$3^{2x} = 3^3$
teda z toho plynie, že 2x = 3

$$x = \frac{3}{2} = 1,5 ;$$

Logaritmus čísla 27 pri základe 9 je 1,5;

Príklad: Pri ktorom základe logaritmus čísla 8 sa rovná 6?
Riešenie: Máme teda riešiť rovnicu

$$\log_a 8 = 6 \quad \text{alebo} \quad a^6 = 8\ ;$$

Odmocníme obe strany rovnice

$$a = \sqrt[6]{8}$$

$$a = \sqrt[6]{2^3}$$

$$a = \sqrt{2}\ ;$$

Odpoveď. Logaritmus čísla 8 sa rovná 6 pri základe $a = \sqrt{2}$.

Príklad: Určite číslo n, ktorého logaritmus pri základe $\frac{1}{2}$ sa rovná – 3.

Riešenie: Máme danú rovnicu $\log_{\frac{1}{2}} n = -3$ alebo $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = n$;

z čoho plynie $n = 2^3$

$$n = 8\ ;$$

Odpoveď. Číslo 8 je hľadané číslo, ktorého logaritmus pri základe $\frac{1}{2}$ sa rovná – 3.

Niekedy sa stretneme s rovnicami, ktoré obsahujú logaritmy výrazov s neznámou.

Príklad: $\log x + \log(x + 3) = 1$;

Riešenie: Pri riešení takýchto rovníc postupujeme použitím úprav výrazov s logaritmami tak, aby sme dostali niektorý známy typ algebraickej rovnice.
Úprava rovnice

$$\log x + \log(x + 3) = 1$$

pretože $\log 10 = 1$ môžeme písať tvar

$$\log[\, x(x + 3)] = \log 10$$

Ak sa rovnajú logaritmy dvoch čísel rovnajú sa i čísla samotné. Teda platí

$$x(x + 3) = 10 \quad \text{alebo} \quad x^2 + 3x = 10$$

Prenesením na ľavú stranu dostaneme

$$x^2 + 3x - 10 = 0\ ;$$

Získali sme kvadratickú rovnicu, ktorú riešime ako obecnú kvadratickú rovnicu.
Rozkladom rovnice dostaneme

$$(x - 2)(x + 5) = 0$$

Korene rovnice sú $x_1 = 2$; $x_2 = -5$; Koreň $x_2 = -5$ nemá pre logaritmickú rovnicu význam, pretože logaritmus záporného čísla je nedefinovaný. Rovnica má teda iba jeden koreň $x_1 = 2$;

Príklad: Máme rovnicu $\dfrac{\log(x+1)}{\log x} = -1$;

Riešenie: Za predpokladu, že $\log x \neq 0$ vynásobíme obe strany rovnice $\log x$.

Čím dostaneme $\log(x+1) = -\log x$ pričom pravú stranu môžeme upraviť

$$\log(x+1) = \log x^{-1}$$

zjednodušiť $x + 1 = x^{-1}$

alebo $x + 1 = \dfrac{1}{x}$;

Úpravou tejto rovnice dostaneme kvadratickú rovnicu

$$x^2 + x - 1 = 0 ;$$

Rovnica má dva korene $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Druhý koreň je záporný a nevyhovuje danej logaritmickej rovnici, preto má rovnica iba jeden koreň x_1 ;

Príklad: Riešte rovnicu $\log x^2 + \log 8 + \log x = \log x + 1$;

Riešenie: V rovnici rozvedieme logaritmy výrazov

$$2\log x + \log 8 + \log x = \log x + 1$$

z ktorej vypočítame $\log x = \dfrac{1-\log 8}{2}$

log 8 nájdeme v tabuľke $\log x = \dfrac{1-0{,}9031}{2}$

$$\log x = \frac{0{,}0969}{2}$$

$$\log x = 0{,}0484 ;$$

Z tabuliek alebo na kalkulačke zistíme, že $x = 1{,}118$;

Riešením úloh pomocou logaritmov sa živilo i mnoho profesionálnych počtárov, ktorý vedeli svojím rýchlym vyriešením danej úlohy ohromiť prítomných divákov. Teraz si ukážme jednu zo zábavných úloh profesionála.

Zábavná úloha.

Profesionálny počtár pred publikom dostane úlohu, ktorá znie: *Skúste nájsť 31 odmocninu z 35 miestneho čísla, ktoré nadiktujem.*

Počtár vezme kriedu a po krátkej chvíli napíše na tabuľu číslo 13. Teda skôr ako poznal dané číslo. Všetci zostali ohromený nad takým výkonom. Ako našiel číslo 13 ?

Riešenie Pomohli mu logaritmy (dvojmiestne logaritmy), ktoré ovládal naspamäť do prvých 15 až 20 čísel.

Nie je ťažké si ich zapamätať ak si uvedomíme, že logaritmus zloženého čísla je rovný súčtu logaritmov jeho prvočíselných činiteľov. Ak poznáme logaritmy 2, 3 a 7, poznáme logaritmy všetkých čísel prvej desiatky. Pre druhú desiatku si stačí zapamätať ďalšie štyri logaritmy čísel.

Jednoduchá tabuľka dvojmiestnych logaritmov.

.n	.log $_n$	.n	.log $_n$
2	0,3	11	1,04
3	0,48	12	1,08
4	0,6	13	1,11
5	0,7	14	1,15
6	0,78	15	1,18
7	0,85	16	1,2
8	0,9	17	1,23
9	0,95	18	1,26
		19	1,28

Trik, ktorý nás tak prekvapil spočíva v tomto výpočtu.

.log $\sqrt[31]{35}$ číslic = $\frac{34 \ldots\ldots}{31}$ hľadaný logaritmus leží medzi $\frac{34}{31}$ až $\frac{34,99}{31}$ teda medzi

1,09 a 1,13 a v tomto intervale existuje logaritmus iba jediného celého čísla a to 1,11 čo je logaritmus čísla 13.

Ešte jeden príklad na podobnú otázku.

Niekto vám povie napr. Nájdite 64 odmocninu z dvadsaťciferného čísla.
Vy bez toho aby ste sa pýtali na číslo začnete počítať:

.log$\sqrt[64]{20..}$ číslic = $\frac{19}{64}$ = 0,29 a interval $\frac{19,99}{64}$ = 0,32 teda celé číslo v tomto

intervale môže byť iba číslo 2.

Číslo **e** je vo vyššej matematike známe rovnako ako napr. π Ludolfovo číslo. Toto číslo značíme malým písmenom e. Je to iracionálne číslo, nedá sa presne vyjadriť konečným počtom číslic. Dá sa však počítať na ľubovoľný počet desatinných miest pomocou rady

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots$$

e je limitou postupnosti $(1 + \frac{1}{n})^n$ pre n rastúce do nekonečna.

Číslo e je však z mnohých dôvodov dobré určiť ako základ logaritmov. Tabuľky logaritmov o základe e (tzv. prirodzené logaritmy) existujú a majú široké uplatnenie vo vede a technike.

Príklad: Číslo 10 je potrebné rozdeliť na toľko rovnakých častí, aby jednotlivé časti boli čo najbližšie k číslu e (2,718).

Riešenie: Musíme nájsť zlomok $\frac{10}{2{,}718} = 3{,}678$;

Pretože nie je možné deliť na 3,678.... rovnakých častí, vyberieme najbližšie celé číslo a to je číslo 4. Dostaneme najmenší súčin časti čísla 10 $\frac{10}{4} = 2{,}5$

To znamená, že $(2{,}5)^4 = 39{,}065$ je najväčšie číslo, ktoré dostaneme ako súčin čísel, ktorých súčet sa rovná číslu 10. Ak rozdelíme napríklad číslo 10 na 3 alebo na 5 rovnakých častí dostaneme menšie súčiny.

$$\left(\frac{10}{3} \right)^3 = 37{,}04 \;; \qquad \left(\frac{10}{5} \right)^5 = 32 \;;$$

Uvedieme niekoľko prípadov, pri ktorých sa matematické štúdium nezaobíde bez (e).

Napr. Závislosť atmosferického tlaku na nadmorskej výške.
Závislosť trenia lana ovinutého okolo kola na počtoch závitov.
Rádioaktívny rozpad. Kmitavé javy v elektronických obvodoch a pod.

Historická poznámka.

John Napier (1550 – 1617) sa zaujímal o zjednodušenie výpočtov sférickej trigonometrie. Prvé tabuľky zostrojil v roku 1594 a poslal ich Tychovi de Brahe do prahy na vyskúšanie. Napierové logaritmy boli vlastne hodnoty funkcie a ich základom bolo číslo iba o málo väčšie ako je Eulerová konštanta e = 2,718...

V roku 1614 vyšla v Edinburgu kniha „*Mirifici logatitmorum canosis descriptio*“ (Popísanie podivuhodného zákona logaritmov), ktorú napísal Napier niekoľko rokov pred vydaním.

Henry Briggs (1561 – 1631) zjednodušil Napierovú myšlienku a zostavil dekadické logaritmy. Začal zostrojovať sedemmiestne tabuľky dekadických logaritmov, ktoré boli dokončené neskôr a používajú sa dodnes. Tieto tabuľky vyšli v roku 1617 a v roku 1624 vyšli zdokonalené logaritmické tabuľky.

Edmund Gunter (1581 – 1626) skonštruoval prvú logaritmickú stupnicu, na ktorej pomocou kružítka aby bolo možné počítať ako na logaritmickom pravítku. Gunter bol evanjelicky duchovný a profesor astronómie v Londýne.