

15. Postupnosť

Postupnosť je funkcia definovaná na **množine prirodzených čísel** alebo na jej časti.

- môže byť - **konečná** $D = N$
- **nekonečná** $D \subset N$

$f : y = 3x - 1$	$a : y = 3n - 1$	$n = \{1, 2, 3, 4\}$	
$f(1) = 2$	$a(1) \longrightarrow$	$a_1 = 2$	členy postupnosti
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ funkcia	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ postupnosť	$a_2 = 5$	
		$a_3 = 8$	
		$a_4 = 11$	

rôzne zápisy členov:

1. **vymenovaním členov**

2, 5, 8, 11 ...

2. **predpisom**

$$a : y = 3n - 1$$

$$\{3n - 1\}_{n=1}^4 \rightarrow \text{konečná postupnosť}$$

$$\{3n - 1\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \text{nekonečná postupnosť}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$a_n = 3n - 1$$

Postupnosť daná rekurentne (spätne)

- postupnosť je daná rekurentne ak je daný niektorý člen postupnosti (zvyčajne 1. člen) a predpis, ako pomocou predchádzajúceho člena vypočítame nasledujúci

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 3$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 15$$

Určenie rekurentného vzťahu z a_n člena

Pr.

$$\left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad - \text{ nájdi rekurentný vzťah}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} \quad / \cdot a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_1 = 0,5$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}$$

Pr. 2

$$\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n+3 - 2n-1 = 2 \quad / \quad + a_n$$

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 2n+1$$

$$a_{n+1} = 2n+3$$

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = 2 + a_n$$

Určenie a_n – člena z rekurentného vzťahu

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 6$$

$$a_4 = 8$$

$$a_n = 2n$$

Graf postupnosti

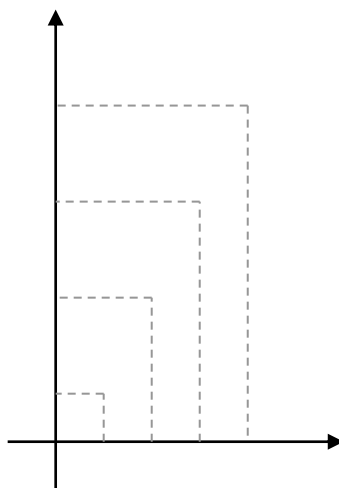
$$\{a_n\}_{n=1}^4, \quad a_n = 2n-1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 5$$

$$a_4 = 7$$



- grafom postupnosti je množina izolovaných bodov

Vlastnosti postupnosti

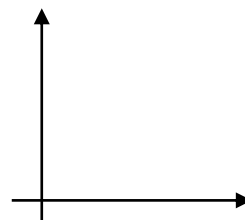
Monotónnosť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

je rastúca $\Leftrightarrow \forall n \in N, a_n < a_{n+1}$

je klesajúca $\Leftrightarrow \forall n \in N, a_n > a_{n+1}$

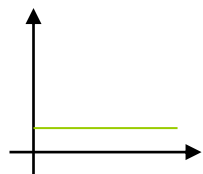
je konštantná $\Leftrightarrow \forall n \in N, a_n = a_{n+1}$



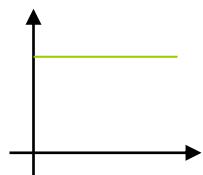
je nerastúca $\Leftrightarrow \forall n \in N, a_n \geq a_{n+1}$

je neklesajúca $\Leftrightarrow \forall n \in N, a_n \leq a_{n+1}$

Ohraničenosť postupnosti



$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola $\Leftrightarrow \exists d, \forall n \in N, a_n \geq d$



$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora $\Leftrightarrow \exists h, \forall n \in N, a_n \leq h$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená $\Leftrightarrow$ ohraničená zhora aj zdola

Limita postupnosti

Pr.

$$\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

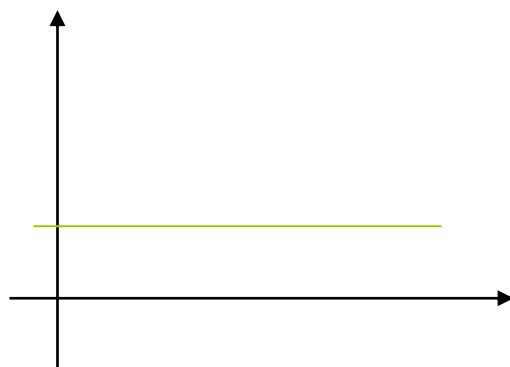
$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 1,5$$

$$a_3 = 1,3$$

$$a_4 = 1,25$$

$$a_{100} = 1,01$$



- je klesajúca
- zhora ohraničená 2
- zdola ohraničená 1

- s rastúcimi n sa členy postupnosti blížia k číslu 1, hovoríme, že postupnosť má **limitu 1**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

všeobecne: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

- ak postupnosť má limitu je **konvergentná**, ak ju nemá je **divergentná**
- každá postupnosť má najviac jednu limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$$