

Nerovnosti

Je potrebné si uvedomiť, že nerovnosťou nazývame všetky početové výrazy, v ktorých sa vyskytuje jedno zo znamienok $<$, $>$, $\leq$, $\geq$;

Nerovnosti, ktorých znamienka majú rovnaký zmysel, sa nazývajú súhlasné nerovnosti alebo nerovnosti toho istého zmyslu. Nap. $x > 2$; $x > 0$;

Nerovnosti, ktorých znamienka majú opačný zmysel, sa nazývajú nerovnosti nesúhlasné alebo nerovnosti opačného zmyslu. Nap. $x < 3$; $2 > x$;

Ak platí $a < b$; $b < c$, potom platí nerovnosť $a < c$;

Dve súhlasné nerovnosti $a < b$; $b < c$ zapisujeme jedinou nerovnosťou $a < b < c$;

Ekvivalentné úpravy nerovností.

Ekvivalentnými úpravami nerovností rozumieme úpravy, ktoré neporušia platnosť danej nerovnosti. Ak pričítame k oboj stranám nerovnosti to isté číslo, kladné alebo záporné, zmysel nerovnosti sa nezmení.

Ak platí $a < b$ a m je ľubovoľné číslo, potom platí nerovnosť

$$a \pm m < b \pm m;$$

Sledujte postup pripočítania k nerovnosti. Máme nerovnosť $-2 \leq -1$, ku ktorej pripočítame číslo 3 pričom dostaneme:

$$-2 < -1 \Rightarrow -2 + 3 < -1 + 3 \Rightarrow 1 < 2;$$

Ak prevedieme všetky členy nerovnosti na jednu stranu (väčšinou na ľavú) hovoríme, že sme nerovnosť anulovali. Nap. $-3 < -1 \Rightarrow -3 + 1 < 0 \Rightarrow -2 < 0$;

Ak vynásobíme alebo vydělíme obe strany nerovnosti rovnakým kladným číslom zmysel nerovností sa nemení.

Príklad: $a < b$ $m < 0$; potom platí $am < bm$ alebo $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$

Sledujte postup odstraňovania zlomkov nerovnosti.

Príklad: $\frac{3}{5} < \frac{7}{2a} \Rightarrow \frac{3 \cdot 10}{5} < \frac{7 \cdot 10}{2a} \Rightarrow 6 < 7;$

$$\frac{5}{2a} \geq \frac{10}{b} \Rightarrow \frac{5}{2a \cdot 24} \geq \frac{10}{b \cdot 24} \Rightarrow 16a \geq 3b;$$

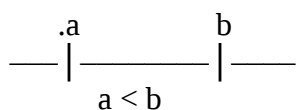
Ak vynásobíme alebo vydělíme obe strany nerovnosti tým istým záporným číslom, zmení sa zmysel nerovnosti alebo znamienko nerovnosti sa zmení na opačné. $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$

Nap. Ak platí $a < b$, $m < 0$; platí nerovnosť $am < bm$ alebo $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$;

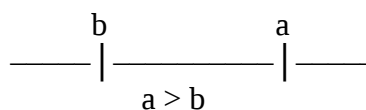
Toto bolo iba letmé nahliadnutie na spôsob riešenia nerovnosti a teraz sa budeme nerovnostiam venovať podrobnejšie.

Definícia 1. Číslo **a** je väčšie než **b** (zápis ma tvar) $a > b$, ak je rozdiel $a - b$ kladné číslo, číslo **a** je menšie než **b** (zápis ma tvar) $a < b$ ak rozdiel $a - b$ je záporné číslo. Platí to i opačne.

Zápis $a > b$ (číslo a je väčšie než číslo b) a zápis $b < a$ (číslo b je menšie než a) znamenajú to isté. Symbol $>$ (väčší) a symbol $<$ (menší) sa nazývajú **znaky nerovnosti**. Obraz väčšieho čísla leží vpravo od obrazu menšieho čísla. Obraz menšieho čísla leží vľavo od obrazu väčšieho čísla.



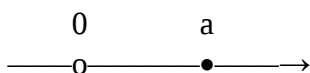
Obr.1



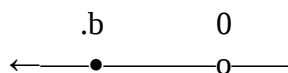
obr. 2

Kladné čísla **a** sú väčšie než nula, pretože rozdiel $b - 0 = b$ je záporné číslo. Píšeme $a < b$ a čítame **b** je **kladné číslo**.

Množina kladných čísel je zobrazená polpriamkou na obrázku 3. nepatrí k nej začiatok 0. Záporné čísla **b** sú menšie než nula, pretože rozdiel $b - 0 = b$ je záporné číslo. Píšeme $b < 0$ a čítame **b** je **záporné číslo**. Množina záporných čísel je zobrazená polpriamkou obr. 4. Ale nepatrí k nej začiatok 0.



Obr. 3.



obr. 4.

Nula nie je ani kladné ani záporné číslo.

Ak máme zápis $a \geq b$, je číslo **a** väčšie alebo rovné číslu **b**, to znamená, že číslo **a** nieje menšie ako číslo **b**. V tomto prípade leží obraz čísla **a** vpravo od obrazu čísla **b** alebo sním splýva. Podobne je to i v prípade $a \leq b$.

Čísla $a \geq 0$ nazývame **nezáporné**.

Čísla $a \leq 0$ nazývame **nekladné**.

Nerovnosť $a \neq b$ spĺňajú kladné i záporné čísla.

Poznámka: Nerovnosť so znakom $<$ alebo $>$ je **ostrá nerovnosť**, nerovnosť so znakom $\geq$ alebo $\leq$ je **neostrá nerovnosť**.

Príklad: Číslo -5 nie je menšie než $-5,6$. Môžeme tiež povedať, že číslo -5 je väčšie alebo sa rovná $-5,6$. Zápis bude mať tvar

$$-5 \geq -5,6$$

Rýchlosť v vlaku nie je väčšia než 80 kmh^{-1} . Hovoríme, že rýchlosť vlaku je menšia alebo rovná 80 kmh^{-1} . Zápis ma tvar

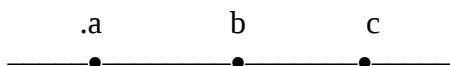
$$v \leq 80 \text{ kmh}^{-1}$$

O nerovnosti platia vety: Veta 1. Ak je $a < b$, $b < c$, tak aj $a < c$.
 Dôkaz. Ak je $a < b$, tak $a - b < 0$; ak je $b < c$, tak $b - c < 0$.

$$(a - b) + (b - c) = a - c < 0,$$

to znamená, že $a < c$, čo sme mali dokázať. Veta 1. platí i pre znak $>$.
 Pretože nerovnosti $a < b$, $b < c$ platia súčasne, môžeme písať skráteno $a < b < c$. Tento zápis nazývame **postupná nerovnosť** a je to zápis dvoch nerovností $a < b$, $a < b < c$.

Obrazy čísel a, b, c na číselnej osi nasledujú v tomto poradí od ľavej strany k pravej obr.5.



obr. 5.

Veta 2. Ak je $a < b$ a c je ľubovoľné číslo, je $a + c < b + c$.
 Dôkaz. Pre každé c platí $(a - c) - (b - c) = a - b$. Ak je $a - b < 0$, je aj $(a - c) - (b - c) < 0$, to znamená, že $a + c < b + c$ a opačne. Veta 2. platí aj pre znak $>$.

Napr. keď $c = 5$, $7 < 10$, potom $7 + 5 < 10 + 5$, čiže $12 < 15$.
 Alebo ak $c = -4$, $4 > 2$, aj $4 - 4 > 2 - 4$, čiže $0 > -2$.

Veta 3. Ak je $a < b$, tak pre kladné číslo $c (c > 0)$ platí $ac < bc$
 a pre záporné číslo $c (c < 0)$ platí $ac > bc$.

Dôkaz. Ak je $a < b$, tak $a - b$ je záporné číslo a $ac - bc = c(a - b)$ je

1. záporné pre c kladné, takže $ac < bc$,
2. kladné pre c záporné, takže $ac > bc$.

Veta 3. platí i pre znak $>$.

Napr. ak je $3 < 12$, $c = 2$, je $3 \cdot 2 < 2 \cdot 12$, čiže $6 < 24$.

Alebo ak $-200 > -205$ a $c = 0,01$, tak $-2 > -2,05$.

Vetu 3. môžeme vysloviť takto:

Ak násobíme obidve strany nerovnosti kladným číslom, nezmení sa znak nerovnosti. Ak násobíme obidve strany nerovnosti záporným číslom, znak nerovnosti sa zmení na opačný.

Veta 4. Ak je $a < b$, $a < b$, a $c < d$, je tiež $a + c < b + d$. Podobne keď $a > b$ a $c > d$, je aj $a + c > b + d$.

Dôkaz. Ak pričítame k obidvom stranám nerovnosti $a < b$ číslo c , dostaneme

$$a + c < b + c \quad (1)$$

Ak pripočítame k obidvom stranám nerovnosti $c < d$ číslo b , dostaneme

$$b + c < b + d \quad (2)$$

Podľa vety 1. je teda $a + c < b + d$ čo bolo treba dokázať. Veta 4. platí i pre znak $>$.

Napr. ak je $5 > 4$ a $-7,3 < -5$, tak po sčítaní $5 - 7,3 < 4 - 5$, čiže $-2,3 < -1$. Alebo ak $3 > -4$ a $3 > 2$, tak po sčítaní $-3 + 3 > -4 + 2$, čiže $0 > -2$ alebo $-2 < 0$ alebo $2 > 0$.

Hovoríme tiež: **Súhlasné nerovnosti**, to sú také, ktoré majú ten istý znak nerovnosti môžeme sčítať'.

Veta 5. Ak sú **a, b, c, d** kladné čísla, pre ktoré platia nerovnosti **a < b**, **c < d**, tak aj **ac < bd**.

Dôkaz. Pretože je **b > 0** a **c > 0**, je podľa vety 3 **ac < bc** a **bc < bd** a z toho podľa vety 1 je **ac < bd**.

Veta 5. platí aj pre znak >.

Napr. násobenie súhlasných nerovností $5 < 7$, a $\frac{1}{5} < 1$

dostávame správnu nerovnosť

$$5 \cdot \frac{1}{5} < 7 \cdot 1$$

$$1 < 7$$

Môžeme povedať, že súhlasné nerovnosti a kladnými číslami môžeme medzi sebou vynásobiť.

Veta 6. Ak pre kladné čísla **a, b** platí vzťah **a < b**, platí pre prevrátené čísla

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Dôkaz. Pretože je **a > 0** a **b > 0**, je aj **ab > 0** a $\frac{1}{ab} > 0$. Ak vynásobíme obidve strany nerovnosti **a < b** kladným číslom $\frac{1}{ab}$, dostaneme $a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}$, čiže $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$,

to znamená, že $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, ako sme mali dokázať.

Ak napr. $4 < 5$, tak je $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ čiže $0,25 > 0,2$

Alebo z nerovnosti $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ vyplýva $2 < 3$.

Veta 6. platí aj pre znak >. Veta 6. platí aj vtedy, keď sú obidve čísla **a, b** záporné.

Napr. ak je $-5 < -2$, tak $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$, to znamená $-0,2 > -0,5$ čiže aj $0,2 < 0,5$.

Riešenie lineárnej nerovnosti s jednou neznámou

Lineárne nerovnosti o jednej neznámej sú nerovnosti, ktoré majú po prípadných ekvivalentných úpravách jeden z tvarov.

$$ax + b < 0; \quad ax + b > 0; \quad (a \neq 0);$$

$$ax + b \leq 0; \quad ax + b \geq 0; \quad (a \neq 0);$$

(3)

kde $\mathbf{x}$ je neznáma $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú ľubovoľné reálne čísla, písmená vo význame čísel alebo početové výrazy, pričom $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$;

Sledujte postup nerovnosti úpravou na základný tvar.

$$3x - 4 < 2(2x - 3);$$

$$3x - 4 < 4x - 6 ;$$

$$3x - 4 - 4 + 6 < 0 :$$

$$-x + 2 < 0; \quad \setminus -1$$

$$x - 2 > 0;$$

Pri úpravách nerovností nezabúdajme na zmenu zmyslu znamienka, ak násobíme alebo delíme záporným číslom.

Riešiť lineárnu nerovnosť o jednej neznámej znamená určiť všetky čísla, ktoré po dosadení za neznámu spĺňajú danú nerovnosť alebo jej vyhovujú.

- a) Lineárnej nerovnosti $\mathbf{x} < \mathbf{a}$ vyhovuje nekonečne mnoho čísel.
b) Lineárnej nerovnosti $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$ vyhovuje číslo $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ a nekonečne mnoho čísel $\mathbf{x} < \mathbf{a}$;

Definícia: Nerovnosť prvého stupňa čiže lineárna nerovnosť s jednou neznámou má tvar (nerovnosť (3)).

Definícia : Riešením rozumieme nerovnosti všetkých čísel x , ktoré dosadené za neznámu vyhovujú nerovnosti, čiže dávajú po dosadení za neznámu správnu nerovnosť'.

Riešiť nerovnosť znamená nájsť množinu všetkých čísel x , ktoré nerovnosti vyhovujú.

Majme ešte jeden príklad na úpravu nerovnosti na základný tvar.

$$\frac{4x-5}{3} + \frac{x+3}{2} < \frac{x}{4} - \frac{x-8}{5} + \frac{1}{60}$$

Z nerovnosti odstránime najskôr zlomky tak, že ju vynásobíme 60 – mi.

$$80x - 100 + 30x + 90 < 15x - 12x - 96 + 1$$

Členy s neznámou prenesieme na ľavú stranu, ostatné členy na pravú stranu nerovnosti.

$$107x < 407$$

Nerovnosť násobíme číslom $\frac{1}{107}$ a dostaneme

$$x < 1.$$

Danej nerovnosti vyhovujú čísla x , ktoré sú menšie než jedna.

Príklad: Treba dokázať, že pre každé kladné číslo a platí nerovnosť

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Dôkaz urobíme takto:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &\geq 2; \quad a > 0 \\ a + \frac{1}{a} - 2 &\geq 0 \\ \frac{a^2 - 2a + 1}{a} &\geq 0 \\ \frac{(a - 1)^2}{a} &\geq 0 \end{aligned}$$

čo je správne pre každé $a > 0$

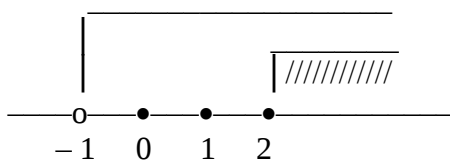
Sústava dvoch lineárnych nerovností o jednej neznámej.

Riešiť sústavu dvoch lineárnych nerovností o jednej neznámej znamená, určiť všetky čísla, ktoré zároveň vyhovujú obom daným nerovnostiam.

Pri riešení postupujeme ;

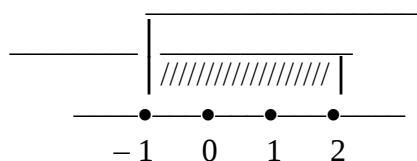
- Riešime jednotlivé nerovnosti postupom ako pri nerovnosti jeden lineárnej s jednou neznámou.
- Výsledok riešenia oboch nerovností znázorníme graficky na číselnej osi.
- Z čísel, ktoré vyhovujú zároveň obom nerovnostiam sústavy, určíme výsledok riešenia danej sústavy nerovnosti.

Sledujte postup riešenia ; nerovnosť a) sústava $x > -1$; $x \geq 2$; riešenie $x \geq 2$;

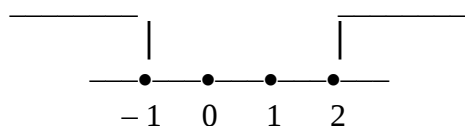


Grafické znázornenie sústavy nerovnosti na číselnej osi.

Nerovnosť b) sústava ; $x \geq -1$; $x < 2$; riešenie ; $-1 \leq x < 2$;



Nerovnosť c) sústava ; $x < -1$; $x > 2$; riešenie ; sústava nemá riešenie.



Teraz uvidíme príklad na riešenie náročnejšej sústavy ;

Príklad; nerovnosť (1) $8x - 20 \leq 3x$; nerovnosť (2) $5x + 6 < 3(x + 6)$

Riešenie nerovnosti (1)

$$8x - 20 \leq 3x$$

$$8x - 3x - 20 \leq 0$$

$$5x - 20 \leq 0$$

$$5x \leq 20 \quad / :5$$

$$x \leq 4$$

Riešenie nerovnosti (2)

$$5x + 6 < 3(x + 6)$$

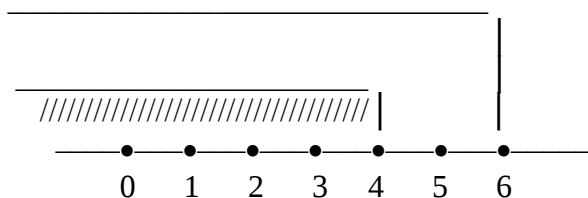
$$5x + 6 < 3x + 18$$

$$5x - 3x - 18 + 6 < 0$$

$$2x - 12 < 0$$

$$2x < 12 \quad / :2$$

$$x < 6$$



Grafické znázornenie riešenia sústavy dvoch nerovností .

Lineárna nerovnosť s neznámou v menovateli.

Pri riešení nerovnosti s neznámou v menovateli postupujeme tak, že

- určíme pre, ktoré hodnoty neznámej majú lomené výrazy zmysel.
- Prevedieme všetky členy na jednu, spravidla na ľavú stranu nerovnosti.
- Prevedieme všetky členy nerovnosti na spoločného menovateľa.
- Nerovnosti s lomeným výrazom riešime ako sústavu nerovností.

K bodu d: 1) ak platí $\frac{a}{b} > 0$; potom musí platiť $a > 0$; $b < 0$; alebo $a < 0$; $b < 0$;

Napr. $a = +6 > 0$; $b = +3 > 0$; alebo $a = -6 < 0$; $b = -3 < 0$;

2) ak platí $\frac{a}{b} < 0$; potom musí platiť $a > 0$; $b < 0$; alebo $a < 0$; $b > 0$;

Napr. $a = +6 > 0$; $b = -3 < 0$; alebo $a = -6 < 0$; $b = +3 > 0$;

Obe možnosti musíme mať vždy na pamäti a danú nerovnosť musíme preto riešiť ako dve sústavy nerovností a to buď tvaru (1) alebo tvaru (2).

Sledujte postup riešenia nerovnosti.

$$\frac{3x - 4}{2x + 1} \geq 1;$$

a) úpravou podľa bodu a) dostaneme

$$\frac{x - 5}{2x + 1} \geq 0;$$

b) Podľa vety, že ak sú deliteľ a delenec rovnakého znamienka je výsledok kladný ak je delenec a deliteľ rôzneho označenia je výsledok záporný.

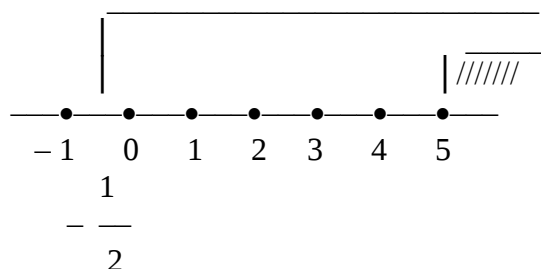
$$(1) \quad x - 5 \geq 0; \quad 2x + 1 > 0;$$

$$(2) \quad x - 5 \leq 0; \quad 2x + 1 < 0;$$

c) Riešenie je ako pri sústave nerovností o jednej neznámej. Najskôr riešime nerovnosť (1)

$$x - 5 \geq 0; \quad 2x + 1 > 0;$$

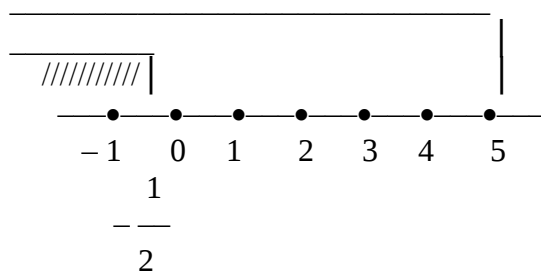
kde neznáma je $x \geq 5$; $x > -\frac{1}{2}$; a riešením je $x \geq 5$;



potom riešime nerovnosť (2)

$$x - 5 \leq 0; \quad 2x + 1 < 0;$$

kde neznáma je $x \leq 5$; $x < -\frac{1}{2}$; a riešením nerovnosti je $x < -\frac{1}{2}$;



e) Z danej nerovnosti vyhovujú všetky x , ktoré vyhovujú nerovnostiam $x \geq 5$; $x < -\frac{1}{2}$;

Lineárne nerovnosti s absolútnou hodnotou

Zopakujme si a) ak je $a \geq 0$; potom $|a| = a$;
 b) ak je $a < 0$; potom $|a| = -a$;

Pre absolútnu hodnotu $|4 - 3x|$ platí

a) Ak je $4 - 3x \geq 0$; potom $|4 - 3x| = 4 - 3x$;
 b) Ak je $4 - 3x < 0$; potom $|4 - 3x| = -(4 - 3x) = 3x - 4$;

Pri riešení lineárnej nerovnosti s absolútnou hodnotou postupujeme tak, že podľa definície absolútnej hodnoty vypíšeme z danej nerovnosti dve rôzne sústavy lineárnej nerovnosti, ktoré potom riešime ako sústavu dvoch lineárnych nerovností s jednou neznámou.

Sledujte postup riešenia nerovnosti

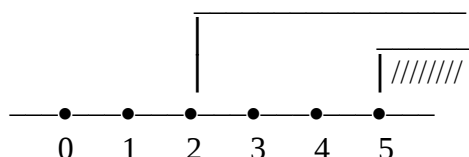
$$|x - 2| \geq 3;$$

a) Ak je $x - 2 \geq 0$; potom $|x - 2| = x - 2$;
 b) Ak je $x - 2 < 0$; potom $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$;

Ak nahradíme absolútnu hodnotu danej nerovnosti $|x - 2| \geq 3$ výrazmi a), b) potom dostaneme sústavy nerovností

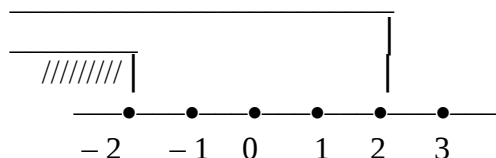
c) Ak je $x - 2 \geq 0$; potom $x - 2 \geq 3$;
 d) Ak je $x - 2 < 0$; potom $2 - x \geq 3$;

Z riešenia sústavy c) vyplýva, že $x \geq 2$; $x \geq 5$; a grafické znázornenie



teda riešením je $x \geq 5$;

Z riešenia sústavy d) vyplýva, že $x < 2$, $x \geq -1$; a grafické zobrazenie je



teda riešením je $x \geq -1$;

e) Z bodu c vyplýva, že danej nerovnosti $|x - 2| \geq 3$ vyhovujú všetky x vyhovujúce nerovnosti $x \geq 5$; alebo $x \geq -1$;

Kvadratické nerovnice

Definícia

Každú z výrokových foriem $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, nazývame **kvadratickou nerovnicou** s neznámou x .

Okrem ekvivalentných úprav pre lineárne nerovnosti robíme ešte aj

- umocnenie tým istým mocniteľom obidvoch strán nerovnice, ktoré v celom obore nerovnice nadobúdajú len nezáporné hodnoty.
- odmocníme tým istým mocniteľom obidvoch strán nerovnice, ktoré v celom obore nerovnice nadobúdajú len nezáporné hodnoty.

Rýdzokvadratická nerovnica

Uvažujme o nerovniciach tvaru $x^2 - m < 0$, $x^2 - m > 0$, $x^2 + m < 0$, $x^2 + m > 0$.
Ak kvadratická nerovnica má tvar

$$a) \quad x^2 - m < 0, \text{ kde } m > 0$$

tak po jednoduchej úprave dostaneme

$$x^2 < m, \text{ to je } |x| < \sqrt{m}$$

obor pravdivosti nerovnice teda je $P = \{x \in \mathbb{R} ; -\sqrt{m} < x < \sqrt{m}\} = (-\sqrt{m}, \sqrt{m})$.

$$b) \quad x^2 - m > 0, \text{ kde } m > 0, \text{ tak}$$

$$x^2 > m, \text{ to je } |x| > \sqrt{m}$$

obor pravdivosti teda je $P = \{x \in \mathbb{R} ; x < -\sqrt{m} \vee x > \sqrt{m}\} = (-\infty, -\sqrt{m}) \cup (\sqrt{m}, \infty)$

$$c) \quad x^2 + m < 0, \text{ kde } m > 0, \text{ tak}$$

$$x^2 < -m \quad \text{a } P = \emptyset.$$

$$d) \quad x^2 + m > 0, \text{ kde } m > 0, \text{ tak}$$

$$x^2 > -m \quad \text{a } P = \mathbb{R}$$

Podobne postupujeme pri riešení nerovnic tvaru $x^2 - m \geq 0$, $x^2 - m \leq 0$, $x^2 + m \geq 0$, $x^2 + m \leq 0$.

Príklad. Riešme v množine $\mathbb{R}$ nerovnice

$$a) \quad (x - 5)^2 < 1, \quad b) \quad (x + 3)^2 > \frac{3}{4};$$

$$\text{b) } (x-4)^2 < -\frac{9}{5}, \quad \text{d) } \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 > -19$$

Riešenie.

$$\text{a) } (x-5)^2 < 1 \Leftrightarrow |x-5| < 1$$

obor pravdivosti je $P = \{x \in \mathbb{R}; 5-1 < x < 5+1\} = \{x \in \mathbb{R}; 4 < x < 6\} = (4, 6)$

$$\text{b) } (x+3)^2 > \frac{3}{4} \Leftrightarrow |x+3| > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} P \{x \in \mathbb{R}; x < -3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \vee x > -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\} = \\ = (-\infty; -3 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (-3 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \infty) \end{aligned}$$

$$\text{c) } (x-4)^2 < -\frac{9}{5}, \quad P = \emptyset.$$

$$\text{d) } \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 > -19, \quad P = \mathbb{R}$$

Úplná kvadratická nerovnica

Postup riešenia si ukážeme na príkladoch.

Príklad. Riešme v množine $\mathbb{R}$ nerovnicu $x^2 - 5x - 6 < 0$.

Riešenie. Ekvivalentnými úpravami postupne dostaneme:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 6 &< 0 \\ x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 &< 0 \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} &< 0 \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &< \frac{49}{4} \\ \left|x - \frac{5}{2}\right| &< \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Oborom pravdivosti je } P &= \left\{x \in \mathbb{R}; -\frac{5}{2} + \frac{7}{2} < x < \frac{5}{2} + \frac{7}{2}\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 6\} = (-1; 6) \end{aligned}$$

Pri riešení sme použili metódu doplnenia na druhú mocninu dvojčlena, ktorú poznáme z riešenia kvadratických rovníc.

Danú rovnicu môžeme riešiť ešte ďalším spôsobom, použitím rozkladu kvadratického trojčlena na súčin lineárnych činiteľov.

Kvadratická rovnica $x^2 - 5x - 6$ má korene $x_1 = 6$, $x_2 = -1$, a teda platí

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

Daná kvadratická nerovnica je teda ekvivalentná s nerovnicou $(x - 6)(x + 1) < 0$, ktorej riešenie poznáme už z riešenia lineárnej nerovnosti. Metódu rozkladu kvadratického trojčlena na súčin lineárnych činiteľov možno použiť iba v tom prípade, keď diskriminant kvadratického trojčlena $D \geq 0$.

Riešenie kvadratickej nerovnosti rozkladom na súčin činiteľov.

Pri riešení nerovnosti rozkladom na súčin postupujeme tak, že

- 1) prevedieme danú nerovnosť na zodpovedajúci základný tvar $x^2 + px + q > 0$;
- 2) kvadratický trojčlen (dvojčlen) rozložíme podľa pravidiel na súčin lineárnych činiteľov tvaru

$$(x + a)(x + b) > 0 ;$$
- 3) takto upravenú nerovnosť riešime ako sústavu dvoch lineárnych nerovností o jednej neznámej.

Sledujte postup riešenia nerovnosti $x^2 - 4x - 5 < 0$

- a) rozložíme na súčin činiteľov $(x - 5)(x + 1) < 0$;
- b) podľa vety nerovnosti platí ak $(x - 5) > 0$; $(x + 1) < 0$; alebo $(x - 5) < 0$; $(x + 1) > 0$;
- c) sústava $(x - 5) > 0$; $(x + 1) < 0$; nemá žiadne riešenie
zo sústavy $(x - 5) < 0$; $(x + 1) > 0$; sme dostali riešenie $-1 < x < 5$;
- d) Riešením kvadratickej nerovnosti $x^2 - 4x - 5 < 0$ sú všetky x , pre ktoré platí
 $-1 < x < 5$;

Riešenie kvadratickej nerovnosti odmocnením.

Ak môžeme upraviť kvadratickú nerovnosť na tvar $x^2 < a$, alebo $x^2 > a$ kde a je ľubovoľné reálne číslo väčšie než nula, potom platí $|x| < \sqrt{a}$; túto nerovnosť riešime ako s absolútnou hodnotou, čiže ako lineárnu nerovnosť s absolútnou hodnotou.

Sledujte postup riešenia nerovnosti

$$2x^2 - 18 \geq 0$$

- a) Ekvivalentnými úpravami prevedieme nerovnosť na tvar

$$x^2 \geq 9 ;$$

- b) podľa vety nerovnosti $x \geq \sqrt{a}$ platí $|x| \geq 3$;
- c) riešením nerovnosti $|x| \geq 3$ podľa riešenia nerovnosti s absolútnou hodnotou dostaneme pre danú kvadratickú nerovnosť riešenie $x \geq 3$; $x \leq -3$;

Riešenie kvadratickej nerovnosti doplnením na úplný štvorec.

Ak upravíme kvadratickú nerovnosť doplnením na úplný štvorec potom nerovnosť má tvar

$$(x + a)^2 < b ; \quad (b > 0) ;$$

a odmocníme ľavú stranu nerovností a pravú stranu nerovností, potom platí

$$|x + a| < \sqrt{b} ;$$

túto nerovnosť riešime ako nerovnosť s absolútnou hodnotou.

Sledujte postup riešenia nerovností.

$$x^2 + 2x - 8 \geq 0 ;$$

- a) Nerovnosť upravíme doplnením na úplný štvorec tvaru

$$(x + 1)^2 \geq 9 ;$$

- b) podľa vety o odmocninách platí

$$|x + 1| \geq 3 ;$$

- c) Postupom riešenia ako pri kvadratickej nerovnosti s absolútnou hodnotou dosiahneme riešenie dané kvadratickou nerovnosťou $x \geq 2$; $x \leq -4$;

Diskusia riešenia lineárnych rovníc s parametrom.

Pri riešení lineárnych rovníc s parametrom používame nerovnosti k určeniu

- pre ktoré hodnoty parametru má rovnica kladný koreň
- pre ktoré hodnoty parametru má rovnica záporný koreň
- pre ktoré hodnoty parametru sa koreň rovná nule.

Postup diskusie si objasníme na riešení príkladu

$$\frac{4 - a}{a} = \frac{3}{x - 1} ;$$

- a) Zistíme za akých podmienok má rovnica zmysel.

- 1) Pre $a = 0$ nemá rovnica zmysel
 2) Pre $a = 4$ nemá rovnica riešenie
 3) Pre $a \neq 0, a \neq 4$ má rovnica koreň $x = \frac{2(a+2)}{4-a}$;

b) Ak má byť koreň rovnice kladný čiže $x > 0$; musí platiť

$$\frac{2(a+2)}{4-a} > 0;$$

Ak považujeme parametre a za neznámu potom riešime tento príklad ako nerovnicu s neznámou v menovateli a jej riešením nájdeme nerovnosti

$$-2 < a < 4;$$

Za predpokladu, že $a \neq 0$; môžeme určiť záver

4) Pre $-2 < a < 0$; $0 < a < 4$; má rovnica kladný koreň.

b) Ak má byť koreň rovnice x záporný, alebo $x < 0$, musí platiť

$$\frac{2(a+2)}{4-a} < 0;$$

Podľa vety riešenia lineárnej nerovnosti s neznámou v menovateli dostaneme nerovnosť

$$a > 4; \quad a < -2;$$

alebo platí

5) Pre $a > 4$; $a < -2$ má rovnica záporný koreň.

d) Ak má byť koreň rovnice x nulový, alebo $x = 0$ musí platiť

$$\frac{2(a+2)}{4-a} = 0$$

Riešením tejto rovnice je koreň $a = -2$ alebo platí

6) Pre $a = -2$ má rovnica koreň nulový alebo rovný nule.

d) Celkový záver diskusie riešenia rovnice je súhrn dielčích záverov 1) až 6).

Diskusia riešenia kvadratických rovníc s parametrom.

Pri riešení kvadratických rovníc s parametrom používame nerovnosti k určeniu

- a) pre ktoré hodnoty parametra má rovnica dva rôzne reálne korene,
 b) pre ktoré hodnoty parametru má jeden dvojnásobný koreň,

c) pre ktoré hodnoty parametru nemá žiaden reálny koreň.

Sledujte diskusiu riešenia rovnice

$$.ax^2 + 2x + 4 = 0 ;$$

a) Na základe riešenia obcej kvadratickej rovnice musí platiť $a \neq 0$;

Riešením koreňov x_1, x_2 dostaneme tvar

$$.x_1, x_2 = -1 \pm \frac{\sqrt{a(a-4)}}{.a} ;$$

b) Ak má mať rovnica dva rôzne korene, musí platiť

$$D = a(a-4) > 0 ;$$

Riešením kvadratických nerovností rozkladom na súčin činiteľov dostaneme tieto nerovnosti

$$.a < 0 ; \quad a > 4 ;$$

Rovnica má dva rôzne reálne korene.

c) Ak má mať rovnica jeden dvojnásobný koreň, musí platiť

$$D = a(a-4) = 0 ;$$

Riešením kvadratickej rovnice bez absolútneho člena dostaneme

1) $a = 0$; avšak podľa bodu riešenia kvadratickej rovnice musí platiť $a \neq 0$;

Sústava kvadratických nerovníc

Príklad . Nájdite všetky reálne čísla x , pre ktoré je

$$2x^2 + 5x - 7 > 0 ;$$

Diskriminant kvadratického trojčlena $2x^2 + 5x - 7$ je 81, a korene trojčlena sú $x_1 = -\frac{7}{2}$;
 $x_2 = 1$; Preto $2x^2 + 5x - 7 = 2(x + \frac{7}{2})(x - 1)$.

Tento súčin je kladný vo dvoch prípadoch :

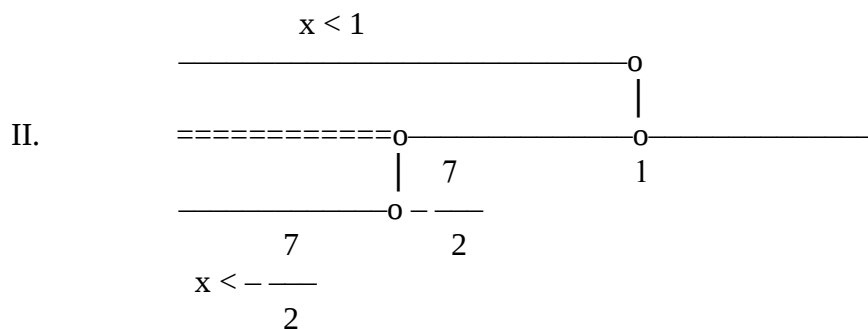
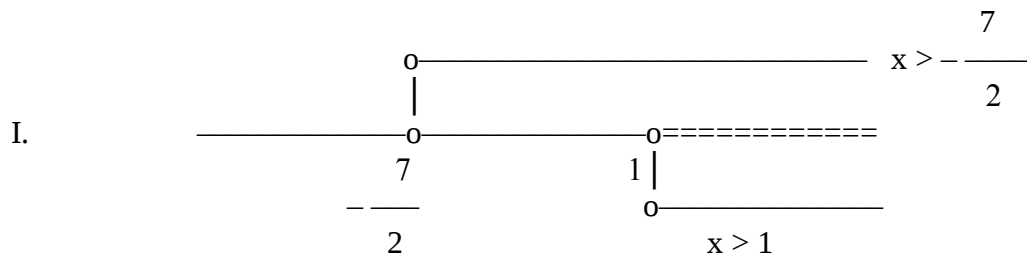
I. Ak je $2(x + \frac{7}{2}) > 0$ a pritom $x - 1 > 0$, to je ak $x > -\frac{7}{2}$ a súčasne $x > 1$.

Obe posledné nerovnice sú splnené pre $x > 1$.

II. Ak je $2\left(x + \frac{7}{2}\right) < 7$ a zároveň $x - 1 < 0$, to je ak $x < -\frac{7}{2}$ a súčasne $x < 1$.

Obe posledné nerovnice sú splnené pre $x < -\frac{7}{2}$.

$$x > -\frac{7}{2}$$



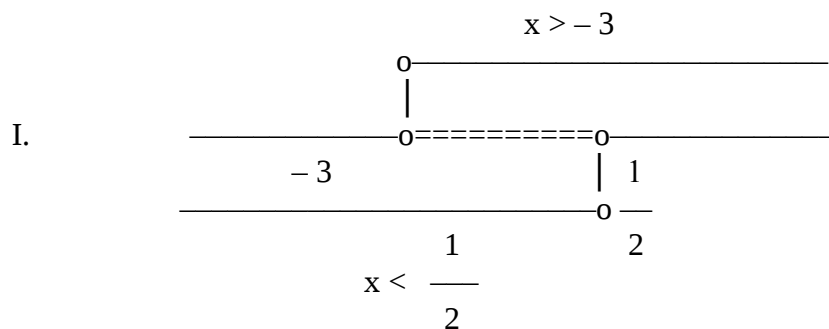
Nerovnica $2x^2 + 5x - 7 > 0$;

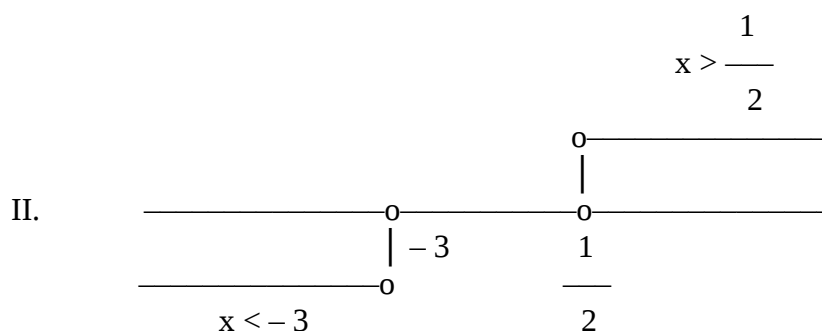
Odpoveď. Nerovnici $2x^2 + 5x - 7 > 0$ vyhovujú práve všetky čísla zjednotenia intervalov

$$\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \text{ a } (1, \infty)$$

Príklad. Nájdite všetky reálne čísla x , pre ktoré je

$$2 - 5x - x^2 > x^2 - 1;$$





Nerovnice $2 - 5x - x^2 > x^2 - 1$

Z danou nerovnicou je ekvivalentná nerovnica

$$2x^2 + 5x - 3 < 0;$$

to je nerovnica $2(x + 3)(x - \frac{1}{2}) < 0;$

a tým taktiež nerovnice $(x + 3)(2x - 1) < 0;$

Posledný vzťah platí pre tie čísla x , pre ktoré

I, buď $x + 3 > 0$ a súčasne $2x - 1 < 0$, čiže $x > -3$ a súčasne $x > \frac{1}{2}$.

to je pre všetky $x \in (-3, \frac{1}{2})$;

II. alebo $x + 3 < 0$ a súčasne $2x - 1 > 0$, čiže $x < -3$ a súčasne $x > \frac{1}{2}$

Posledné dva vzťahy nemôžu byť platné súčasne.

Odpoveď. Nerovnici $2 - 5x - x^2 > x^2 - 1$ vyhovujú všetky čísla z intervalu

$(-3, \frac{1}{2})$ a žiadne iné.

Príklad. Nájdite všetky reálne čísla x , pre ktoré platí nerovnosť

$$x - x^2 < 4x - 7 - 3x^2$$

Danú nerovnicu upravíme na tvar

$$2x^2 - 3x + 7 < 0;$$

Kvadratický trojčlen na ľavej strane nerovnice nemá reálne korene. Preto nahradíme poslednú nerovnicu k nej ekvivalentnú nerovnicu.

$$2 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 < -7 + \frac{9}{8};$$

Ktorá však asi nemá riešenie. Nerovnice $x - x^2 < 4x - 7 - 3x^2$ nemajú riešenie.

Príklad. Nájdite všetky reálne čísla vyhovujúce nerovnici

$$3x^2 + 2x > x - 5;$$

Hľadáme riešenie nerovnice

$$3x^2 + x + 5 > 0;$$

ktorá je z danou nerovnicou ekvivalentná. Pretože trojčlen na ľavej strane opäť nie je možné rozložiť, postupujeme ako v predošlom príklade.

$$3 \left(x + \frac{1}{6} \right)^2 > -5 + \frac{1}{12};$$

Nerovnosť je splnená pre všetky reálne čísla, lebo jej ľavá strana je trojnásobok (nezápornej) druhej mocniny, ale pravá strana je záporné číslo. Danú nerovnicu spĺňajú všetky reálne čísla.

Vyložili sme a ukázali na príkladoch jeden spôsob vyhľadávania riešenia kvadratických nerovníc. Ďalší spôsob, ktorým možno ľahko riešiť kvadratickú nerovnosť je kvadratická funkcia a jej graf.

Grafom kvadratickej funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde **a, b, c** sú reálne čísla **a > 0** je parabola, ktorá má osu rovnobežnú s osou **y** a ktorej vrchol má zo všetkých bodov najmenšiu druhú súradnicu ako vidíme na obrázku.

Ak má kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ reálne korene **x₁, x₂** (zvolíme označenie tak, aby $x_1 < x_2$), pretína graf funkcie f , $f(x) = ax^2 + bx + c$ osu **x** práve v bodoch **x₁, x₂**. Ak má trojčlen dvojnásobný koreň **x₀** a ak nemá trojčlen reálne korene, nemá graf žiadne spoločné body s osou **x**, čo znamená, že celý leží v **hornej** polovine nad osou **x**, Obr. A,b,c.

Obr. A,b,c

Majme kvadratickú nerovnicu $ax^2 + bx + c > 0$, ($a > 0$). Ak ju označíme $f(x) = ax^2 + bx + c$, máme teda za úlohu nájsť všetky reálne čísla, pre ktoré funkcia f nadobúda kladné hodnoty. Stačí iba vyriešiť rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ a ostatné vyčítame z grafu.

- 1) Ak má rovnica reálne korene $x_1 < x_2$ je $f(x) > 0$ (to je, že $ax^2 + bx + c > 0$) pre všetky x , ktoré ležia vo vnútri intervalu $\langle x_1; x_2 \rangle$, pre $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$.
- 2) Ak má rovnica dvojnásobný koreň x_0 je $f(x) > 0$ pre všetky $x \neq x_0$ potom riešením nerovnice je zjednotenie $(-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$.
- 3) Ak nemá rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ reálne korene, je vždy $f(x) > 0$, to je , že nerovnici vyhovujú všetky reálne čísla.

Opačná nerovnosť $ax^2 + bx + c \leq 0$, ($a > 0$) by v prípade

- 1) vyhovovala všetkým číslam $x \in \langle x_1; x_2 \rangle$,
- 2) iba číslu x_0
- 4) nemala by riešenie.

Keby v danej nerovnici bol koeficient a záporný a nechceli by sme ho upraviť (násobením záporným číslom), stačí si uvedomiť, že grafom funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ je pre $a < 0$ opäť parabola, ale **opačne orientovaná** obr. A,b,c.

Pri častejšom riešení, není potrebné grafy kvadratických funkcií kresliť, stačí ak si ich predstavíme. Týmto spôsobom vyriešime kvadratickú nerovnicu vlastne hneď po nájdení koreňov kvadratického trojčlena (alebo hneď po výpočte diskriminanta ak je záporný). Korene trojčlena sme museli hľadať i pri výpočtu prvým spôsobom, kedy však bolo treba ešte previesť rozklad trojčlena.

Ešte treba podotknúť, že postup nie je iba odvodzovanie z obrázkov, pred ktorým obyčajne matematická učebnica varuje, ale celkom presne určuje korene kvadratického trojčlena a obrázkov používame iba k ľahšiemu vybaveniu známych (ľahšie dokázateľných) vlastností kvadratickej funkcie. Táto kombinácia výpočtu a názornej predstavy je často veľmi užitočná a nemá zmysel sa jej vyhýbať. Tak napr. vedomosťou grafu lineárnych funkcií ba sme mohli použiť pri hľadaní riešenia lineárnych nerovnic a ich sústav ale tu je číslo matematicky postup jednoduchší.