

Neurčité rovnice

Diofantické rovnice prvého stupňa.

Vedomosti deliteľnosti celých čísel využijeme k tomu, aby sme našli celočíselné riešenie rovníc a sústav s celočíselnými koeficientami o niekoľkých neznámych. Názov rovníc je odvodený od mena gréckeho matematika Diofanta, ktorý prvý takéto rovnice riešil. Celkovo sa nazývajú **neurčité**, lebo majú spravidla nekonečne mnoho rôznych riešení.

Najjednoduchšie diofantické rovnice sú rovnice prvého stupňa, ktorý má tvar

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ sú celé čísla, pričom $a_i \neq 0$; pre $i = 1, 2, \dots, n$ a $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú neznáme.

Niektoré diofantické rovnice prvého stupňa majú celočíselné riešenie, iné nie.

Veta 1. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby diofantická rovnica (1) mala celočíselné riešenie, je

$$b = k \cdot D(a_1, a_2, \dots, a_n);$$

kde k je celé číslo.

Všeobecný tvar diofantickej (neurčitej) rovnice prvého stupňa o dvoch neznámych x, y je

$$ax + by = c \quad (2)$$

kde a, b, c sú celé čísla pričom čísla a, b sú rôzne od nuly.

Riešením tejto rovnice rozumieme usporiadanú dvojicu celých čísel (x_0, y_0) , pre ktoré platí $ax_0 + by_0 = c$. Riešiť túto rovnicu, znamená nájsť množinu všetkých jej riešení. Ak $c = 0$, potom má diofantická rovnica nekonečne veľa celočíselných riešení.

Riešením rovnice

$$ax + by = 0 \quad (3)$$

sú usporiadané dvojice celých čísel, ktoré majú tvar

$$x = Bt, \quad y = -At \quad (4)$$

kde t je ľubovoľné celé číslo $A = \frac{a}{d}, \quad B = \frac{b}{d}, \quad d = \text{NSD}(a, b)$.

NSD je (najmenší spoločný deliteľ daných čísel)

Diofantická rovnica (2) ak $c \neq 0$ je riešiteľná v celých číslach vtedy a len vtedy, keď

$$d = \text{NSD}(a, b) \text{ je deliteľom čísla } c$$

Najväčší spoločný deliteľ čísel a, b musí byť deliteľom čísla c .

2

Ak táto podmienka nie je splnená, potom diofantická rovnica (2) nie je celých číslach riešiteľná.

Ak má diofantická rovnica (2) jedno celočíselné riešenie, potom má celočíselných riešení nekonečne mnoho.

Ak je (x_0, y_0) jedno celočíselné riešenie rovnice (2), potom každé jej riešenie (x, y) dostaneme v tvare

$$.x = x_0 + Bt, \quad y = y_0 - At \quad (5)$$

kde t je ľubovoľné celé číslo.

Riešenie jednej diofantickej lineárnej rovnice s 3 a viacerými neznámymi je podobné riešeniu rovníc s dvoma neznámymi.

Pri riešení slovných úloh vedúcich k riešeniu diofantických rovníc bývajú dané ďalšie podmienky, ktoré vymedzujú len konečný počet riešení.

Niektoré zaujímavé úlohy vedú k riešeniu systému diofantických rovníc.

$$.a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$.a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

Riešením tohto systému budeme nazývať takú usporiadanú trojicu čísel (x_0, y_0, z_0) , pre ktorú platia súčasne výroky:

$$.a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$$

$$.a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$$

Ak je jedna z rovníc systému neriešiteľná, nemôže byť riešiteľný ani systém. Ak sú obidve rovnice riešiteľné, systém môže byť neriešiteľný.

Riešenie diofantických rovníc vyššieho stupňa je oveľa zložitejšie ako riešenie lineárnych rovníc.

Na ukážku nám poslúži niekoľko vyriešených príkladov.

Príklad: Riešte v celých číslach diofantickú rovnicu $12x - 8y = 0$;

Riešenie: Máme rovnicu tvaru (3). Vypočítame najväčší spoločný deliteľ $d = \text{NSD}(12, -8) = 4$
Riešením danej rovnice podľa (4) sú všetky dvojice, ktoré majú tvar

$$.x = Bt, \quad y = -At, \quad \text{kde } A = \frac{.a}{.d}, \quad B = \frac{b}{d};$$

$$\text{teda } x = \frac{-8}{4}t = -2t, \quad y = -\frac{12}{4}t = -3t, \quad \text{kde } t \text{ je ľubovoľné celé číslo.}$$

V nasledujúcej tabuľke je uvedených niekoľko dvojíc celých čísel (x, y) , ktoré sú riešením našej rovnice.

.t	0	1	-1	2	-2
.x	0	-2	2	-4	4
.y	0	-3	3	-6	6

Skúška správnosti. Na ľavej strane po dosadení za x, y dostávame $12(-2t) - 8(-3t) = 0$. Pravá strana sa rovná tiež nule. Riešenie danej rovnice teda môžeme vyjadriť v tvare

$x = -2t$, $y = -3t$ alebo v tvare $x = 2t$, $y = 3t$, pretože t je ľubovoľné celé číslo, a to kladné, nula alebo záporné.

Príklad: Vyjadrite číslo 6 v tvare $15x + 6y$.

Riešenie: Na základe zadania úlohy sformujeme rovnicu na tvar

$$15x + 6y = 6$$

NSD(15, 6) = 3 a číslo 3 je deliteľom čísla 6 potom úloha je riešiteľná v obore celých čísel $\mathbb{Z}$.

Pre čísla 15 a 6 použijeme Euklidov algoritmus

$$15 = 6 \cdot 2 + 3$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0$$

Z prvej rovnice máme $3 = 15 + 6(-2)$ a dosadíme to do druhej rovnice

$$6 = [15 + 6(-2)] \cdot 2$$

$$6 = 15 \cdot 2 + 6(-4)$$

teda $x_0 = 2$, $y_0 = -4$; Zo zápisu (5) vyplýva, že riešením danej úlohy budú (x, y) kde $x = 2 + 2t$, $y = -4 - 5t$; $t \in \mathbb{Z}$.

Skúška správnosti. Po dosadení za $x = 2 + 2t$, $y = -4 - 5t$ do výrazu $15x + 6y$ dostaneme

$$15(2 + 2t) + 6(-4 - 5t) = 6$$

Za písmeno t môžeme dosadiť postupne čísla 0,1,2,3 atď.

Príklad: Nájdite aspoň jednu dvojicu celých čísel diofantickej rovnice

$$31x + 27y = 1 \tag{1}$$

Riešenie: Rovnica je riešiteľná v celých číslach, ak NSD(31, 27) je deliteľom čísla 1.

Najmenší spoločný deliteľ týchto čísel je číslo 1. Teda číslo 1 je deliteľné číslom 1. Na riešenie využijeme Euklidov algoritmus pre čísla 31 a 27.

$$31 = 27 \cdot 1 + 4 \tag{2}$$

$$27 = 4 \cdot 6 + 3 \tag{3}$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \tag{4}$$

Z rovnosti (2) dostaneme:

$$4 = 31 + 27 \cdot (-1) \tag{5}$$

Z rovnosti (3) dostaneme:

$$3 = 27 + 4 \cdot (-6) \tag{6}$$

Z rovnosti (4) dostaneme:

$$1 = 4 + 3 \cdot (-1) \tag{7}$$

Do (7) dosadíme postupne (5) a (6) a úpravou dostaneme.

$$1 = 31 + 27 \cdot (-1) + \{27 + [31 + 27 \cdot (-1)] \cdot (-6)\} \cdot (-1) = \\ = 31 + 27 \cdot (-1) + 27 \cdot (-1) + 31 \cdot 6 + 27 \cdot (-6)$$

teda

$$1 = 31 \cdot 7 + 27 \cdot (-8) \quad (8)$$

Porovnaním (8) s rovnicou (1) dostaneme $x_0 = 7$, $y_0 = -8$; Toto je riešenie našej rovnice. Ďalšie riešenia majú tvar

$$x = x_0 + Bt, \quad y = y_0 - At;$$

kde t je ľubovoľné celé číslo, $B = \frac{b}{d}$, $A = \frac{a}{d}$; $d = \text{NSD}(a, b)$. V našom prípade $d = 1$, $B = 27$, $A = 31$. Množina všetkých riešení rovnice (1) má tvar

$$x = 7 + 27t, \quad y = -8 - 31t, \quad \text{kde } t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dosadením do ľavej strany rovnice dostaneme:

$$31 \cdot (7 + 27t) + 27 \cdot (-8 - 31t) = 1$$

Pravá strana rovnice sa rovná tiež jednej, z čoho vyplýva, že $x = 7 + 27t$, $y = -8 - 31t$ sú riešením danej rovnice.

Príklad: Nech a, b sú nesúdeliteľné čísla a (x_0, y_0) je jedno z množiny všetkých celočíselných riešení rovnice

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Potom čísla } x = x_0 - bt, \quad y = y_0 + at \quad (2)$$

Pre ľubovoľné celé číslo t ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) tvoria množinu všetkých celočíselných riešení rovnice (1).

Dôkaz: Nech (x_0, y_0) je ľubovoľné celočíselné riešenie rovnice (1). Potom odčítaním rovníc

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax_0 + by_0 + c &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{dostaneme} \quad ax - ax_0 + by - by_0 &= 0 \\ \text{z čoho vznikne} \quad a(x_0 - x) & \\ y - y_0 &= \frac{a(x_0 - x)}{b} \end{aligned} \quad (4)$$

Pretože $y - y_0$ je celé číslo a čísla a, b sú nesúdeliteľné, musí byť $x_0 - x$ deliteľné číslom b , teda číslo $x_0 - x$ má tvar

$$x_0 - x = bt \quad (5)$$

.kde t je celé číslo. Potom rovnica (4) má tvar

$$.y - y_0 = \frac{abt}{b}$$

po úprave dostaneme

$$.y - y_0 = at \quad (6)$$

takže z (5) a (6) dostaneme

$$.x = x_0 - bt, \quad y = y_0 + at \quad (7)$$

Tým sme dokázali, že množina všetkých celočíselných riešení (x, y) má tvar (2). Ostáva ešte dokázať, že každá dvojica čísel (x_1, y_1) , ktorú dostaneme zo vzťahov (2) pre celé číslo $t = t_1$, bude riešením rovnice (3). Aby sme si to overili, dosadíme hodnoty $x_1 = x_0 - bt$, $y_1 = y_0 + at$ do ľavej strany rovnice (1)

$$.ax_1 + by_1 + c = ax_0 - abt_1 + by_0 + abt_1 + c = ax_0 + by_0 + c$$

Pretože (x_0, y_0) je riešenie rovnice (1), $ax_0 + by_0 + c = 0$, a tak

$$.ax_1 + by_1 + c = 0 \quad (8)$$

to znamená, že (x_1, y_1) je riešenie rovnice (1). Naše tvrdenie sa potvrdilo.

Diofantické rovnice druhého stupňa.

Teraz sa budeme zaoberať diofantickými rovnicami druhého stupňa, to znamená, rovnice tvaru

$$.f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (9)$$

kde f je polynóm (mnohočlen) druhého stupňa s celočíselnými koeficientami a budeme hľadať ich celočíselné riešenia. Môže sa stať, že diofantická rovnica má konečný alebo nekonečný počet riešení, ale sa môže stať, že rovnica nemá riešenie.

Obecná teória diofantických rovníc druhého stupňa je pomerne zložitá, preto sa obmedzíme iba na niektoré špeciálne typy, ktoré sa ľahko riešia.

Diofantickú rovnicu druhého stupňa o dvoch neznámych x, y možno uviesť na tvar

$$(ax + by + c)(dx + ey + f) = m \quad (10)$$

kde a, b, c, d, e, f, m sú celé čísla, a ak má sústava

$$\begin{aligned} ax + by + c &= r \\ dx + ey + f &= s \end{aligned}$$

kde r, s sú združené deliteľné čísla m , celočíselné riešenie. Toto riešenie je taktiež riešením rovnice (10). Rovnica (10) má potom najviac toľko celočíselných riešení, koľko je rôznych deliteľov čísla m . Takýchto riešení je teda buď konečný počet alebo nemá riešenie žiadne.

Príklad: Máme nájsť všetky pravouholníky (obdĺžniky alebo štvorce), ktorých strany majú veľkosť v celých centimetroch a ktorých obsah (v cm^2) je rovný obvodu (v cm).

Riešenie: Ak x, y značia rozmery hľadaného pravouholníka, je xy jeho obsah a $2(x + y)$ je jeho obvod. Úloha vedie k rovnici

$$xy = 2(x + y)$$

ktorú môžeme upraviť na tvar $xy - 2x - 2y = 0$ alebo $(x - 2)(y - 2) = 4$;
Ak sú r, s združené delitele čísla 4, musia byť pre čísla x, y

$$. x - 2 = r ; \quad y - 2 = s ;$$

$$\text{potom dostaneme} \quad x = r + 2 ; \quad y = s + 2 ;$$

Všetky riešenia danej rovnice môžeme zostaviť do tabuľky:

r	1	2	4	-1	-2	-4
s	4	2	1	-4	-2	-1
x	3	4	6	1	0	-2
y	6	4	3	-2	0	1

Danej úlohe potom vyhovujú len tie riešenia, ktoré sú kladné. Existujú práve dva pravouholníky, ktoré majú požadovanú vlastnosť. Obdĺžnik o rozmeroch 3 cm a 6 cm i štvorec o strane dlhšej 4 cm.

Príklad: Cena tovaru bola zvýšená o p percent. O koľko percent je treba cenu tovaru zase znížiť, aby klesla na pôvodnú cenu? Ako je potrebné voliť celé číslo p , aby výsledkom bolo zase celé číslo?

Riešenie: Jej pôvodná cena x Sk jej zvýšená cena je $x(1 + \frac{p}{100}) = y$ Sk

Ak znížime túto cenu o q percent, dostaneme $y(1 - \frac{q}{100}) = x(1 + \frac{p}{100})(1 - \frac{q}{100})$ Sk

Táto dvakrát zmenená cena ma byť rovná pôvodnej cene, čo znamená, že má byť

$$.x(1 + \frac{p}{100})(1 - \frac{q}{100}) = x$$

z toho pre čísla **p, q** vyplýva rovnica

$$(100 + p)(100 - q) = 10\,000.$$

Ak majú byť čísla **p, q** celé, musia byť čísla $100 - q$, $100 + p$ združenými deliteľmi čísla 10 000. Pre našu úlohu majú význam iba kladné čísla **p, q**.

Pre tieto čísla musí byť $100 + p > 100 - q > 0$. Obmedzíme sa preto len na také združené delitele čísla 10 000, ktoré túto podmienku spĺňajú.

Výsledok zostavíme do tabuľky:

100 + p	10000	5000	2500	2000	1250	1000	625	500	400	250	200	125
100 - q	1	2	4	5	8	10	16	20	25	40	50	80
p	9900	4900	2400	1900	1150	900	525	400	300	150	100	25
q	99	98	96	95	92	90	84	80	75	60	50	20

Praktický význam môžu mať ovšem iba hodnoty v posledných dvoch stĺpcoch tabuľky.

Lahko sa taktiež riešia diofantické rovnice druhého stupňa o dvoch neznámych **x, y**, ktoré možno napísať v tvare

$$.ax^2 + bx + c = my \quad (11)$$

kde **a, b, c, m** sú celé čísla, pričom **a ≠ 0, m ≠ 0**.

Veta: Ak má rovnica (11) jedno celočíselné riešenie, má ich nekonečne mnoho.

Dôkaz: Predpokladajme, že (x_0, y_0) je riešenie rovnice (11), to znamená, že

$$.ax_0^2 + bx_0 + c = my_0$$

Potom pre ľubovoľné celé číslo t platí

$$\begin{aligned} .a(x_0 + mt)^2 + b(x_0 + mt) + c &= ax_0^2 + bx_0 + c + 2amtx_0 + am^2t^2 + bmt = \\ &= m(y_0 + 2atx_0 + amt^2 + bt). \end{aligned}$$

To však znamená, že $(x_0 + mt, y_0 + 2atx_0 + amt^2 + bt)$ je taktiež celočíselné riešenie rovnice (11). Pretože t môže nadobudnúť akúkoľvek číselnú hodnotu, plynie z toho, že rovnica (11) má nekonečne mnoho riešení.

Poznámka. Nech pri delení čísla x_0 číslom m vychádza nenulový podiel q a zvyšok r , to znamená, nech $x_0 = mq + r$, kde $0 \leq r < |m|$. Ak je x_0 prvá zložka niektorého riešenia rovnice (11), je $r = x_0 - mq$ podľa dôkazu vety taktiež prvá zložka niektorého riešenia

rovnice (11), pričom $0 \leq r < |m|$.

Inými slovami: ku každému riešeniu (x_0, y_0) rovnice (11) existuje také riešenie (r, s) tejto rovnice, pre ktoré je $0 \leq r < |m|$.

Z toho vyplýva spôsob ako nájdeme všetky riešenia rovnice (11). Dosadzujeme do rovnice (11) postupne všetky čísla r , pre ktoré je $0 \leq r < |m|$, a nájdeme medzi nimi tie, pre ktoré je ľavá strana rovnice (11) násobkom čísla m . Takýchto pokusov je konečný počet. Ostatné riešenia potom majú prvú zložku $x = r + mt$.

Príklad: Nájdite všetky riešenia rovnice $x^2 + 5 = 7y$;

Riešenie: Vyskúšame všetky čísla x , pre ktoré je $0 \leq x < 7$. Zistíme, že pre $x = 3$ a pre $x = 4$ je

$$\begin{array}{ll} 3^2 + 5 = 7y, & 4^2 + 5 = 7y \\ 9 + 5 = 7y & 16 + 5 = 7y \\ 14 = 7y & 21 = 7y \\ 14 = 7 \cdot 2 & 21 = 7 \cdot 3 \end{array}$$

ale pre ostatné x nedostaneme násobky siedmimi. Všetky riešenia potom majú prvú zložku tvaru $3 + 7t$, popr. $4 + 7t$. Dosadíme do danej rovnice $x = 3 + 7t$, vyjde $y = 2 + 6t + 7t^2$;

Ak dosadíme za $x = 4 + 7t$, vyjde $y = 3 + 8t + 7t^2$.

Napriek tomu rovnica

$$x^2 + 4 = 7y$$

nemá riešenie, lebo žiadne x , pre ktoré je $0 \leq x < 7$, po dosadení do ľavej strany nedáva násobok siedmimi.

Príklad: Ak máme nájsť všetky celočíselné riešenia rovnice $5x^2 - 3x + 10 = 12y$;

Je potrebné vyskúšať všetky x , pre ktoré je $0 \leq x < 12$. Toto šetrenie najefektívnejšie predvedieme v nasledujúcej tabuľke.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
$5x^2$	0	5	20	45	80	125	180	245	320	405	500	605
$3x$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
$5x^2 - 3x$	0	2	14	36	68	110	162	224	296	378	470	572
$5x^2 - 3x + 10$	10	12	24	46	78	120	172	234	306	388	480	582

Z čísel v poslednom riedku sú násobky 12 – tých tieto čísla 12, 24, 120, 480 a v poradí zodpovedajú týmto hodnotám pre x : 1, 2, 5, 10. Pre $x = 1 + 12t$ je $y = 1 + 7t + 60t^2$;
Pre $x = 2 + 12t$ je $y = 2 + 17t + 60t^2$; pre $x = 5 + 12t$ je $y = 10 + 47t + 60t^2$.

Z diofantckých rovníc druhého stupňa o dvoch neznámych x, y si ešte všimnime rovnice

$$x^2 - dy^2 = 1;$$

kde d je kladné celé číslo. Táto rovnica z pravidla nazývaná **Pellova**.

Ak má Pellova rovnica riešenie (x_0, y_0) , je samozrejmé, že má taktiež ďalšie riešenie

$$(-x_0, y_0), (x_0, -y_0), (-x_0, -y_0).$$

Preto sa môžeme obmedziť na hľadanie nezáporných riešení Pellovej rovnice.

Ak je číslo d druhou mocninou celého čísla, to znamená, že ak je $d = n^2$, kde $n > 0$, má rovnica tvar

$$.x^2 - n^2y^2 = 1 ;$$

alebo

$$.(x + ny)(x - ny) = 1 ;$$

Tomuto možno vyhovieť kladnými číslami iba tak, že

$$.x + ny = 1 \quad \text{a taktiež} \quad x - ny = 1 ;$$

z toho plynie $x = 1, y = 0$. Pellova rovnica má v tomto prípade jediné nezáporné riešenie $(1, 0)$.

Ak není číslo d druhou mocninou celého čísla, dá sa dokázať, že Pellova rovnica na aspoň jedno kladné riešenie.

Veta: Pellova rovnica má v prípade, že číslo d není druhou mocninou celého čísla, nekonečne mnoho kladných riešení.

Dôkaz: Nech je (x_0, y_0) kladné riešenie Pellovej rovnice, to znamená, že pre čísla je

$$.x_0^2 - dy_0^2 = 1 ;$$

alebo

$$(x_0 + y_0\sqrt{d})(x_0 - y_0\sqrt{d}) = 1 ;$$

Na základe binomickej vety dostaneme, že pre každé kladné celé číslo k je

$$(x_0 + y_0\sqrt{d})^k = x_1 + y_1\sqrt{d} ; \quad (x_0 - y_0\sqrt{d})^k = x_1 - y_1\sqrt{d} ;$$

kde x_1, y_1 sú vhodné kladné celé čísla. Potom je taktiež

$.x_1^2 - dy_1^2 = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) = (x_0 + y_0\sqrt{d})^k (x_0 - y_0\sqrt{d})^k = (x_0^2 - dy_0^2)^k = 1^k = 1$;

takže (x_1, y_1) je ďalšie kladné riešenie Pellovej rovnice.

Ak sa nám podarí uhádnuť jedno kladné riešenie (x_0, y_0) Pellovej rovnice, dostaneme nekonečne mnoho ďalších kladných riešení (x_1, y_1) na základe výpočtu

$$(x_0 + y_0\sqrt{d})^k = x_1 + y_1\sqrt{d} ;$$

kde k je kladné celé číslo. Ak čísla x_0, y_0 značia najmenšie kladné celé čísla, ktoré vyhovujú Pellovej rovnici, dá sa dokázať, že uvedeným postupom dostaneme všetky jej riešenia.

Príklad: Máme riešiť rovnicu $x^2 - 2y^2 = 1$

Riešenie: Budeme náhodne hľadať dvojicu najmenších kladných celých čísel, ktoré budú tejto rovnici vyhovovať. Rovnicu prepíšeme do iného tvaru

$$x^2 = 2y^2 + 1;$$

a budeme postupne skúšať kladné celé číslo y tak dlho, pokiaľ nedostaneme druhú mocninu celého čísla. Pre $y = 1$ je $2y^2 + 1 = 3$ čo není druhá mocnina celého čísla. Ale $y = 2$ je $2y^2 + 1 = 9 = 3^2$. Hľadané najmenšie kladné riešenie je teda $x_0 = 3$, $y_0 = 2$.

Ďalšie riešenie potom dostaneme takto:

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2};$$

takže (17, 12) je ďalšie kladné riešenie. Podobne dostaneme

$$(3 + 2\sqrt{2})^3 = (17 + 12\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 99 + 70\sqrt{2};$$

$$(3 + 2\sqrt{2})^4 = (99 + 70\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 577 + 408\sqrt{2}; \text{ atď. Teda ďalšie kladné riešenie je}$$

dvojica čísel (99, 70), (577, 408) atď.

Ešte sa zmienime o niekoľkých diofantických rovniciach druhého stupňa o troch neznámych x, y, z . Na prvom mieste to bude rovnica

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{12}$$

ktorá sa nazýva **Pythagorova**. Obmedzíme sa opäť o hľadanie jej kladného riešenia. Geometrický význam tohto riešenia je známy: sú to veľkosti strán pravouhlého trojuholníka, ktoré sa dajú vyjadriť celými číslami.

Predovšetkým je jasné toto: Ak je (x_0, y_0, z_0) jedno riešenie Pythagorovej rovnice, je taktiež každé celočíselné **k trojice** (kx_0, ky_0, kz_0) ich riešením.

Môžeme sa teda obmedziť iba na hľadanie takých riešení, v ktorých x, y, z sú navzájom nedeliteľné čísla. Tieto čísla sú potom dokonca po dvoch navzájom nedeliteľné. Keby totiž napríklad čísla x, y mali spoločného deliteľa $d > 1$, to znamená, keby bolo $x = dp, y = dq$, potom by muselo byť $z^2 = d^2(p^2 + q^2)$, takže i pre číslo z by muselo byť $z = dr$, kde $r \in \mathbb{C}$.

Podobne by tomu bolo, keby niektoré iné dve z čísel x, y, z mala spoločného deliteľa $d > 1$. Z čísel x, y, z musí teda byť aspoň jedno nepárne. Nemôžu však byť nepárne všetky tri a taktiež nemôže byť nepárne práve jedno.

Keby tomu tak bolo, potom by na jednej strane rovnice (12) bolo nepárne a na druhej párne číslo. Musia byť teda z čísel x, y, z dve nepárne a jedno párne. Čísla x, y však obe nepárne nemôžu byť, lebo súčet druhých mocnín dvoch nepárnych čísel nemôže byť druhou mocninou celého čísla. Môžeme teda predpokladať, že je číslo z nepárne a z čísel x, y jedno párne a druhé nepárne. Označenie môžeme voliť tak, aby x bolo nepárne a y párne. Potom môžeme rovnicu (12) prepísať do tvaru

$$y^2 = (z + x)(z - x) \tag{13}$$

Pretože sú čísla x, z navzájom nedeliteľné, je $D(x + z, x - z) = 2$.
Rovnicu (13) je teda možno splniť iba tak, že je

$$.z + x = 2u^2$$

$$.z - x = 2v^2$$

kde u, v sú navzájom nedeliteľné čísla a $u > v$. Z toho dostaneme

$$.x = u^2 - v^2 ; \quad z = u^2 + v^2 ;$$

Aby čísla x, z boli nepárne, musia byť z čísel u, v jedno nepárne a druhé párne.
Potom

$$.y = 2uv.$$

Dokázali sme teda túto vetu:

Veta: Všetky riešenia Pythagorovej rovnice (12) kladnými navzájom nedeliteľnými
. číslami x, y, z dostaneme podľa vzorcov

$$.x = u^2 - v^2 ; \quad y = 2uv ; \quad z = u^2 + v^2 ;$$

kde u, v sú navzájom nedeliteľné čísla, z ktorých jedno je nepárne a druhé je párne
. a pre ktoré je $u > v$.

Niekoľko riešení Pythagorovej rovnice pre malé hodnoty u, v je uvedených v tabuľke.

u	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8
v	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	7
.x	3	5	15	7	21	9	25	11	45	33	13	63	55	39	15
.y	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	112
.z	5	13	17	25	29	41	37	61	49	65	85	65	73	89	113

Ďalšie kladné riešenie dostaneme, ak násobíme všetky zložky uvedených riešení ľubovoľným číslom $k > 0$.

Často sa vyskytujú úlohy vedúce k rovnici

$$\frac{1}{.x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

ktorú môžeme prepísať na tvar

$$.xy - xz - yz = 0 ;$$

(14)

Pri riešení budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcich prípadoch.

Ak upravíme rovnicu (14) na tvar

$$(x - z)(y - z) = z^2 \quad (15)$$

dostaneme všetky jej kladné riešenia , ak zapíšeme

$$.x - z = tu^2 ; \quad y - z = tv^2 ; \quad (16)$$

kde **t, u, v** sú kladné celé čísla. Z toho vychádza

$$.z^2 = t^2 u^2 v^2, \text{ z čoho dostaneme } z = tuv ;$$

Z podmienok (16) potom dostaneme

$$.x = tu(u + v) ; \quad y = tv(u + v) ;$$

Ak sa chceme sústrediť na riešenie, ktorých zložky sú navzájom nedeliteľné čísla, musí byť **.t = 1** a čísla **u, v** musia byť navzájom nedeliteľné. Pre malé hodnoty **u, v** potom dostaneme tieto riešenia.

u	1	2	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6
v	1	1	1	2	1	3	1	2	3	4	1	2
.x	2	6	12	15	20	28	30	35	40	45	42	66
.y	2	3	4	10	5	21	6	14	24	36	7	55
.z	1	2	3	6	4	12	5	10	15	20	6	30

Príklad: Starí Egyptáni počítali väčšinu so zlomkami, ktorých čitateľ je 1, a zlomky s čitateľom 2 rozkladali na súčet dvoch zlomkov s čitateľom 1 a s rôznymi menovateľmi.

Na staroegyptských papyrusech boli uvedené tabuľky, podľa ktorých sa takéto výpočty počítali.

$$\frac{1}{.x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

ktorú môžeme postupne upravovať takto:

$$2xy - xz - yz = 0 ;$$

$$4xy - 2xz - 2yz = 0 ;$$

$$(2x - z)(2y - z) = z^2$$

Posledná rovnica má ten istý tvar ako (15) s tým rozdielom, že miesto **x, y** je **2x, 2y**. Podľa predchádzajúceho príkladu z toho vyplýva

$$2x = tu(u + v); \quad 2y = tv(u + v); \quad z = tuv ;$$

Aby sme dostali riešenie, ktorého zložky sú navzájom nedeliteľné čísla, je treba voliť $t = 1$ a za u, v dosadiť navzájom nedeliteľné nepárne čísla.

Niektoré riešenia podáva tabuľka.

u	1	3	5	5	7	7	7	9	9	9
v	1	1	1	3	1	3	5	1	5	7
.x	1	6	15	20	28	35	42	45	63	72
.y	1	2	3	12	4	15	30	5	35	56
.z	1	3	5	15	7	21	35	9	45	63

Podľa tabuľky je napríklad

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}; \quad \frac{2}{9} = \frac{1}{45} + \frac{1}{5};$$

ale taktiež $\frac{2}{9} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6}$ atď.

Príklad: S dvoma kladnými číslami sme previedli tieto operácie.

- 1.) sčítali sme ich
- 2.) odčítali od väčšieho čísla číslo menšie
- 3.) vynásobili sme ich
- 4.) vydělili väčšie číslo menším

Keď sme výsledky sčítali, dostali sme číslo 243. Nájdite dve pôvodné čísla.

Riešenie: Ak je väčšie číslo x a menšie y potom

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243;$$

Obe strany rovnice vynásobíme číslom y , potom odstránime zátvorky a sčítame odpovedajúce členy.

$$\text{Dostaneme } x(2y + y^2 + 1) = 243y \text{ ale } 2y + y^2 + 1 = (y + 1)^2 \text{ preto}$$

$$x = \frac{243y}{(y + 1)^2};$$

Aby x bolo celé číslo, musí byť menovateľ $(y + 1)^2$ jedným z deliteľov čísla 243 (pretože čísla y a $y + 1$ sú vždy nedeliteľné). Vieme, že $243 = 3^5$ a teda 243 môže byť deliteľné inými druhými mocninami než číslami 1, 3^2 alebo 9^2 . Číslo $(y + 1)^2$ sa musí rovnať 1, 3^2 , 9^2 . Ale y musí byť kladné číslo, preto je buď rovné 8 alebo 2.

Potom x je

$$\frac{243 \cdot 8}{81}; \quad \text{alebo} \quad \frac{243 \cdot 2}{9};$$

Hľadané čísla sú teda buď 24 a 8 alebo 54 a 2.

Diofantické rovnice tretieho stupňa.

Súčet tretích mocnín troch celých čísel sa môže rovnať tretej mocnine štvrtého čísla. Napríklad : $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, čo značí, že kocky jednotlivých čísel sa rovná kocke štvrtého čísla, čo je vidieť na obrázku.

Skúsme nájsť ďalšie vzťahy rovnakého tvaru: to je nájdime riešenie rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3$$

Je lepšie označiť neznámu u symbolom – t . Potom má rovnica jednoduchší tvar

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3$$

Hľadáme postup, ktorý nám umožní nájsť nekonečne mnoho riešení tejto rovnice v oboru celých čísel kladných i záporných. Nech a, b, c, d a $\alpha, \beta, \chi, \delta$ sú štvorice celých čísel splňujúcich našu rovnicu. K číslam prvej štvorice pričítajme nejaký k – násobok čísel druhej štvorice. Pokúsime sa vybrať číslo k tak aby výsledné čísla

$$a + k\alpha, b + k\beta, c + k\chi, d + k\delta;$$

opäť splňala našu rovnicu. Teda vyberieme k tak aby platila rovnosť

$$(a + k\alpha)^3 + (b + k\beta)^3 + (c + k\chi)^3 + (d + k\delta)^3 = 0$$

po umocnení dostaneme

$$3a^2k\alpha + 3ak^2\alpha^2 + 3b^2k\beta + 3bk^2\beta^2 + 3c^2k\chi + 3ck^2\chi^2 + 3d^2k\delta + 3dk^2\delta^2 = 0$$

alebo

$$3k [a^2\alpha + b^2\beta + c^2\chi + d^2\delta + k(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\chi^2 + d\delta^2)] = 0$$

Súčin je rovný nule iba vtedy ak aspoň jeden s činiteľov sa rovná nule.

Ak dáme činiteľom hodnotu nula, dostaneme pre **k** dve hodnoty. Prvá hodnota je **k = 0**, ktorá pre nás nie je zaujímavá. Druhú hodnotu dostaneme z vzťahu

$$.k = \frac{.a^2\alpha + b^2\beta + c^2\chi + d^2\delta}{.a\alpha^2 + b\beta^2 + c\chi^2 + d\delta^2}$$

Ak poznáme dve štvorice čísel, ktoré vyhovujú základnej rovnici, potom sme schopní nájsť novú štvoricu. Stačí k číslam prvej štvorice pričítať **k – násobky** druhej štvorice, kde **k** .vypočítame podľa uvedeného vzorca.

Aby sme mohli použiť postup, ktorý sme práve uviedli, musíme poznať dve štvorice čísel splňujúcich základnú rovnicu. Jednu už máme (3, 4, 5, – 6). Ako nájsť druhú?

Východisko zo situácie je, že ako druhú štvoricu čísel použijeme čísla r, – r, s, – s, pričom r, a s, sú ľubovoľné celé čísla, ktoré spĺňajú taktiež základnú rovnicu.

$$\begin{aligned} \text{Teda: } & a = 3; \quad b = 4; \quad c = 5; \quad d = -6; \\ & .\alpha = r; \quad \beta = -r; \quad \chi = s; \quad \delta = -s; \end{aligned}$$

Potom **k** dostaneme jednoduchým výpočtom

$$.k = \frac{-7r - 11s}{7r^2 - s^2} = \frac{7r + 11s}{7r^2 - s^2}$$

čísla $a + k\alpha$, $b + k\beta$, $c + k\chi$, $d + k\delta$ sa postupne rovnajú

$$\begin{aligned} .x &= \frac{28r^2 + 11rs - 3s^2}{7r^2 - s^2}; & y &= \frac{21r^2 - 11rs - 4s^2}{7r^2 - s^2}; \\ .z &= \frac{35r^2 + 7rs + 6s^2}{7r^2 - s^2}; & t &= \frac{-42r^2 - 7rs - 5s^2}{7r^2 - s^2}; \end{aligned}$$

Vzhľadom k tomu, čo sme teraz odvodili, tieto štyri výrazy spĺňajú pôvodnú rovnicu

$$.x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0;$$

Pretože všetky výrazy majú rovnaký menovateľ, môžeme ho vynechať teda:

$$\begin{aligned} .x &= 28r^2 + 11rs - 3s^2 \\ .y &= 21r^2 - 11rs - 4s^2 \\ .z &= 35r^2 + 7rs + 6s^2 \\ .t &= -42r^2 - 7rs - 5s^2 \end{aligned}$$

Našej rovnici vyhovujú ľubovoľné r i s . O tom sa môžete presvedčiť tak, že výrazy umocníme na tretiu a sčítame. Dosadením rôznych čísel za hodnoty r, s dostaneme celú radu riešení našej rovnice. Ak dostaneme čísla so spoločným deliteľom, môžeme ním čísla vydeliť.

Napr. pre $r = -1$, a $s = 1$ dostaneme pre x, y, z, t hodnoty $36, 6, 48, -54$ a po vydelení číslom 6 získame hodnoty $6, 1, 8, -9$;

Z toho

$$6^3 + 1^3 + 8^3 = 9^3$$

Uvedieme ešte ďalšie rovnosti tohto typu.

Pre $r = 1 ; s = 2 ;$	$38^3 + 73^3 = 17^3 + 76^3$
$.r = 1 ; s = 3 ;$	$17^3 + 55^3 = 24^3 + 54^3$
$.r = 1 ; s = 5 ;$	$4^3 + 110^3 = 67^3 + 101^3$
$.r = 1 ; s = 4 ;$	$8^3 + 53^3 + 29^3 = 50^3$
$.r = 1 ; s = -1 ;$	$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$
$.r = 1 ; s = -2 ;$	$2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$
$.r = 2 ; s = -1 ;$	$29^3 + 34^3 + 44^3 = 53^3$

Poznamenajme, že ak zmeníme v pôvodnej štvorici $3, 4, 5, -6$ alebo v jednej z nových štvoríc poradie jednotlivých čísel a použijeme ten istý postup, dostaneme novú množinu riešení. Napr. $3, 5, 4, -6$ znamená, že $a = 3, b = 5, c = 4, d = -6$ a dostaneme pre x, y, z, t výrazy

$$\begin{aligned} .x &= 20r^2 + 10rs - 3s^2 \\ .y &= 12r^2 - 10rs - 5s^2 \\ .z &= 16r^2 + 8rs + 6s^2 \\ .t &= -24r^2 - 8rs - 4s^2 \end{aligned}$$

Z čoho dostaneme pre rôzne hodnoty r a s množinu nových vzťahov.

Pre $r = 1 ; s = 1 ;$	$9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$
$.r = 1 ; s = 3 ;$	$23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3$
$.r = 1 ; s = 5 ;$	$5^3 + 163^3 + 164^3 = 206^3$
$.r = 1 ; s = 6 ;$	$7^3 + 54^3 + 57^3 = 70^3$
$.r = 2 ; s = 1 ;$	$23^3 + 97^3 + 86^3 = 116^3$
$.r = 1 ; s = -3 ;$	$3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3$

atď.

Takýmto spôsobom získame nekonečne mnoho riešení danej rovnice.