

Objem a povrch telies

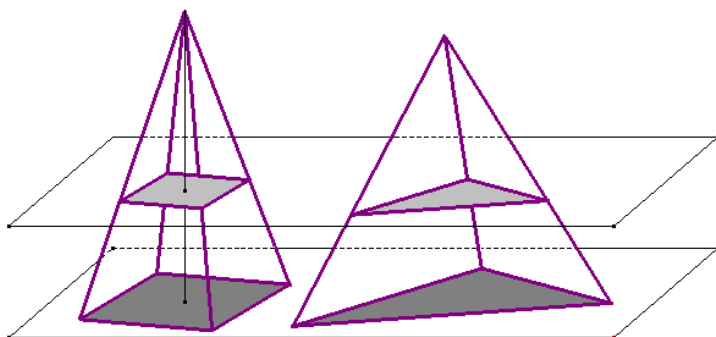
Určovanie objemov telies je jedným z najčastejších a najstarších použití geometrie v praxi. Pomocou objemu telies môžeme napr. určiť skladovaciu kapacitu rôznych priestorov alebo nádob, hmotnosť predmetov a mnohé ďalšie údaje.

Objem telies má tieto vlastnosti :

1. Zhodné telesá majú rovnaké objemy.
2. Ak teleso T_1 je podmnožinou telesa T_2 , tak $V_1 \leq V_2$.
3. Ak teleso T je zjednotením dvoch telies T_1 a T_2 , ktoré nemajú spoločné vnútorné body, tak objem telesa T je súčtom objemov telies T_1 a T_2 .
4. **Objem kolmého hranola** je súčinom obsahu podstavy a výšky, t.j. $V = P \cdot v$
5. **Cavalieriho princíp :**

Ak pre telesá T_1 a T_2 existuje taká rovina ρ , že každá rovina s ňou rovnobežná pretína telesá T_1 a T_2 v útvaroch s rovnakým obsahom, tak telesá majú rovnaký objem.

Cavalieriho princíp znázorňuje nasledujúci obrázok :



Povrch telesa je definovaný ako miera jeho hranice. Zjednodušene povedané, povrch telesa je súčtom obsahov všetkých jeho stien (resp. plôch, ktoré teleso ohraničujú).

Mnohosten je teleso, ktorého všetky steny sú mnohoúhelníky. Existuje iba 5 druhov pravidelných mnohostenov : štvor-

sten, šesťsten – **kocka**, osemsten, dvanásťsten – všetky jeho steny sú pravidelné päťuholníky a dvadsaťsten.

Rotáčne teleso vznikne rotáciou nejakého rovinného útvaru okolo osi rotácie.

Označenie :

V – objem telesa P – obsah podstavy v – výška telesa r, ρ – polomer podstavy
 S – povrch telesa Q – obsah plášt'a a, b, c – hrany telesa s – strana kužeľa
 $s = \sqrt{r^2 + v^2}$

Objem a povrch hranolov

Hranol je teleso, ktoré má dve rovnobežné steny – zhodné mnohoúhelníky, ktoré nazývame **podstavy**. Ostatné steny nazývame **bočné steny**, spolu tvoria **plášť** telesa. Všetky bočné steny hranola sú štvoruholníky. Všetky bočné steny **kolmého hranola** sú obdĺžniky. Prieniky susedných stien telesa sa nazývajú **hrany**. Hrany telies delíme na podstavné hrany – sú stranami podstáv – a bočné hrany. **Pravidelný hranol** je kolmý hranol, ktorého podstavy sú pravidelné mnohoúhelníky. **Kváder** je kolmý hranol, ktorého podstavy sú pravouhelníky. **Ravnobežnosten** je štvorboký hranol, ktorého protíahlé steny sú rovnobežné.

Vzorce na výpočet povrchu a objemu hranolov :

	povrch	objem
kocka	$S = a^2$	$V = a^3$
kváder	$S = 2(ab + bc + ac)$	$V = a \cdot b \cdot c$
hranol	$S = 2P + Q$	$V = P \cdot v$

Úlohy :

- Dĺžka telesovej uhlopriečky kocky je $3\sqrt{6}$ cm. Vypočítajte
 - dĺžku hrany kocky
 - objem kocky
 - povrch kocky.
- O koľko percent sa zväčší
 - objem
 - povrch kocky, ak hranu kocky predĺžime o 15 % ?
- Objem kvádra so štvorcovou podstavou je 64 cm^3 . Odchýlka telesovej uhlopriečky od roviny podstavy je 45° . Vypočítajte objem a povrch kvádra.
- Dĺžky hrán kvádra sú v pomere $a:b:c = 2:3:4$, ich súčet je 13,5 m. Vypočítajte objem a povrch kvádra.
- Vypočítajte objem a povrch pravidelného šesťbokého (osembokého) hranolu, ak dĺžka podstavnej hrany je $a = 4 \text{ cm}$ a výška telesa $v = 6 \text{ cm}$.
- V bazéne tvaru kvádra je 150 m^3 vody. Určte rozmery dna, ak jeden rozmer je o 4 m väčší ako druhý a hĺbka vody je 250 cm.
- Kvetináč má tvar kvádra s rozmermi $60 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, hrúbka steny je 3,5 cm. Vypočítajte jeho hmotnosť, ak hustota materiálu z ktorého je vyrobený, je 2 g.cm^{-3} .
- Na postavenie 80 m dlhého násypu, ktorého prierezom je rovnoramenný lichobežník so základňami 5m a 7m a ramenami dĺžky 2,6 m, treba doviest' zeminu. Koľko jász musí urobiť nákladné auto, ak odvezie 12 m^3 zeminu ?
- Ako vypočítame objem kvádra, ak poznáme obsah všetkých jeho stien, ale nepoznáme dĺžky hrán ?
- 10*. Vytvorte papierové modely pravidelného dvanásťstenu a dvadsaťstenu.

Objem a povrch ihlanu a zrezaného ihlanu

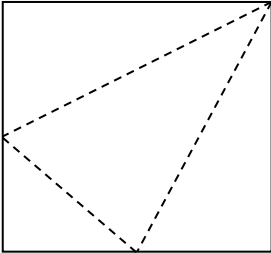
Ihlan je teleso, ktoré má len jednu podstavu – mnohoúholník – a hlavný vrchol, ktorý neleží v rovine podstavy. **Zrezaný ihlan** je prienik ihlanu s polpriestorom, ktorého hraničná rovina je rovnobežná s podstavou ihlanu. Zrezaný ihlan má dve podstavy, bočné steny sú lichobežníky. Vzdialenosť podstáv, resp. podstavy a hlavného vrcholu, je **výška telesa**. Hranoly a ihlany patria medzi mnohosteny.

Vzorce na výpočet povrchu a objemu ihlanov :

	povrch	objem
ihlan	$S = P + Q$	$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot v$
zrezaný ihlan	$S = P_1 + P_2 + Q$	$V = \frac{1}{3} v \cdot (P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2)$

Úlohy :

- Pravidelný štvorboký ihlan má podstavnú hranu $a = 6 \text{ cm}$ a výšku $v = 4 \text{ cm}$. Vypočítajte
 - objem a povrch telesa
 - uhol bočnej steny a roviny podstavy
 - dĺžku bočnej hrany ihlanu.
- Kocka ABCDEFGH má hranu $a = 6 \text{ cm}$. Vypočítajte objem a povrch ihlanu ABCDH.

- 3***. Vytvorte papierový model kocky zložený z troch zhodných štvorbokých ihlanov.
- 4.** Vypočítajte objem a povrch pravidelného štvorbokého (šesťbokého) ihlanu s podstavou hranou $a = 6$ cm, ak uhol bočnej hrany a roviny podstavy je 60° (45° alebo 30°).
- 5.** Vypočítajte objem a povrch pravidelného šesťbokého ihlanu, ak poznáte dĺžku podstavnej hrany $a = 3$ m a bočnej hrany $b = 6$ m.
- 6.** Odvodte vzorce pre objem a povrch pravidelného štvorbokého ihlanu, ak poznáte
- uhol bočnej steny ϕ s rovinou podstavy a veľkosť podstavnej hrany a
 - uhol bočnej hrany ϕ s rovinou podstavy a veľkosť podstavnej hrany a
 - uhol bočnej steny ϕ s rovinou podstavy a veľkosť bočnej hrany b .
- 7***. Predchádzajúcu úlohu riešte pre pravidelný šesťboký ihlan.
- 8***. Odvodte vzorce pre objem a povrch
- pravidelného štvorstenu
 - pravidelného osemstenu s podstavou hranou a .
- 9.** Kváder ABCDEFGH má hrany $a = 3$ cm, $b = 4$ cm a $c = 5$ cm. Vypočítajte objem a povrch trojbokého ihlanu ACDE.
- 10.** Na obr. je papierový štvorec so stranou $a = 12$ cm. Ak papier prehnete pozdĺž čiarkovaných čiar, vytvoríte model ihlanu. Vypočítajte jeho povrch a objem.
- 
- 11.** Pravidelný zrezaný štvorboký ihlan má podstavné hrany $a_1 = 6$ cm a $a_2 = 4$ cm. Vypočítajte jeho objem a povrch, ak poznáte
- výšku zrezaného ihlanu $v = 3$ cm
 - uhol bočnej steny $\phi = 60^\circ$ s rovinou podstavy
 - uhol bočnej hrany $\phi = 60^\circ$ s rovinou podstavy.
- 12.** Hore otvorená plechová nádrž má tvar pravidelného zrezaného štvorbokého ihlanu, ktorý stojí na menšej podstave. Podstavné hrany sú $a_1 = 1$ m a $a_2 = 2,2$ m, výška je $v = 0,8$ m. Vypočítajte objem nádrže a hmotnosť prázdnej nádrže, ak je vyrobená z plechu, ktorého 1 m² má hmotnosť 13 kg.
- 13***. Výška v pravidelného štvorbokého ihlanu je zhodná s dĺžkou jeho podstavnej hrany a (napr. 1 m). Ako vysoko nad rovinou podstavy musíme rozrezať ihlan rovnobežne s rovinou podstavy, aby obe telesá mali
- rovnaký objem
 - rovnaký obsah plášťa.
- 14.** Pravidelný zrezaný šesťboký ihlan má podstavné hrany $a_1 = 12$ m a $a_2 = 4$ m. Jeho objem je 26 m³. Vypočítajte výšku zrezaného ihlanu.
- 15.** Vzorce na výpočet objemov (ale aj povrchov) mnohých telies poznali už aj starovekí Egypťania. Poznali aj vzorec na výpočet objemu pravidelného štvorbokého ihlanu ? Svoju odpoveď odôvodnite.
- 16***. Odvodte vzorec na výpočet objemu zrezaného pravidelného štvorbokého ihlanu, ktorý má podstavné hrany dlhé a , b ($a > b$) a výšku v . Pomôcka : použite podobnosť

Objem a povrch valca, kužeľa a rotačného kužeľa

Valec je **rotačné teleso**, ktoré vznikne rotáciou obdĺžnika okolo jednej jeho strany. **Kužeľ** vznikne rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jednej jeho odvesny. Úsečka, ktorá spája vrchol kužeľa s obvodom podstavy, sa nazýva **strana kužeľa**. Rotáciou pravouhlého lichobežníka okolo kratšieho ramena vznikne **zrezaný kužeľ**.

Vzorce na výpočet povrchu a objemu rotačných telies :

	plášť	povrch	objem
valec	$Q = 2\pi r \cdot v$	$S = 2\pi r (r + v)$	$V = \pi r^2 \cdot v$
kužeľ	$Q = \pi r s$	$S = \pi r (r + s)$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v$
zrezaný kužeľ	$Q = \pi (r_1 + r_2) \cdot s$	$S = P_1 + P_2 + Q$	$V = \frac{1}{3}\pi v \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$

Vzorce na výpočet objemu a obsahu plášťa rotačných telies sa dajú odvodiť pomocou tzv. integrálneho počtu (seminár z matematiky pre 4. ročník)

Úlohy :

- Koľko valcových sudov s priemerom 0,8 m a výškou 1,5 m treba na vyprázdnenie cisterny tvaru valca s priemerom 1,6 m a dĺžkou 4,5 m ?
- Máme dva valce z rovnakého materiálu. Výška prvého je dvakrát väčšia ako výška druhého, ale priemer len polovičný. Aký je pomer ich hmotností ?
- Určte rozmery valcovej nádoby s objemom 5 litrov, ak jej výška je polovicou polomeru podstavy. Vypočítajte aj obsah plášťa.
- Osovým rezom valca je obdĺžnik s uhlopriečkou dlhou 20 cm. Výška valca je dvakrát väčšia ako priemer podstavy. Vypočítajte objem a povrch valca.
- Teleso na obrázku vzniklo odrezaním časti valca. Najvyšší bod leží 28 cm nad rovinou podstavy, najnižší bod je 20 cm nad rovinou podstavy. Priemer podstavy je 10 cm. Vypočítajte objem telesa.
- Vypočítajte objem a povrch rotačného kužeľa, ktorý vznikol rotáciou rovnostranného trojuholníka so stranou $a = 6$ dm okolo osi jedného jeho uhla.
- Vypočítajte objem a povrch rotačného kužeľa s výškou 100 cm, ak odchýlka jeho strany od roviny podstavy je $\varphi = 30^\circ$.
- 8***. Zistite pomer objemov (pomer obsahov plášťov) rotačných kužeľov, ktoré vzniknú rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jeho odvesien, ak odvesny majú rôzne dĺžky.
- Vypočítajte objem a povrch rotačného kužeľa, ktorého plášť
 - je polkruh s polomerom $r = 6$ cm
 - je kruhový výsek s polomerom $r = 30$ cm a stredovým uhlom $\alpha = 120^\circ$
 - má dvakrát väčší obsah ako podstava, pričom výška kužeľa je $v = 12$ cm.
- Aký hlboký je pohár tvaru rovnostranného kužeľa s objemom 3 dl ?
- Vypočítajte objem, obsah plášťa a povrch zrezaného rotačného kužeľa, ak poznáte
 - polomery podstáv $a_1 = 60$ cm, $a_2 = 20$ cm a výšku telesa $v = 96$ cm
 - polomery podstáv $a_1 = 30$ cm, $a_2 = 15$ cm a dĺžku strany $s = 25$ cm
 - polomery väčšej podstavy $a_1 = 2,7$ m, výšku $v = 2,4$ m a stranu $s = 2,5$ m.



12. Zistíte objem kužeľov, z ktorých boli odrezané zrezané kužele z predchádzajúcej úlohy.
13. Vypočítajte objem, obsah plášt'a a povrch zrezaného rotačného kužeľa, ktorého dolná je opísaná podstave kocka a horná podstava je vpísaná do podstavy kocky s hranou a.
14. Zhora otvorená nádrž má tvar zrezaného rotačného kužeľa, ktorý stojí na menšej podstave. Objem nádrže je 465 m^3 , polomery podstáv sú 4 m a 3 m. Vypočítajte hĺbku nádrže.
15. Povrch zrezaného rotačného kužeľa je $S = 7697 \text{ m}^2$, priemery podstáv sú 56 m a 42 m. Vypočítajte výšku telesa.
- 16*. Kužeľ rozrežeme rovinou rovnobežnou s jeho podstavou na dve telesá s rovnakým objemom. Aký bude pomer strán týchto telies ?

Guľa a jej časti

Rotáciou kruhu okolo priemeru vznikne **guľa**. **Guľový odsek** je prienik gule s polpriestorom, ktorého hraničná rovina obsahuje kruhový rez gule. Zakrivená časť povrchu guľového odseku (plášť) sa nazýva **guľový vrchlík**.

Vzorce na výpočet povrchu a objemu gule a jej častí :

	plášť	povrch	objem
guľa		$S = 4\pi r^2$	$V = \frac{4\pi r^3}{3}$
guľový odsek	$Q = 2\pi r \cdot v$		$V = \frac{\pi v(3\rho^2 + v^2)}{6}$
	kde r je polomer gule, z ktorej odsek vznikol a ρ je polomer podstavy guľového odseku		

Úlohy :

1. Železná guľa má hmotnosť 100 kg. Vypočítajte jej objem, polomer a povrch, ak hustota železa je $\rho = 7,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^3$.
2. Dutá guľa má objem 3432 cm^3 , hrúbka steny je 3 cm. Vypočítajte vnútorný polomer gule.
3. Jedna guľa je vpísaná do kocky s hranou a, druhá je kocke opísaná. Vypočítajte pomer objemov (povrchov) guľí.
4. Odvodte vzorec na výpočet a) objemu gule, ak poznáme povrch gule
b) povrch gule, ak poznáme objem gule
5. Zlatý kalich má tvar polgule s priemerom $r = 12 \text{ cm}$. Jeho stopku tvorí dutý kužeľ vysoký 8 cm s priemerom podstavy 6 cm. Vypočítajte
a) objem kalicha (bez stopky)
b) koľko dm^2 zlatého plechu treba na vytvorenie kalicha (minimálne množstvo)

6. Pre dané guľové odseky doplňte tabuľku :

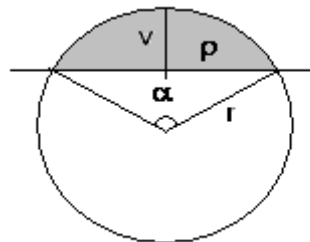
polomer podstavy	výška odseku	polomer gule, z ktorej odsek vznikol
$\rho = 5 \text{ cm}$	$v = 1 \text{ cm}$	$r = ?$
$\rho = 4 \text{ m}$	$v = ?$	$r = 5 \text{ m}$
$\rho = ?$	$v = 18 \text{ cm}$	$r = 25 \text{ cm}$

Pre každý guľový odsek vypočítajte objem, obsah podstavy aj guľového vrchlíku.

7. Vypočítajte povrch guľového odseku vysokého 3 cm, ak jeho objem je $141,4 \text{ cm}^3$.

8. Vypočítajte objem guľového odseku, ak poznáte

- polomer podstavy odseku $\rho = 10 \text{ cm}$
a stredový uhol $\alpha = 120^\circ$
- polomer gule, z ktorej odsek vznikol $r = 12 \text{ m}$
a stredový uhol $\alpha = 90^\circ$.



9. Plynojem tvorí valec vysoký 16 m s priemerom 28 m, ktorý je hore uzavretý guľovým vrchlíkom. Stred guľovej plochy je 4 m nad horným okrajom valca. Vypočítajte objem plynojemu.

10*. Vypočítajte, koľko percent povrchu Zeme tvoria

- polárne pásma
- mierne pásma
- tropické pásma

Hranice pásiem tvoria rovnobežky $66^\circ 33'$ (polárne kruhy) a $23^\circ 27'$ (obratníky).

Zem považujte za guľu s polomerom $r = 6370 \text{ km}$.

11. Akú veľkú časť zemského povrchu vidí kozmonaut z kozmickej lode vo výške $h = 350 \text{ km}$ nad Zemou ?

12*. Nádooba tvaru polgule je do polovice svojho objemu naplnená vodou. Aká je hĺbka vody v nádobe ? Vyjadrite ako násobok polomeru nádoby.

13*. V programovacom jazyku PASCAL napíšte program, ktorý umožní užívateľovi vybrať si z menu niektoré rotačné teleso (valec, guľa alebo kužeľ), a po zadaní rozmerov telesa vypočíta objem a povrch telesa. V programe musí byť použitý príkaz *case*.



Autor učebného textu :

Beata Hegerová
Gymnázium Nováky

Pomôcky :

Program **JHmatika** (freeware) – matematické výpočty z rôznych oblastí – program v českom jazyku môžete stiahnuť napr. zo stránky www.stahuj.cz

Použitá literatúra :

Božek Miloš : Matematika pre 2. ročník gymnázia – Základy geometrie v priestore
Smida Jozef – Božek Milan – Odvárko Oldřich : Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník gymnázia