# Postupnosti

## História

Už od dávna sa ľudia snažili rôznymi formami usporiadať čísla a neskoršie i iných matematických objektov ako telesá, obrazce a pod. Robili tak z dôvodu praktickej potreby i z dôvodov rekreačných.

Najstaršie zachovalej počtovnici Ahmesovej z XVIII stor. pred n. l. nachádzame úlohy, ktoré svedčia o určitých vedomostiach z aritmetickej postupnosti a počítanie s nimi. Taktiež i klinové zápisy na hlinených babylonských doštičkách svedčia o tom, že Babylončania mali určité vedomosti o postupnostiach už v dobe druhého tisícročia pred naším letopočtom. Veľký prínos v rozvoji náuky o postupnostiach zaznamenali práce gréckych matematikov. Ich prínosom bol vznik a rozvoj pojmu nekonečnej postupnosti a limity súčtov členov tejto postupnosti.

Trojuholníkovým číslom bolo nazývané číslo tvaru $\frac{1}{2}(n+1)$ kde $n = 1,2,3...$

Číslo trojuholníkové je súčtom **n** radov a bodov usporiadaných do trojuholníka. Zvláštnym prípadom trojuholníkových čísel bolo číslo 10 ( pre n = 4). Pytagorejci ho nazývali tetraktys. Vedeli sčítať postupnosť prirodzených čísel, párnych i nepárnych. Archimedes poznal súčet štvorcov prvých **n** prirodzených čísel. Súčet členov geometrickej postupnosti bol známi i Euklidovi. Postupnosťou obvodu **n** – uholníkov kružnice opísaných a vpísaných použil Archimedes pri obvode kruhu.

Dôležitý jednotiaci pohľad na postupnosti zaviedol svojimi prácami Brook Taylor (1685 – 1731) žijúci v Londýne a Colin Moc Laurin (1698 – 1746) v Edinburgu. Uskutočnili obecný rozvoj funkcii v súčet členov postupnosti, ktoré za určitých podmienok boli konvergentné. Vedecky podloženú podobu dostala náuka o postupnostiach začiatkom 19. storočia prácami českého matematika Bernarda Bolzana a francúzskeho matematika Louis Augustina Cauchyho. Stala sa neodmysliteľnou súčasťou a nástrojom pri štúdiu funkcii, analýze a v iných oboroch matematiky.

## Pojem postupnosti

**Postupnosťou** nazývame každú funkciu, ktorej obor definície je množina všetkých prirodzených čísel. Hodnoty tejto funkcie nazývame členmi postupnosti, a to hodnotu v čísle **1** nazývame **prvým členom** , hodnotu v čísle **2** nazývame **druhým členom**, hodnotu v čísle **3** **tretím členom,** atď. Ak členy postupnosti sú čísla, hovoríme o **číselnej postupnosti**, ak členy postupnosti sú funkcie , hovoríme o **postupnosti funkcií**, a pod. Pre číselnú postupnosť používame iba pomenovanie postupnosť. Preto pod postupnosťou budeme rozumieť číselnú postupnosť.

**Definícia**. Ak priradíme každému prirodzenému číslu **n** podľa nejakého pravidla určité číslo, ktoré označíme napríklad $a_n$ , dostaneme číselnú postupnosť, ktorú označujeme obecne

$$.a_1, a_2, a_3, \dots \; a_n, \qquad (1)$$

Číslo $a_n$ nazveme **n – tým členom postupnosti (1).** Členy postupnosti nemusia byť navzájom rôzne, to znamená, že **m** a **n** sú prirodzené čísla pričom $m \neq n$ ale môže byť aj $m = n$. V prípade, že $m \neq n$ , hovoríme postupnosti (1), že je jednoduchá ale postupnosť

1,1,2,2,3,3...

.už jednoduchá nie je.

**Poznámka.** Postupnosť (1) môžeme označiť znakom $\{\mathbf{a_n}\}^{\infty}_{n=1}$ alebo iba $\{\mathbf{a_n}\}$. Prirodzené číslo **n** sa nazýva **index člena $\mathbf{a_n}$.** Index $\mathbf{a_n}$ označuje, na ktorom mieste sa v danej postupnosti člen $\mathbf{a_n}$ nachádza.

Všimnite si niektoré jednoduché postupnosti.

| | |
|---|---|
| Postupnosť prirodzených čísel | 1,2,3,4..... |
| Postupnosť párnych kladných čísel | 2,4,6,8..... |
| Postupnosť štvorcov prirodzených čísel | 1,4,9,16.... |

Ak máme zapísať postupnosť zlomkov, ktorých člen $\mathbf{a_1}$ sa rovná jednej polovine **a** potom menovateľ nasledujúceho zlomku je o jednu jednotku väčší.

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ ..... \qquad (2)$$

Prvý člen $\mathbf{a_1} = \frac{1}{2}$ , $\mathbf{a_2} = \frac{1}{3}$ , $\mathbf{a_3} = \frac{1}{4}$ atď.

**Príklad 1.** Máme napísať niekoľko členov postupnosti danej symbolom $\{\mathbf{a^2}\}^{\infty}_{n=1}$.

Riešenie. Prvé členy danej postupnosti sú $1^2, 2^2, 3^2$ ....

Postupnosť čísel je spravidla určená.

**a).** vzorcom pre **n – tý** člen postupnosti napr. $\{\mathbf{n (n + 1)}\}$ alebo $\mathbf{a_n = n(n + 1)}$ **.**
Pomocou, ktorého určíme jednotlivé členy postupnosti postupným dosádzaním prirodzených čísel $n = 1, 2, 3, ...$ do daného vzorca a vyčíslením výrazu.

**b).** prvým členom postupnosti, ktorý nazývame aj rekurentný vzorec napr.

$$\mathbf{a_1 = 2; \qquad a_{n+1} = a_n - 1}$$

Pomocou, ktorého vypočítame vždy nasledujúci člen postupnosti ($a_{n+1}$) z predchádzajúceho známeho člena postupnosti.

Riešenie postupnosti si ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

a). Postup určenia prvých členov postupnosti $a_n = n(n+1)$.
Ak dosadíme do vzorca postupne prirodzené čísla $n = 1,2,3...$ vypočítame

Pre $n = 1$; $a_1 = 1(1+1) = 2$.
-/- $n = 2$; $a_2 = 2(2+1) = 6$.
-/- $n = 3$; $a_3 = 3(3+1) = 12$. atď.

Prvé členy postupnosti $\{n(n+1)\}$ sú čísla 2,6,12...

b). Postup určenia prvých členov postupnosti $a_1 = 2$; $a_{n+1} = a - 1$.

Prvým členom postupnosti $a_1 = 2$;
Ak dosadzujeme do rekurentného vzorca postupne prirodzené čísla n = 1,2,3... a známe členy $a_1$, $a_2$, $a_3$ ... vypočítame, že

Pre $n = 1$; $a_{1+1} = a_2 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$.
-/- $n = 2$; $a_{2+1} = a_3 = a_2 - 1 = 1 - 1 = 0$.
-/- $n = 3$; $a_{3+1} = a_4 = a_3 - 1 = 0 - 1 = -1$. atď.

Prvé členy postupnosti sú čísla 2, 1, 0, –1.

c). Ak je daná postupnosť rekurentným vzorcom $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 3$ dosadením podľa vety, ktorá hovorí. Postupnosti vyjadrené rekurentným vzorcom môžeme v jednoduchších prípadoch vyjadriť vzorcom pre n – tý člen postupnosti, tak, že

1). Dosadíme do rekurentného vzorca za **n** prirodzené čísla 1,2,3... **r – 2, r – 1,** čím získame rekurentný vzorec pre jednotlivé členy postupnosti $\mathbf{a_2, a_3 \ldots a_{r-1}, a_r}$ z ktorých vylúčime všetky členy okrem člena $\mathbf{a_r}$.

2). Pomocou rekurentného vzorca napíšeme niekoľko prvých členov postupnosti a potom vzorce pre n – tý člen odvodíme skusmo.

Pre $n_1 = 1$; $a_2 = a_1 + 3$
-/- $n = 2$; $a_3 = a_2 + 3$
............................................
-/- $n = r - 2$ $a_{r-1} = a_{r-2} + 3$
-/- $n = r - 1$ $a_r = a_{r-1} + 3$

Ak sčítame ľavé a pravé strany všetkých ( r – 1) rovností dostaneme

$$a_2 + a_3 + \ldots a_{r-1} + a_r = 3(r-1) + a_1 + a_2 + \ldots a_{r-2} + a_{r-1},$$

Po zrušení označených členov platí

$$a_r = 3(r-1) + a_1$$

Po dosadení do daného člena $a_1 = 1$, rovnosť

$$a_r = 3(r-1) + 1 = 3r - 3 + 1 = 3r - 2,$$

Teda sme odvodili , ak píšeme **n** miesto **r** hľadaný vzorec pre n – tý člen $a_n = 3n - 2$.

Postupnosť $\{\mathbf{a_n}\}$ pre všetky indexy **n** platí:

$a_n < a_{n+1}$; alebo $a_{n+1} - a_n > 0$ ; sa nazýva rastúca
$a_n > a_{n+1}$; alebo $a_{n+1} - a_n < 0$ ; sa nazýva klesajúca
$a_n \leq a_{n+1}$; alebo $a_{n+1} - a_n \geq 0$ ; sa nazýva neklesajúca

.$a_n \geq a_{n+1}$; alebo $a_{n+1} - a_n \leq 0$ ; sa nazýva nerastúca
.$a_n = a_{n+1}$; alebo $a_{n+1} - a_n = 0$ ; nie je ani rastúca ani klesajúca

Uvedené postupnosti sa nazývajú súhrnným názvom ako **monotónne** postupnosti. Postupnosti , ktorých členy majú striedavé znamienka sa nazývajú **alternujúce** postupnosti. Pre rastúcu postupnosť platí: *Ak rastie index* ***n****, rastú i členy postupnosti* $a_n$ **.** Pre klesajúcu postupnosť platí: *Ak rastie index* ***n****, členy postupnosti* $a_n$ *klesajú.*

Treba si uvedomiť, že uvedené nerovnosti musia platiť pre ľubovoľné **n**. Postupnosť 1,2,3... nie je postupnosť rastúca i keď platí $a_3 < a_4$; $a_4 < a_5$ , lebo medzi prvým a druhým členom platí rovnosť $a_1 = a_2$ takže ne je splnená podmienka pre rastúcu postupnosť $a_n \leq a_{n+1}$ . Uvedená postupnosť je teda neklesajúca, lebo pre všetky čísla **n** potom platí $a_n \leq a_{n+1}$.

Sledujte postup, ktorým určujeme, či je daná postupnosť $\{a_n\}$ postupnosťou rastúcou, klesajúcou, nerastúcou alebo neklesajúcou.

a). Postupnosť $a_n = n(2 - n)$ je klesajúca, lebo ak $a_n = n(2 - n)$ potom
.$a_{n+1} = (n + 1) [2 - (n + 1)]$ .
( ak dosadíme za $n = n + 1$) a zjednodušíme rozdiel, potom dostaneme
.$a_{n+1} - a_n = (n + 1) [2 - (n + 1)] - n(2 - n)$
.$a_{n+1} - a_n = 1 - 2n$
.a pretože pre každé prirodzené číslo **n** platí , tak potom
$1 - 2n < 0$; alebo $a_{n+1} - a_n < 0$;
Teda daná postupnosť $a_n = n(2 - n)$ je postupnosť klesajúca.

b). Postupnosť $\{ 2n + (-1)^n \}$ je neklesajúca, lebo ak $a_n = 2n +(-1)^n$, potom
.$a_{n+1} = 2(n - 1) + (-1)^{n+1}$
( ak dosadíme za $n = n + 1$ ) a zjednodušíme podiel tak dostaneme
.$a_{n+1} - a_n = 2(n + 1)+ (-1)^{n+1} - [2n - (-1)^n]$
.$a_{n+1} - a_n = 2[1 - (-1)^n ]$;
Pretože pre každé prirodzené číslo **n** (ak je nepárne sa výraz rovná číslu 4, pre párne číslo sa rovná nule) platí.

$$2[1 - (-1)^n ] \geq 0 \; ; \quad \text{alebo} \quad a_{n+1} - a_n \geq 0;$$

.teda daná postupnosť je neklesajúca.

**Grafické riešenie postupnosti**

Každú postupnosť môžeme znázorniť **graficky** v pravouhlej súradnicovej sústave, pričom na vodorovnú os značíme prirodzené čísla **n**, na zvislú os hodnoty $a_n$. Jednotlivé body môžeme pre názornosť spojiť úsečkami.

**Príklad 2.** V postupnosti {n}, čiže v postupnosti prirodzených čísel 1,2,3,4.... je každému .prirodzenému číslu **n** priradené to isté číslo **n**, takže pre každé **n** je $a_n = n$.
Postupnosť 1,2,3,4.. znázorníme graficky. Člen $a_n$ znázorníme bodom $A_n = [n,a_n]$. Body $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ ... sú grafom postupnosti {n}. Pre názornosť spojíme body $A_1$ až $A_4$ úsečkami. Všetky body grafu postupnosti {n} ležia na polpriamke, ktorej začiatok je bod $A_1$.

Je potrebné si uvedomiť, že postupnosť čísel sa zobrazuje iba ako súhrn jednotlivých bodov. Grafické zobrazovanie nemožno zrovnávať z grafickým zobrazením funkcie. Medzi jednotlivými číslami **n** a $\mathbf{a_{n+1}}$ nie je postupnosť definovaná. Merítko na osách **n** a $\mathbf{a_n}$ volíme podľa potreby, teda nemusia mať rovnakú mierku.

## Aritmetická postupnosť

Postupnosť $\{\mathbf{a_n}\}$ pre ktoré jej členy platí rekurentný vzorec

$$.\mathbf{a_{n+1} = a_n + d}$$

.kde číslo **d** je konštantný rozdiel každých dvoch susedných členov postupnosti sa nazýva postupnosť **aritmetická**. Číslo **d** sa nazýva **diferencia** aritmetickej postupnosti
Postupnosť čísel – 5, 0, 5, 10.... je postupnosť aritmetická, lebo ľubovoľný člen postupnosti je vždy o 5 väčší ako člen predchádzajúci. Diferencia tejto aritmetickej postupnosti je **d = 5.**
Diferenciu d = 2 aritmetickej postupnosti 1,3,5,7,9... vypočítame z ľubovoľného rozdielu $.a_{n+1} - a_n$ ; napr. 9 – 7 = 2 ; 5 – 3 = 2 ; atď.
Diferenciu aritmetickej postupnosti $a_n = 2_n - 1$ je

$$.d = a_{n+1} - a_n = [2(n + 1) - 1] - [2n - 1] = 2n + 1 - 1 - 2n + 1 = 1 ;$$

Aritmetická postupnosť $\{a_n\}$ je

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a). rastúca | ak | $d > 0$; | 2,5,8,11.... | $d = 3 > 0$ ; |
| b). klesajúca | ak | $d < 0$ ; | 3, – 1, – 5... | $d = -4 < 0$ ; |
| c). ani neklesá ani nerastie | ak | $d = 0$ ; | 2,2,2.... | $d = 0$ ; |

Ak poznáme prvý člen $\mathbf{a_1}$ a diferenciu aritmetickej postupnosti **d**, platí pre výpočet **n – tého** člena postupnosti vzťah

$$.\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)d} ;$$

Ak je $a_1 = 2$ ; $d = -1$, potom po dosadení vypočítame napr. $a_5 = 2 + (5 - 1) . -1 = -2$ ; $.a_8 = 2 + (8 - 1) . -1 = -5$ .

Pre ľubovoľné dva členy aritmetickej postupnosti $\mathbf{a_r}$, $\mathbf{a_s}$ platí

$$.\mathbf{a_s = a_r + (s - r)d\ ;}$$

Kde **s, r,** sú indexy členov aritmetickej postupnosti.
Sledujte postup riešenia určenia člena $\mathbf{a_5}$ a **d,** ak je dané $\mathbf{a_9 = 4\ ;\ \ a_{12} = -2\ ;}$
Dosadením daných hodnôt do vzorca dostaneme $4 = -2 + (9 - 12)d$ z čoho $d = -2$ ;
Člen $a_5$ vypočítame po dosadení $d = -2$ a napr. $a_9 = 4$

$$.\mathbf{a_5 = 4 + (5 - 9)\ .\ - 2 = 12\ ;}$$

Riešené príklady

a). Ak $a_{15} = 9$ a $d = 0{,}5$ potom člen $a_4$ vypočítame dosadením

$$.a_4 = a_{15} + (4 - 15)d = 9 + (4 - 15).\ 0{,}5 = 3{,}5\ ;$$

b). Ak $a_3 = 5$ a $a_{11} = 21$ potom diferenciu d vypočítame dosadením

$5 = 21 + (3 - 11)d$ teda výpočet diferencie je
$8d = 16$
$.d = 2$ ;

c). Ak je $a_{14} = 35$, $a_s = 20$, určíme člena $a_4$ tak, že vypočítame diferenciu d podľa príkladu b). a člena $a_{14}$ podľa príkladu a). alebo

$35 = 20 + (14 - 8)d$ výpočet $d = 2{,}5$
$.a_4 = 35 + (4 - 14).\ 2{,}5 = 10$ ; alebo
$.a_4 = 20 + (4 - 8)\ .2{,}5 = 10$ .

Súčet prvých členov **n** aritmetickej postupnosti $\mathbf{\{a_n\}}$ vypočítame zo vzorca

$$\mathbf{S_n = \frac{1}{2}\, n\, (a_1 + a_n).}$$

Sledujte postup riešenia.

Ak máme sčítať päť prvých členov postupnosti $\{2n - 1\}$ vypočítame
$.a_1 = 2\ .\ 1 - 1 = 1$ ; $a_5 = 2\ .\ 5 - 1 = 9$ ; $a_7 = 2\ .\ 7 - 1 = 13$.
A po dosadení do vzorca

$$S_5 = \frac{1}{2}\ .\ 5(1 + 9) = 25$$

Súčet prvých piatich členov postupnosti $\{2n - 1\}$ je 25.

<u>Pre aritmetickú postupnosť platí</u> $\mathbf{a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$

Teda každý člen aritmetickej postupnosti $\{a_n\}$ ( s výnimkou prvého člena) sa rovná aritmetickému priemeru členov predchádzajúceho $a_{n-1}$ a nasledujúceho $a_{n-1}$.

Platí to i v opačnom smere. Ak sa každý člen postupnosti $\{a_n\}$ rovná aritmetickému priemeru členov susediacich, je táto postupnosť postupnosťou aritmetickou.
Všimnite si aritmetickej postupnosti 2, 5, 8, 11, 14.... Člen $a_2 = 5$ je aritmetickým priemerom susediacich členov $a_1 = 2$ ; $a_3 = 8$ alebo

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5$$

**Postupnosť geometrická**

Postupnosť $\{ \mathbf{a_n} \}$ všetkých členov, pre ktoré platí rekurentný vzorec

$$\mathbf{a_{n+1} = a_n \cdot q} \qquad (a_n \neq 0\ ,\ \ q \neq 0)\ ;$$

Kde číslo **q** je konštantný podiel každých dvoch susediacich členov postupnosti, sa nazýva postupnosť **geometrická**. Číslo **q** sa nazýva **kvocient** geometrickej postupnosti.
Postupnosť čísel 1, 5, 25, 125, 625.... je postupnosť geometrická, lebo ľubovoľný člen postupnosti je vždy 5 násobne väčší než člen predchádzajúci. Kvocient tejto geometrickej postupnosti je **q = 5**.
Kvocient geometrickej postupnosti – 1, –2, – 4, – 8.... je $q = 2$ ;
Kvocient geometrickej postupnosti q vypočítame zo vzťahu:

$$\mathbf{q = \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Kvocient geometrickej postupnosti $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n$ ; je

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot 2^{n+1}}{(-1)^{n+1} \cdot 2^n} = \frac{(-1)^n \cdot (-1)^2 \cdot 2^n \cdot 2^1}{(-1)^n \cdot (-1)^1 \cdot 2^n} = -2\ ;$$

Mocniny sme upravili na súčiny mocnín a zlomok krátili.

Geometrická postupnosť $\{a_n\}$ ktorej prvý člen $\mathbf{a_1 > 0}$ **,** je

a). rastúca ak platí že $\mathbf{q > 1}$ **;**
b). klesajúca ak platí $\mathbf{0 < q < 1}$ **;**
c). alternujúca ak platí $\mathbf{q < 0}$ **;**
d). ani rastúca ani klesajúca ak platí $\mathbf{q = 1}$ **;**

Ak poznáme prvého člena $a_1$ a kvocient geometrickej postupnosti q, platí pre výpočet n – tého člena postupnosti vzťah

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

**Príklad 3.** Ak je $a_1 = -5$ , $q = 2$ potom podľa vzorca vypočítame

$$.a_3 = -5 \,.\, 2^{3-1} = -5 \,.\, 2^2 = -5 \,.\, 4 = -20\ ;$$
$$.a_4 = -5 \,.\, 2^{4-1} = -5 \,.\, 2^3 = -5 \,.\, 8 = -40\ ;$$

Obecný vzorec pre výpočet n – tého člena odvodíme dosadením

$.a_n = -5 \,.\, 2^{n-1}$ a potom za **n** dosádzame poradie člena geometrickej postupnosti .

Pre dva ľubovoľné členy geometrickej postupnosti $\mathbf{a_r}$, $\mathbf{a_s}$ platí

$$.\mathbf{a_s = a_r \,.\, q^{s-r}} \qquad (a_1 \neq 0,\ q \neq)\ ;$$

Kde **s** a **r** sú indexy členov geometrickej postupnosti.

Ak je $\mathbf{a_3 = 18}$ **,** $\mathbf{q = -3}$**,** potom člena $\mathbf{a_6}$ vypočítame dosadením do vzorca

$$.a_6 = a_9 \,.\, q^{6-9} = 512 \,.\, 2^{-3} = \frac{512}{2^3} = \frac{512}{8} = 64$$

Súčet prvých členov geometrickej postupnosti $\{a_n\}$ vypočítame zo vzorca

$$.\mathbf{s_n = a_1 \frac{.q^n - 1}{.q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}\ ; \qquad \text{pre} \quad q \neq 1\ .$$

.alebo

$$.\mathbf{s_n = na_1}$$

Sledujte postup riešenia:

Ak je $a_1 = 5$, $q = 2$, potom súčet prvých siedmych členov postupnosti je

$$.s_7 = 5\,\frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 5\,\frac{128 - 1}{1} = 5 \,.\, 127 = 635\ ;$$

Ak $a_1 = -6$, $q = -6$, potom súčet prvých troch postupností je po dosadení

$$.s_3 = -6\,\frac{(-6)^3 - 1}{-6 - 1} = -6\,\frac{-218 - 1}{-7} = -6\,\frac{-217}{-7} = -186\ ;$$

Pre geometrickú postupnosť platí:

$$\mathbf{|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \,.\, a_{n+1}}}\ ;$$

Teda absolútna hodnota každého člena geometrickej postupnosti $\mathbf{a_n}$ ( s výnimkou prvého člena) sa rovná geometrickému priemeru člena predchádzajúceho $\mathbf{a_{n-1}}$ a nasledujúceho $\mathbf{a_{n+1}}$ pretože podiel každých dvoch susediacich členov geometrickej postupnosti je konštantný a musí teda platiť

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{alebo} \quad (a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Všimnite si geometrickej postupnosti 2, 6, 18, 54.... napr. $a_3 = 18$, je geometrickým priemerom susedných členov $a_2 = 6$, $a_4 = 54$. Potom platí

$$a_3 = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{324} = 18 \,;$$

**Matematická indukcia**

Matematickou indukciou sa nazýva postup, ktorého používame k dôkazu platnosti rôznych vzťahov medzi prirodzenými číslami. Dôkaz **matematickou indukciou** záleží na vete

Ak je daný vzťah $\mathbf{A_n}$

**a)**. správny pre prirodzené číslo $\mathbf{n = 1}$ a

**b).** z predpokladu správnosti $\mathbf{A_n}$ pre nejaké prirodzené číslo $\mathbf{n = k}$ dokážeme správnosť vzťahu $\mathbf{A_n}$ i pre prirodzené číslo $\mathbf{n = k + 1}$; potom

**c).** dôkaz vzťahu $\mathbf{A_n}$ je správny pre každé prirodzené číslo **n**.

Sledujte dôkaz matematickou indukciou na príkladoch.

1). Aritmetická postupnosť je definovaná rekurentným vzorcom

$$(1) \quad \mathbf{a_{n+1} = a_n + d};$$

Dokážte platnosť vzorca pre jej **n – tý** člen, ktorý ma tvar

$$(2) \quad \mathbf{a_n = a_1 + (n-1)d};$$

Postup riešenia:

a) Pre **n = 1** ; je vzorec (2) správny, lebo po dosadení n = 1 do vzorca (2) dostaneme správnu rovnosť.

$$\mathbf{a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1 + 0 \cdot d = a_1}$$

b) Ak predpokladáme, že vzorec (2) je správny pre nejaké prirodzené číslo **n = k**, teda, že platí ( po dosadení n = k do vzorca (2) ).

$$(3) \quad \mathbf{a_k = a_1 + (k-1)d\ ;}$$



.máme dokázať, že je správny i pre prirodzené číslo **n = k + 1**, teda, že platí ( po dosadení .n = k + 1 do vzorca (2) )

$$(4) \quad \mathbf{a_{k+1} = a_1 + [\,(k+1) - 1]d = a_1 + kd\ ;}$$

Dôkaz prevedieme takto:
Pretože pre aritmetickú postupnosť platí podľa vzorca (1)

$$(5) \quad \mathbf{a_{k+1} = a_k + d};$$

potom po dosadením výrazu (3) do vzorca (5) dostaneme

$$(6) \quad \mathbf{a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d};$$

A po úprave dostaneme

$$(7) \quad \mathbf{a_{k+1} = a_1 + kd}\ ;$$

ako vidíte je to vzorec (4), ktorý sme mali dokázať.

c) Záver: Pretože vzorec (2) je správny podľa bodu (a) pre n = 1; je správny i podľa bodu (b) i pre nasledujúce číslo n = 2 ; Pretože je vzorec (2) správny pre n = 2, je Opäť správny i pre nasledujúce prirodzené číslo n = 3 ; atď.

2) Pre n – tý člen geometrickej postupnosti platí vzorec

$$(1) \quad \mathbf{a_n = a_1 q^{n-1}\ ;}$$

Dokážte platnosť vzorca pre súčet prvých **n** členov geometrickej postupnosti, ktorá znie

$$(2) \quad \mathbf{s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}\ ;} \qquad \mathbf{(\,q \neq\,)}$$

Postup riešenia:

a) Pre **n = 1** je vzorec (2) správny, lebo po dosadení n = 1 do vzťahu (2) dostávame po jednoduchej úprave ( krátenie q – 1 ) rovnosť $\mathbf{s_1 = a_1}$ **,** ktorá je správna , lebo súčet prvého člena $\mathbf{s_1}$ ľubovoľnej postupnosti sa rovná vždy jej prvému členu $\mathbf{a_1}$.

b) Ak predpokladáme, že vzorec (2) je správny pre nejaké prirodzené číslo **n = k** , teda , že platí ( po dosadení n = k do vzorca (2) )

$$(3) \quad \mathbf{s_k = a_1 \frac{.q^k \pm 1}{.q - 1}\ ;}$$

.máme dokázať, že je správy i pre prirodzené číslo **n = k + 1**, teda, že platí ( po dosadení 

.n = k + 1 do vzorca (2).

$$(4)\quad s_{k+1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1};$$

Dôkaz prevedieme takto: Pre **k – ty** člen geometrickej postupnosti platí podľa vzorca (1)

$$(5)\quad a_k = a_1 q^{k-1}$$

a predpokladáme, že pre súčet prvých $a_k$ členov, ktoré dostaneme postupným dosadením prirodzených čísel k = 1,2,3...k do vzorca (5) platí vzorec (3) alebo

$$(6)\quad s_k = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

potom pre súčet prvých $q^{k+1}$ členov, ktoré dostaneme opäť postupným dosadzovaním prirodzených čísel k = 1,2,3.... k, k + 1 do vzorca (5) musí platiť vzorec

$$(7)\quad s_{k+1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{k-1} + a_1 q^k = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_1 q^k;$$

**.**ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$.s_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_1 q^k = a_1\left[\frac{q^k - 1 + q^k(q - 1)}{q - 1}\right] = a_1\left(\frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q - 1}\right) = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1};$$

čo je vzorec (4), ktorého správnosť sme mali dokázať.

c) Záver: Vzorec (2) je správny pre každé prirodzené číslo n.

Sledujte dôkaz matematickou indukciou na riešených príkladoch. Pokúste sa však vždy o samostatné riešenie a potom vlastný postup porovnajte s postupom uvedeným.

1). Odvoďte vzorec pre n – tý člen postupnosti 1,4,7,10,13,16....a dokážte jeho správnosť matematickou indukciou.

Riešenie:

Vzorec pre n – tý člen danej postupnosti

$$(1)\quad a_n = 3n - 2$$

sme odvodili z rekurentného vzorca pre n – tý člen.

a) Pre n = 1 je vzorec (1) správny, lebo $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ ; čo je skutočne prvý člen danej postupnosti.

b) Ak predpokladáme správnosť vzorca (1) pre n = k alebo



(2) $a_k = 3k – 2$

musíme dokázať, že platí i pre n = k + 1, alebo

(3) $a_{k+1} = 3(k + 1) – 2 = 3k + 1$ ;

Pretože daná postupnosť je postupnosťou aritmetickou, ktorej diferencia d = 3, potom platí rekurentný vzorec

(4) $a_{k+1} = ak + d = ak + 3$ ;

a po dosadení vzorca (2) do vzorca (4)

(5) $a_{k+1} = (3k – 2) + 3 = 3k + 1$ ;

Čo je vzorec (3) jeho platnosť sme mali dokázať.

c) Záver: Vzorec (1) je pre danú postupnosť správny.

2). Dokážte, že vzorec pre n – tý člen rekurentnej postupnosti platí

(1) $a_1 = 1$ ; $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

A platí (2) $a_n = n^2$ ;

Riešenie : a) Pre n = 1 je vzorec (2) správny, lebo $a_1 = 1^2 = 1$ ;
b) Ak predpokladáme správnosť vzorca (2) pre n = k alebo

(3) $a_k = k^3$

musíme dokázať jeho správnosť i pre n = k + 1, lebo

(4) $a_{k+1} = (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$ ;

pretože podľa rekurentného vzorca (1) platí

(5) $a_{k+1} = a_k + 2k + 1$ ;

potom po dosadení vzorca (3) do vzorca (5) platí

(6) $a_{k+1} = k^2 + 2k + 1$ ;
čo je vzorec (4), ktorého platnosť sme mali dokázať.

c) Záver : Vzorec (2) pre danú postupnosť (1) je správny.

## Limita postupnosti

Ak si všimneme prvých členov postupnosti

$$\mathbf{a_n} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n+1}}\ ;\ \text{to je}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\ \ldots\ldots\ \frac{\mathbf{457}}{\mathbf{458}}\ \ldots\ldots\ \frac{\mathbf{999}}{\mathbf{1000}}\ \ldots\ldots$$

je vidieť, že s rastúcim indexom (n) sa členy tejto postupnosti

a) stále viac približujú k číslu 1, avšak
b) budú vždy menšie ako číslo 1.

O postupnosti môžeme povedať, že rastúcim indexom (n) sa členy tejto postupnosti budú stále menej líšiť od čísla 1, ale žiaden člen postupnosti sa nebude rovnať číslu 1.
Ak existuje pre danú postupnosť $\{\mathbf{a_n}\}$ číslo **a** , ktoré ma rovnaké vlastnosti ako číslo 1, potom sa toto číslo (**a**) nazýva limitou postupnosti $\{\mathbf{a_n}\}$ a píšeme

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a_n} = \mathbf{a}\ ; \quad \text{alebo stručne} \quad \lim \mathbf{a_n}$$

a čítame to ako : „limita postupnosti $\{a_n\}$ pre (n) rastúca bez obmedzenia sa rovná **a**;"

Napíšeme niekoľko prvých členov postupnosti.

$$\{3 + \frac{1}{n}\}\ ; \quad \text{alebo}\ 4,\ 3\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{3};\ 3\frac{1}{4};\ 3\frac{1}{5}\ \ldots\ldots \quad \text{tu platí}\ \lim a_n = 3;$$

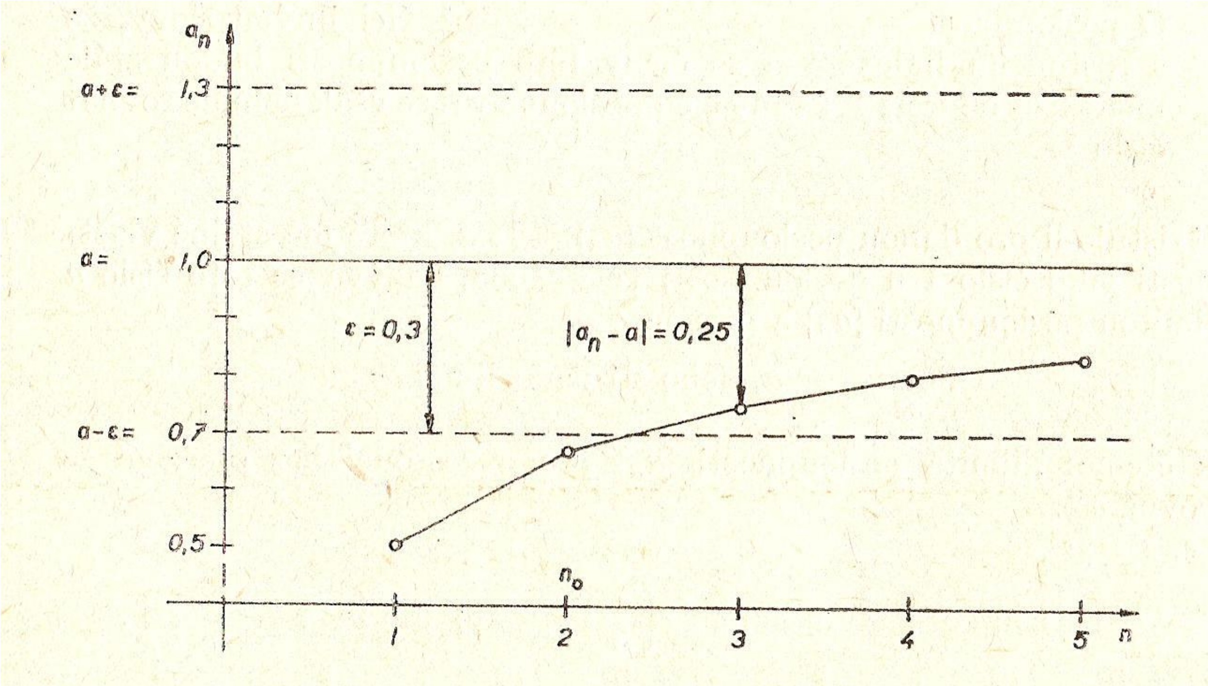
**Definícia limity postupnosti**

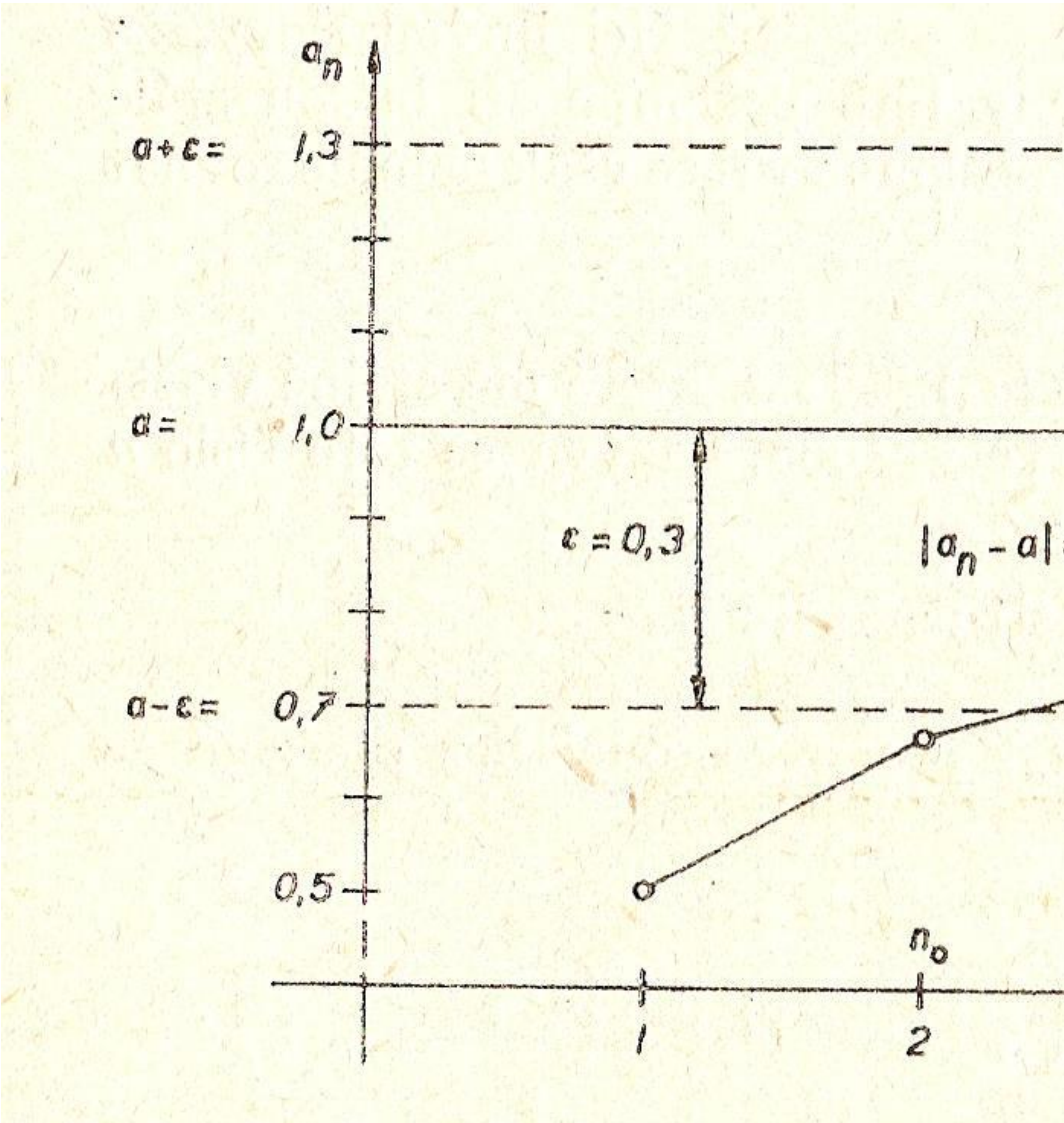
Číslo **a** je limitou postupnosti $\{ a_n \}$, ak ku každému číslu $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ ; existuje také číslo $\mathbf{n > n_0}$ platí rovnosť

$$\mathbf{|a_n - a| < \varepsilon}\ ; \quad \text{alebo} \quad \mathbf{a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.}$$

Definíciu limity postupnosti si pre názornosť objasníme na grafickom znázornení.
Pričom platí :

$$|a_n - a| < \varepsilon$$
$$\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$


$a_n$
$a+\varepsilon=$ 1,3
$a=$ 1,0
$\varepsilon=0,3$
$|a_n-a|=0,25$
$a-\varepsilon=$ 0,7
0,5
$n_0$
1
2
3
4
5
$n$


$a_n$
$a+\varepsilon =$ 1,3
$a =$ 1,0
$\varepsilon = 0,3$
$|a_n - a|$
$a-\varepsilon =$ 0,7
0,5
$n_o$
1
2

Na nákrese je znázornená $\mathbf{\lim \frac{n}{n+1} = 1}$ **;**

Ak zobrazíme členy danej postupnosti, dostaneme nákres, ktorý sme už zobrazili. Z nákresu je možno posúdiť, že sa vzrastajúcim indexom **n** sa členy tejto postupnosti blížia k číslu 1, teda limitou tejto postupnosti je číslo **a = 1** (naznačené plnou čiarou) . Ak zvolíme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$, napr. $\varepsilon = 0{,}3$ pre $n = 3$ alebo $n_a = 0{,}75$ skutočne platí nerovnosť

$$|0{,}75 - 1| < 0{,}3 \qquad a\ 0{,}7 < 0{,}75 < 1{,}3\ ;$$

Sledujte postup overovania správnosti limity postupnosti

$$.\ \lim \frac{n}{n+1} = 1;$$

Podľa definície limity postupnosti musí pre všetky čísla $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ a číslo $\mathbf{n > n_0}$ platiť

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \text{ alebo po úprave (1) } \left| -\frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon\ ;$$

Pretože **n** je prirodzené číslo väčšie ako nula **n > 0** , platí pre všetky **n** $\mathbf{-\frac{1}{n+1} < 0}$ **;**

a pre absolútnu hodnotu $\left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$ ;

Vzťah (1) môžeme potom písať v tvare

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon\ ; \quad \text{alebo po úprave (2)} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1\ ;$$

Ak položíme vo vzťahu (2) $\mathbf{n_0 = \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}} - 1}$ a volíme napr.

a) $\varepsilon = 0{,}1$ , $n_0 = 9$ , alebo pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ musí platiť $|a_n - 1| < 0{,}1$ ;
Ak zvolíme napr. $n = 10$, potom $a_{10} = 0{,}91$, a skutočne platí

$$|0{,}91 - 1| = |-0{,}09| = 0{,}09 < 0{,}1\ ;$$

b) $\varepsilon = 0{,}001$ , potom $n_0 = 999$ , alebo pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ musí platiť $|a_n - 1| < 0{,}001$ ;
Ak volíme napr. $n = 1000$, potom $a_{1000} = 0{,}999001$, a skutočne platí

$$\mathbf{|0{,}999001 - 1| = 0{,}000999 < 0{,}001\ ;}$$

Pretože pre všetky $\varepsilon > 0$, môžeme určiť také číslo $n_0$, že pre každé $n > n_0$ platí $|a_n - 1| < \varepsilon$ ; je limita $a = 1$ správna.

Postupnosť, ktorá ma limitu sa nazýva postupnosť konvergentná. Hovoríme potom, že členy postupnosti $\{a_n\}$ konvergujú k číslu **a**. Postupnosť, ktorá limitu nemá , sa nazýva postupnosť divergentná.

Postupnosť $\{ 3 - \frac{2}{2^{n-2}} \}$ je postupnosť konvergentná. S rastúcimi členmi postupnosti konverguje k číslu 3.

Postupnosť $\{2n + 1\}$ je postupnosťou divergentnou. S rastúcimi **n** členmi postupnosti neustále rastie.

Každá geometrická postupnosť $\{a_n\}$, pre ktoré platí $|q| < 1$, alebo $-1 < q < 1$, je postupnosť konvergentná a jej limitou je číslo nula alebo $\lim a_n = 0$;

Každá geometrická postupnosť, pre ktoré platí $|q| > 1$, alebo $q < -1$, a $q > 1$, je postupnosť divergentná a nemá limitu.

Ak je $q = 1$ je postupnosť konvergentná a $\lim a_n = a_1$.

Ak je $q = -1$, je postupnosť divergentná a nemá limitu.

Postupnosťou, ktorej limitou je číslo nula, sa nazýva postupnosť nulová. Daná postupnosť $\{n_a\}$ je nulová ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $n_0$, že pre každé prirodzené číslo $n > n_0$ platí $|a_n| < \varepsilon$.

Sledujte dôkaz platnosti $\lim \dfrac{2}{n} = 0$ ;

$$\left|\frac{2}{n}\right| < \varepsilon ; \quad \text{alebo} \quad \frac{2}{n} < \varepsilon , \quad \text{alebo} \quad n > \frac{2}{\varepsilon} .$$

Nerovnosť $\left|\dfrac{2}{n}\right| < \varepsilon$ platí teda pre všetky $n > n_0$, ak položíme $n_0 = \dfrac{2}{\varepsilon}$

Zvoľme napr. $\varepsilon = 0{,}01$ , potom $n_0 = 200$. K číslu $\varepsilon = 0{,}01$ existuje teda číslo $n_0 = 200$, ktoré pre všetky $n > n_0$ alebo $n > 200$ platí

$$\left|\frac{2}{n}\right| < 0{,}01.$$

Pre $n = 400$ dostaneme platnú nerovnosť $0{,}005 < 0{,}01$, pre $n = 2000$ dostaneme nerovnosť $0{,}001 < 0{,}01$ atď. Uvedená postupnosť je nulová, lebo $\varepsilon = 0{,}01$ sa objavuje pri rôznych **n**.

## Nekonečné rady

Ak je daná postupnosť čísel $\mathbf{\{a_n\} = a_1 , a_2, a_3}$ **....** potom zápis

$$.\mathbf{a_1 + a_2 + a_3 \;.....\; a_n + \;....}$$

Sa nazýva nekonečná rada. Čísla $\mathbf{a_1, a_2, a_3}$ **...** sa nazývajú členy nekonečnej rady. Každá rada má nekonečne mnoho členov.

Ak je daná postupnosť $\mathbf{a_n = n + 3}$ **;** potom jej prvými členmi sú **4, 5, 6, 7 ....**
.a príslušná nekonečná rada 4 + 5 + 6 + 7 +....

K postupnosti $\mathbf{a_n = n \,.\, (-1)^{n+1}}$ alebo 1, – 2, 3 , – 4, 5 .... patrí nekonečná rada
1 – 2 + 3 – 4 + 5 ...
Rada, ktorej členy tvoria aritmetickú postupnosť sa nazýva nekonečná aritmetická rada.
Rada, ktorej členy tvoria geometrickú postupnosť sa nazýva nekonečná geometrická rada.

Rada 2 + 5 + 8 + .... je nekonečná aritmetická rada, lebo jej členy tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou d = 3.

Rada 1 – 3 + 9 – .... je nekonečná geometrická rada, lebo jej členy tvoria geometrickú postupnosť s kvocientom $q = -3$.

Rada 2 + 6 + 12 + 20 ... nie je ani aritmetická ani geometrická nekonečná rada.

**Použitie postupnosti**

S použitím postupnosti sa stretávame v praxi všade tam, kde určitá veličina pravidelne vzrastá alebo klesá. Zvláštny význam majú hlavne geometrické postupnosti, u ktorých počiatočná veličina vzrastá alebo klesá v stálom pomere.

Pamätajte:

a) Ak vzrastá daná počiatočná veličina $\mathbf{a_0 + p\ \%}$ **,** potom jednotlivé členy postupnosti vzrastajú v stálom pomere.

$$\mathbf{r = \frac{100 + p}{100} = 1 + \frac{p}{100}\ ;}$$

b) Ak klesá daná počiatočná veličina $\mathbf{a_0}$ o $\mathbf{p\ \%}$, potom jednotlivé členy postupnosti klesajú v stálom pomere.

$$\mathbf{r = \frac{100 - p}{100} = 1 - \frac{p}{100}\ ;}$$

Pre výpočet **n – tého** člena takto určenej geometrickej postupnosti, platí vzorec

$$\mathbf{a_n = a_0 r^n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\ ; \qquad a_n = a_0 r^n = a_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n\ ;}$$

**.**z ktorého môžeme vypočítať ktorúkoľvek z veličín $\mathbf{a_n}$ **,** $\mathbf{a_0}$**,** $\mathbf{r}$**,** $\mathbf{n}$**,** $\mathbf{p}$ ak sú dané aspoň tri veličiny.

Príklad: V hľadisku je 21 radov sedadiel v najnižšej rade je 20 sedadiel a v najvyššej rade 60 sedadiel. Koľko je celkovo sedadiel v hľadisku, ak rastie počet sedadiel rovnomerne od jednej rady k druhej?

Riešenie: Počty sedadiel v jednotlivých radách vytvárajú aritmetickú postupnosť. Z úlohy vyplýva, že $n = 21$, $a_1 = 20$ , $a_{21} = 60$. Súčet $\mathbf{s_{21}}$ vypočítame dosadením do vzorca

$$\mathbf{.\ a_{25} = \text{—-}\ .\ 21(20 + 60) = 840\ ;}$$

Odpoveď: V hľadisku je celkovo 840 sedadiel.

Príklad: Koľko baktérii vznikne z jednej baktérie za 12 hodín, ak z jednej baktérie vzniknú delením dve baktérie vždy za pól hodinu ?

Riešenie: Počty vzniknutých baktérii po jednotlivých polhodinách tvorí geometrickú radu. Pretože $a_1 = 1$, $q = 2$ a $a_{25} = 25$, potom

$$.a_{25} = 1 \,.\, 2^{25-1} = 2^{24} = 17\,000\,000\ ;$$

Odpoveď: Za 12 hodín vznikne z 1 baktérie 17 000 000 baktérii.

Teraz preberieme otázku postupnosti z iného spracovania .

# Postupnosť a limita postupnosti

## Postupnosť

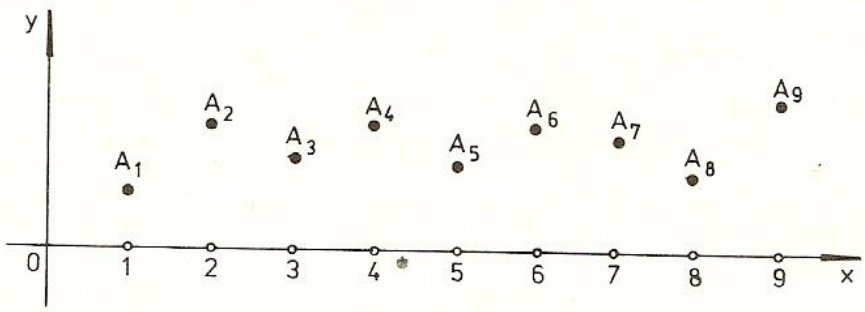
Zobrazenie **f** množiny všetkých prirodzených čísel do akejkoľvek množiny sa nazýva **nekonečná postupnosť** alebo iba **postupnosť**. V tom prípade je ustáleným zvykom obraz prirodzeného čísla **n** označovať nejakým písmenom s indexom **n**. Potom píšeme:

$$\mathbf{f(1) = a_1\ , \qquad f(2) = a_2 \ldots\ldots f(n) = a_n \ldots}$$

Prvok $\mathbf{a_n = f(n)}$, pričom **n = 1,2,3...,** sa nazýva **n – tý člen postupnosti.** Postupnosť **f** je jednoznačne určená svojimi členmi, preto namiesto **f** používame spravidla označenie

$$\mathbf{a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ a_n, \ldots} \quad \text{alebo} \quad \mathbf{\{a_n\}}.$$

Členy postupnosti $\mathbf{\{a_n\}}$ môžu byť prvky ľubovoľnej množiny. Ak sú členmi postupnosti čísla, tak hovoríme o **číselnej postupnosti** alebo o **postupnosti čísel**. Číselná postupnosť je teda **funkcia**, ktorej **definičný obor** je množina všetkých prirodzených čísel. Jej grafom je množina izolovaných bodov $A_n = [n, a_n]$ , $n = 1,2,3,\ldots$




*Obr. 4.1*

V matematike sa stretávame s postupnosťami, ktoré nie sú číselné ako napr. postupnosť bodov, úsečiek, funkcii a pod. V tejto kapitole sa budeme zaoberať iba číselnými postupnosťami, preto budeme prívlastok číselná vynechávať.

Príklad 1. Nech $a_n = \frac{1}{n}$ , Teda $\{\frac{1}{n}\}$ je postupnosť, ktorej členy sú , $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{3}$,.... $\frac{1}{n}$ , ....

Táto postupnosť sa nazýva **harmonická postupnosť**.

Príklad 2. Nech $a_n = n$. Postupnosť $\{n\}$ sa nazýva **postupnosť prirodzených čísel.**

Príklad 3. Nech a, d sú dané čísla a nech $a_n = a + (n – 1)d$. Postupnosť $\{a\}$, ktorej členy . sú $a$, $a + d$, $a + 2d$, .... $a +(n + 1)d$, ... sa nazýva **aritmetická postupnosť s . diferenciou d**.

Príklad 4. Nech a, q sú dané čísla a nech $a_n = aq^{n-1}$ sa nazýva **geometrická postupnosť s kvocientom q.**

Príklad 5. Uvažujme o postupnosti 1,0,1,0,1,0,.... Sú to členy, ktoré sa na nepárnych miestach rovnajú číslu 1, to je $a_{2k-1}$ a členy, ktoré stoja na párnych miestach, sú nuly, to je $a_{2k} = 0$. Pravidlo, podľa ktorého prirodzenému číslu **n** priradíme číslo $\mathbf{a_n}$ (člen postupnosti 1 alebo 0), možno zapísať vzorcom takto

$$\mathbf{a_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}}$$

Príklad 6. Nech $a_n = 1$ pre každé n. V tom prípade máme postupnosť 1, 1, 1, .... 1, ....

Príklad 7. Postupnosť 2,3,5,7,.... p, .... je postupnosťou prvočísel. V tom prípade $a_n = p_n$, . kde $p_n$ je podľa veľkosti n – té prvočíslo.

Z definície postupnosti je zrejme, že postupnosť je definovaná, ak je daný predpis, pomocou ktorého možno určiť jej ľubovoľný člen. Taký predpis je najčastejšie daný vzorcom, určujúcim, ako vypočítať $\mathbf{a_n}$**,** ak je dané **n**. Tak to bolo v príkladoch 1. až 6. Existujú však postupnosti, ktoré takto definovať nemožno, ako príklad 7. Mnohé postupnosti možno definovať indukciou, to je tak, že udáme jej prvý člen $\mathbf{a_1}$ a vzorec pre výpočet člena $\mathbf{a_{n+1}}$ pomocou člena $\mathbf{a_n}$**.** Napr. vzorec $a_1 = \sqrt{2}$ , $a_{n+1} = \sqrt{2} + a_n$ definujú postupnosť $\{a_n\}$, ktorej členy sú

. $a_1 = \sqrt{2}$ , $a_2 = \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ , $a_3 = \sqrt{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[6]{2}$ , .....

Pretože postupnosť je špeciálny prípad funkcie, pojmy ohraničenosť, monotónnosť a pod, ktoré sme zaviedli pre všeobecné funkcie, majú zmysel aj pre postupnosti. Nech napr. $\{a_n\}$ je rastúca postupnosť. To znamená, že pre každé dve prirodzené čísla **k, £** také, že **k < 1,** platí


20

20. $a_k < a_\ell$ . Teda platí $a_n < a_{n+1}$ pre každé **n**, pretože $n < n + 1$. Ľahko sa dá dokázať, že potom pre každé **k, ℓ** také, že $k < \ell$, platí $a_k < a_\ell$ , to je postupnosť $\{a_n\}$, ktorá je rastúca. Čo nám dokazuje platnosť vety

Veta 1. Postupnosť $\{a_n\}$ je rastúca (neklesajúca, klesajúca, nerastúca) vtedy a len vtedy, keď pre každé prirodzené číslo **n** platí

$$a_n < a_{n+1} \quad (a_n \leq a_{n+1}, \quad a_n > a_{n+1}, \quad a_n \geq a_{n+1})$$

Príklad 8. Harmonická postupnosť $\{\frac{1}{n}\}$ je klesajúca, pretože pre každé prirodzené číslo n platí $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, to je $a_n > a_{n+1}$.
je tiež ohraničená, pretože platí: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ pre každé n

Príklad 9. Postupnosť $\{ (-1)^n \}$, ktorej členy sú $-1, 1, -1, 1, \ldots$, je ohraničená, ale nie je monotónna.

Príklad 10. Postupnosť $\{ 2 - \frac{1}{n}\}$ je rastúca a ohraničená, pretože pre každé prirodzené číslo n platí:

$$2 - \frac{1}{n} < 2 - \frac{1}{n+1}, \qquad \left|2 - \frac{1}{n}\right| < 2 ;$$

Ak všetky členy postupnosti $\{a_n\}$ okrem konečného počtu alebo všetky členy bez výnimky majú určitú vlastnosť **α** , hovoríme, že **takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$ majú vlastnosť α .**

Napríklad takmer všetky členy postupnosti $\{\frac{1}{n}\}$ sú menšie ako 0,001, takmer všetky členy Postupnosti $\{10^{10} - n\}$ sú záporné. Ale nie je pravda, že takmer všetky členy postupnosti $\{n\}$ sú párne.

**Limita postupnosti**

Jeden z najdôležitejších pojmov matematickej analýzy je pojem **limita postupnosti.** Skôr ako vyslovíme definíciu tohto pojmu, vysvetlíme si ho na príklade.

Príklad 11. Majme postupnosť $\{\frac{n}{n+1}\}$, jej členy sú čísla

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{9}{10}, \ldots, \frac{99}{100}, \ldots, \frac{999}{1000}, \ldots$$

Pre dostatočne veľké **n** sa členy tejto postupnosti iba málo líšia od čísla 1. Čím je väčšie **n**, tým je absolútna hodnota rozdielu medzi príslušnými členmi

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

a číslom 1 menšia. S rastúcim **n** sa tento rozdiel stále zmenšuje geometricky. Ak znázorníme členy tejto postupnosti na číselnej osi, dostaneme postupnosť bodov na priamke tak, ako to vidíme na obrázku, že rastúcim indexom **n** sa obrazy členov tejto postupnosti (body $a_n$ ) čoraz viac približujú k bodu (číslu) 1, to je, že ich vzdialenosť od bodu 1 sa stále zmenšujú.

0,5 2/3 ¾ 4/5 9/10 1

—|——————————————|————|———|——|——|——|————

0

Vzdialenosť $\mathbf{d(a_n, 1)}$ bodu $a_n$ od bodu 1 je $\mathbf{d(a_n, 1) = |a_n - 1|}$

V našom prípade $\mathbf{a_n = \dfrac{n}{n+1}}$, a teda $\mathbf{d(a_n, 1) = |a_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1}}$

Teda skutočne s rastúcim **n** sa vzdialenosť $\mathbf{d(a_n, 1)}$ to je číslo $\mathbf{|a_n - 1| = \dfrac{1}{n+1}}$

ktoré sa stále zmenšuje. Napr. pre n = 99 je

$$d(a_n, 1) = |a_{99} - 1| = \frac{1}{100}$$

. a všetky členy (body) $a_n$ s indexom n > 99 ( čiže začínajúcim členom $a_{100}$) už majú od bodu 1 vzdialenosť menšiu ako jedna stotina. Skutočne, ak n > 99, tak

$$n + 1 > 100 , \quad \text{a teda} \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$$

čo znamená, že

$$d(a_n, 1) < \frac{1}{100}$$ pre n > 99. Ak $n > 10^6 - 1$, tak $n + 1 > 10^6$

Ale $\dfrac{1}{n+1} < 10^{-6}$

To znamená, že pre všetky $n > 10^6 - 1$ je $d(a_n, 1) < 10^{-6}$ . Teda všetky body začínajú bodom s indexom $n = 10^6$ majú už od bodu 1 vzdialenosť menšiu ako $10^{-6}$.

Ak zvolíme ľubovoľné kladné malé číslo **ε** , možno v postupnosti $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ nájsť určitý člen, od ktorého začínajúce všetky ďalšie členy majú už od bodu 1 vzdialenosť menšiu než toto číslo **ε**. To znamená, že ku každému číslu $\mathbf{\varepsilon > 0}$ existuje také číslo $\mathbf{n_0}$, že pre $\mathbf{n > n_0}$ je $d(a_n,1)< \varepsilon$ . Pretože v našom prípade

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1}$$

. stačí zvoliť $n_0$ tak, aby bolo

$$\frac{1}{n_0 + 1} = \varepsilon , \quad \text{čo je} \quad n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Pre $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ bude potom $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, a teda $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ čo znamená, že $|a_n - 1| < \varepsilon$

22.

Číslo $n_0$ závisí od zvoleného čísla ε. Čím menšie je ε, tým väčšie zvolíme $n_0$. To je pochopiteľné. Čím menšie číslo ε, tým ďalej musíme v postupnosti ísť, aby sme mali zaručené, že sa ďalej stretneme len s takými členmi (bodmi), ktorých vzdialenosť od bodu 1 je menšia ako ε.

Skutočnosť, že číslo 1 má vzhľadom na postupnosť $\{a_n\}$ vlastnosť opísanú v predchádzajúcom texte, vyjadrujeme slovami: **číslo 1 je limitou postupnosti** $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

Teraz sformujeme definíciu limity postupnosti vo všeobecnom prípade. Číslo **a** sa nazýva **limita postupnosti $\{a_n\}$,** ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $n_0$, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (\text{ to je , že } d(a_n, a) < \varepsilon)$$

Skutočnosť, že číslo **a** je limitou postupnosti $\{a_n\}$ zapisujeme znakom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Namiesto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ budeme často písať iba $\lim\limits_{n} a_n$ alebo krátko $a_n \to a$ .

V zmysle tejto definície má postupnosť $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ limitu 1, čo môžeme písať ako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{alebo} \quad \frac{n}{n+1} \to 1.$$

Podobne dokážeme, že číslo **0** je limita postupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, čo znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

V tom prípade $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$. Ak je dané $\varepsilon > 0$, zvolíme $n_0$ tak, že $\frac{1}{n_0} = \varepsilon$ . to znamená, že $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Pre $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bude skutočne $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Nie každá postupnosť má limitu. Napríklad postupnosť $\{(-1)^{n+1}\}$, ktorej členy sú 1,–1,1, – 1,... limitu nemá. Dokážeme to nepriamo. Predpokladajme, že táto postupnosť má limitu **a**. To znamená, že ku každému číslu $\varepsilon > 0$, teda aj k číslu $\varepsilon = 1$, existuje číslo $n_0$ také, že pre $n > n_0$ je $|a_n - a| > 1$. Ak je $n > n_0$ tak aj $n + 1 > n_0$ a teda $|a_{n+1} - a| < 1$. Z toho vyplýva

$$|a_n - a_{n+1}| = |(a_n - a) + (a - a_{n+1})| \le |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2$$

to znamená, že $|a_n - a_{n+1}| < 2$. To je spor, pretože v danej postupnosti zrejme platí , že $|a_n - a_{n+1}| = 2$ pre každé n.

Postupnosť, ktorá má limitu, sa nazýva **konvergentná** . Postupnosť, ktorá limitu nemá, sa nazýva **divergentná**. Ak má postupnosť $\{a_n\}$ limitu a, hovoríme, že postupnosť **konverguje k číslu a.**( z latinského convergere = smerovať.).

Definíciu limity postupnosti môžeme vysloviť pomocou slovného spojenia.
Takmer všetky členy postupnosti majú vlastnosť α , ktorého presný zmysel sme vysvetlili v článku postupnosti.
Číslo **a** sa nazýva **limita postupnosti $\{a_n\}$ ,** ak pre každé číslo $\varepsilon > 0$ a pre takmer všetky členy tejto postupnosti platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Počet tých členov postupnosti, pre ktoré neplatí $|a_n - a| < \varepsilon$, závisí vo všeobecnosti od voľby čísla **ε**. Ak toto číslo ε zmenšujeme, počet týchto členov sa vo všeobecnosti zväčšuje.

Pri každom ε je však tento počet konečný. T tejto definície preto vyplýva, že existencia limity a jej hodnota nezávisí od toho, či z danej postupnosti vynecháme alebo k nej pridáme konečný počet členov.
Z definície okolia bodov a vety „**Nech a, b, c, ..... $a_n$ sú ľubovoľné čísla. Pre ich absolútne hodnoty platia tieto vzťahy.“**

1) $|a| = |-a|$

2) $\pm a \leq |a|$

3) $|ab| = |a| . |b|$

4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ **pre** $b \neq 0$

5) $|a + b| \leq |a| + |b|$, $|a + b| \leq |a| - |b|$

6) $|a_1+a_2+..a_n| \leq |a_1|+|a_2|+...+|a_n|$

a z toho vyplýva

$$|a_n - a| < \varepsilon \leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \leftrightarrow a_n \in U\varepsilon(a)$$

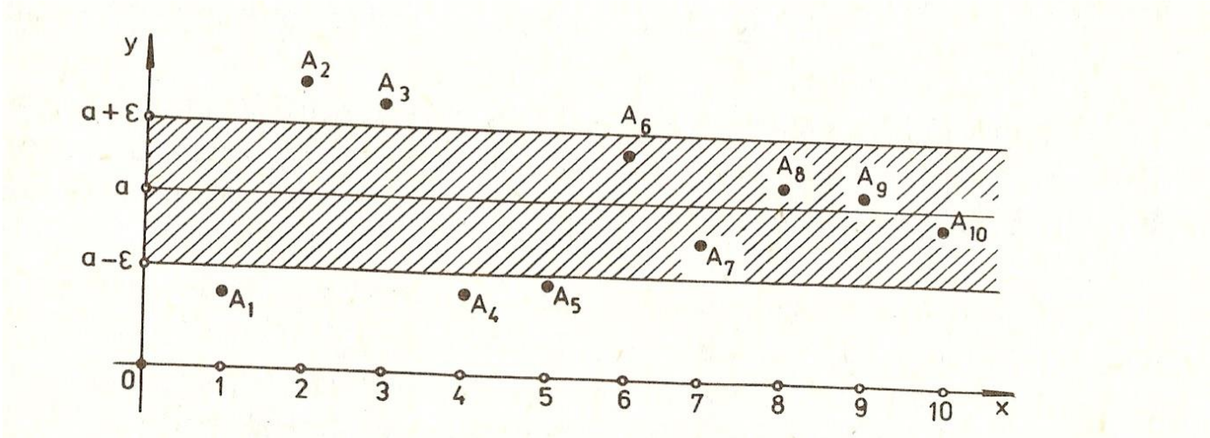
To však znamená, že výrok: Pre každé číslo $\varepsilon > 0$ a pre takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$, je ekvivalentný s výrokom: Pre každé číslo $\varepsilon > 0$ a pre takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$ platí $a_n \in U\varepsilon(a)$. Definícia limity postupnosti môžeme teda formulovať takto:

**Číslo a sa nazýva limita postupnosti $\{a_n\}$, ak v každom okolí $U\varepsilon(a)$ ležia takmer všetky členy tejto postupnosti.**

Táto formulácia je najkratšia a najjednoduchšia . Predpokladá však už poznanie presného významu formulácie pre takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$. Zdôrazňujeme, že všetky tieto definície limity postupnosti sú ekvivalentné. Líšia sa len rôznym vyjadrením jednej a tej istej vlastnosti členov postupnosti.

Skutočnosť, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ môžeme geometricky interpretovať takto:
Ak zvolíme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$. Na osi **y** v pravouhlej súradnicovej sústave vyznačíme interval $(a - \varepsilon , a + \varepsilon ) = U\varepsilon(a)$. Koncovými bodmi tohto intervalu vedieme rovnobežky s osou **x**. Dostaneme rovinný pás šírky 2ε. Stručne ho nazývame **ε – nový pás čísla (bodu) a.**
Pretože $\lim_{n\to\infty} a = a$ , takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$ ležia v okolí $U\varepsilon(a)$, to znamená, že
Ležia medzi číslami **a – ε , a + ε**. To znamená, že príslušné body $A_n[n, a_n]$ grafu danej postupnosti ležia v tomto **ε – ovom** páse.

Iba konečný počet bodov grafu sa nenachádza v tomto ε – ovom páse, ako to vidieť na obrázku.




*Obr. 4.3*

**Vybraná postupnosť a jej konvergencia.**

Majme postupnosť **$a_1, a_2, \dots a_n, \dots$** (1)

Zvoľme rastúcu postupnosť prirodzených čísel **$k_1, k_2, \dots k_n, \dots$** (2)

A utvorme postupnosť **$a_{k1}, a_{k2}, \dots a_{kn}, \dots$** (3)

Postupnosť (3) sa nazýva **postupnosť vybraná z postupnosti** (1). Postupnosť (3) vznikne tak, že z postupnosti (1) vyberieme členy s indexmi $k_1, k_2, \dots k_n, \dots$ Ak je napríklad postupnosť (2) rastúca postupnosť párnych čísel, to značí, že $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 6$, ... bude vybraná postupnosť (3) takáto

**.$a_2, a_4, a_6, \dots$**

Príklad 11. Z postupnosti $\{\frac{1}{n}\}$ môžeme utvoriť napríklad tieto vybrané postupnosti:

1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \frac{1}{2n}, \dots$

2) $1, \frac{1}{\ }, \frac{1}{\ }, \frac{1}{\ }, \dots \frac{1}{\ }, \dots$

3 5 7 2n – 1

25

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, ....$ (rastúca postupnosť všetkých prvočísel).

Nech je postupnosť $\{a_n\}$ konvergentná a nech $\mathbf{a_n \to a}$. To znamená, že v každom okolí **Uε(a)** ležia takmer všetky členy $\mathbf{a_n}$, a teda tým skôr tam ležia takmer všetky postupnosti vybranej z postupnosti $\{a_n\}$. Teda platí veta 2.

Veta 2. Nech postupnosť $\{a_n\}$ konvergovaná a má limitu **a** . Potom každá z nej vybraná .postupnosť je konvergentná a má limitu **a**.

Príklad 12. Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Postupnosť $\{\frac{1}{2m}\}$ je vybraná z postupnosti $\{\frac{1}{n}\}$, a teda

. $\lim\limits_{.n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

Poznámka. Postupnosť $\{a_n\}$ môže byť divergentná, aj keď niektorá z nej vybraná .postupnosť je konvergentná. Napríklad postupnosť $\{(-1)^n\}$ je divergentná, . ale jej vybraná postupnosť $\{(-1)^{2n}\}$ je konvergentná a má limitu 1.

Z vety 2. priamo vyplýva:

1) Postupnosť, z ktorej možno vybrať divergentnú postupnosť, je tiež divergentná.

2) Postupnosť je divergentná, ak sa z nej dajú vybrať dve konvergentné postupnosti . majúce rôzne limity.

**Základné vety o limite postupnosti.**

Počítať limity postupnosti iba na základe jej definície je vo väčšine prípadov veľmi komplikované. Preto si v tomto článku dokážeme niekoľko viet, pomocou ktorých budeme vedieť nájsť limity mnohých postupností alebo aspoň rozhodnúť, či sú konvergentné.

Veta 3. Každá postupnosť má najviac jednu limitu ( to znamená, že buď nemá nijakú alebo práve jednu).

Dôkaz. Nepriamy. Nech má postupnosť aspoň dve rôzne limity **a , b** , pričom **a < b** . To znamená, že každé okolie **Uε(a)** i každé okolie **Uε(b)** obsahujú takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$.

Majme $\varepsilon = \frac{1}{3}(b - a)$ takže $\varepsilon > 0$ ako to vidieť na obrázku.

.a – ε a .a + ε b – ε b .b + ε

Uε(a) Uε(b)

Potom $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) \neq 0$, čo znamená, že len do jedného z okolia $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$ môžu patriť takmer všetky členy postupnosti, čo je spor.

Ľahko dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta 4. Postupnosť $\{a_n\}$ má limitu **a** vtedy a len vtedy, keď má postupnosť $\{a_n - a\}$ limitu 0

Dôkaz. Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. To znamená, že ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $\mathbf{n_0}$, že pre $\mathbf{n > n_0}$ je $|\mathbf{a_n - a}| < \boldsymbol{\varepsilon}$. Ale $|\mathbf{a_n - a}| < \boldsymbol{\varepsilon}$ pre $\mathbf{n > n_0} \leftrightarrow \mathbf{a - \boldsymbol{\varepsilon} < a_n < a + \boldsymbol{\varepsilon}}$ pre $\mathbf{n > n_0} \leftrightarrow \mathbf{- \boldsymbol{\varepsilon} < a_n - a < \boldsymbol{\varepsilon}}$ pre $\mathbf{n > n_0}$.

Posledné nerovnosti však znamenajú, že takmer všetky členy postupnosti $\{a_n - a\}$ budú v intervale $(-\varepsilon, \varepsilon) = U_\varepsilon(0)$ čo je $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$. Teda skutočne platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$$

Príklad 13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = 3$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n} - 3\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

O postupnosti, ktorá má limitu 0 , hovoríme, že je **nulová** a každé z nasledujúcich troch označení je to isté tvrdenie.

$\{a_n\}$ je nulová ;

$a_n \to 0$ ;

$\lim a_n = 0$ ;

O nulovej postupnosti nám hovorí veta 5.

Veta 5. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, a opačne, ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ ;

Dôkaz . Nech $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. To znamená, že v každom okolí $U_\varepsilon(0)$ to znamená, že v každom intervale $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ležia takmer všetky členy $|a_n|$. Potom v tom intervale ležia tiež takmer všetky členy $a_n$ čo znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Opačne, nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. To znamená, že v každom $U_\varepsilon(0)$ ležia takmer všetky členy $a_n$, a teda tým skôr tam ležia aj takmer všetky členy $|a_n|$ to znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Poznámka. Všimnite si, že ak $\lim |a_n| = a \neq 0$ postupnosť $\{a_n\}$ môže byť divergentná. Napríklad nech $a_n = (-1)^n$, potom $|a_n| = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$. Avšak postupnosť $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$, ktorej členmi sú $-1, 1, -1, 1, \ldots$ je divergentná.

Majme teraz konvergentnú postupnosť $\{a_n\}$, ktorá má limitu **a**. Predpokladajme, že žiaden člen tejto postupnosti nie je väčší než určité číslo A, čo znamená, že $\mathbf{a_n \le A}$ pre všetky **n**. Otázkou je, či môže byť $\mathbf{a > A}$. Predpokladajme, že platí $\mathbf{a > A}$.

Pretože $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - A)$, teda $\varepsilon > 0$. Potom pre každé prirodzené číslo **n** platí

$$a_n \le A = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} < \frac{a}{2} + \frac{A}{2} = a - \frac{a}{2} + \frac{A}{2} = a - \frac{1}{2}(a - A) = a - \varepsilon$$

čo znamená , že $\mathbf{a_n < a - \varepsilon}$. To ale značí, že v okolí $U\varepsilon(a)$ v intervale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ neleží nijaký člen postupnosti $\{a_n\}$. To je ale spor lebo predpokladáme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ . Nemôže platiť $\mathbf{a > A}$, a tak musí platiť $\mathbf{a \le A}$. Úplne analogicky sa dokáže, že ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \ge A$, tak i $\mathbf{a \le A}$.

Potom teda platí táto veta.

Veta 6. Nech pre všetky členy postupnosti $\{a_n\}$ platí $\mathbf{a_n \le A (a_n \le A)}$ a nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Potom $\mathbf{a \le A (a \ge A)}$.

Dôsledok. Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ , $A \le a_n \le B$ pre $n = 1, 2, 3, ...$, tak $A \le a \le B$.

Poznámka. Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, môže byť $a = A$, hoci pre každé **n** je $a_n > A$. Napríklad v postupnosti $\{\frac{1}{n}\}$ sa každé $a_n = \frac{1}{n} > 0$ a limita je 0. Podobne môže $a = A$, hoci každé $a_n < A$.

Uvažujme teraz tri postupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, také, že $a_n \le b_n \le c_n$ pre všetky n. Predpokladajme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = £$, $\lim_{n\to\infty} c_n = £$. To znamená, že v každom okolí $U\varepsilon(£)$ ležia takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$ i postupnosti $\{b_n\}$. Z toho a z nerovnosti $a_n \le b_n \le c_n$ vyplýva, že v $U\varepsilon(£)$ ležia tiež takmer všetky členy postupnosti $\{b_n\}$, teda $\lim_{n\to\infty} b_n = £$. Tým je veta dokázaná .

Veta 7. ( veta o limite troch postupností). Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = £$, $\lim_{n\to\infty} c_n = £$ a nech pre každé prirodzené číslo **n** platí $\mathbf{a_n \le b_n \le c_n}$, potom aj $\lim_{n\to\infty} b_n = £$.

Príklad 14. Platí $0 < \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{1}{n}$ pre $n = 1, 2, 3, ....$ Krajné členy majú limitu 0, teda platí aj

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0.$$

Príklad 15. T nerovnosti $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{n}$ (n ´1, 2, 3,..... ) a z toho, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

. vyplýva $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

Príklad 16. Každé číslo $\mathbf{x_0}$ je limita určitých postupností s členmi $\mathbf{a_n \neq x_0}$. Napríklad z . vety 4. vyplýva, že postupnosti

$$\{ x_0 - \frac{1}{n}\}, \quad \{x_0 + \frac{1}{n}\}$$

Na otázku, či je určitá postupnosť konvergentná, je obyčajne ťažko odpovedať.

Odpoveď uľahčujú ďalšie vety.

Veta 8. Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

Dôkaz. Nech je postupnosť $\{a_n\}$ konvergentná a nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. To znamená, že ku .každému číslu ε 0, teda aj číslu ε = 1 existuje také číslo $n_0$, že pre $n > n_0$ je $|a_n - a| < 1$, ale

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a|$$

. teda platí pre $n > n_0$

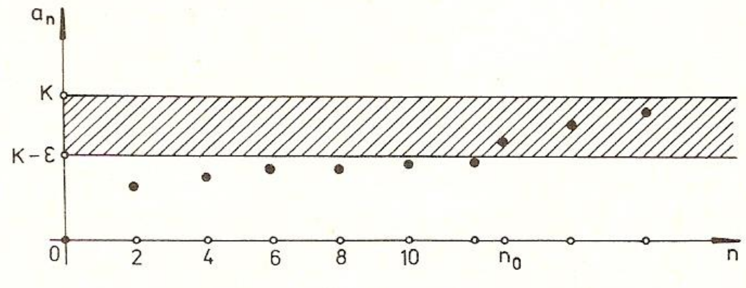
$$\mathbf{|a_n| \leq 1 + |a|}$$

Nech A je najväčšie z čísel $|a_n|$ pre $n \leq n_0$ a M = max {A, 1 + $|a|$ }. Potom $|a_n| \leq M$ pre všetky prirodzené čísla n, čo znamená, že postupnosť $\{a_n\}$ je ohraničení.

Dôsledok. Neohraničená postupnosť je divergentná. Napríklad postupnosti {n}, {log n}, $\{2^n\}$ sú divergentné, pretože sú neohraničené. Vetu 8. možno vysloviť v tvare implikácie takto:
Ak je postupnosť $\{a_n\}$ konvergentná, tak je ohraničená. Ohraničenosť je teda nutnou podmienkou konvergencie postupnosti. Táto podmienka nie je však postačujúca pre konvergenciu, pretože napr. postupnosť $\{(-1)^n\}$ je ohraničená, ale nie je konvergentná. Postupnosť $\{(-1)^n\}$ je síce ohraničená, ale nie je monotónna. Opierajúc sa o geometrickú interpretáciu limity postupnosti môžeme očakávať, že ak je postupnosť $\{a_n\}$ ohraničená a monotónna, tak je aj konvergentná. To skutočne platí.

Veta 9. Každá monotónna a ohraničená postupnosť je konvergentná.

Dôkaz. Nech je ohraničená postupnosť $\{a_n\}$ neklesajúca ( pre nerastúcu postupnosť je dôkaz analogicky). Pretože $\{a_n\}$ je ohraničená postupnosť, je aj zhora ohraničená, a teda podľa Bolzanovej vety množina všetkých členov má supremum K = sup $a_n$. Dokážeme, že lim $a_n$ = K, to znamená, že ku každému číslu ε > 0 existuje také číslo $n_0$, že pre $n > n_0$ je $|a_n - K| < \varepsilon$. Podľa vety o supremum, ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje aspoň jedno prirodzené číslo $n_0$ také, že $K - \varepsilon < a_{n0}$. Ako to vidieť na obrázku.




*Obr. 4.5*

Pretože postupnosť $\{a_n\}$ je neklesajúca pre všetky $n > n_0$ platí $a_{n0} \leq a_n$. Tak $K - \varepsilon < a_n$ pre $n > n_0$. Zrejme je $a_n \leq K > K + \varepsilon$ pre $n = 1, 2, ....$ a teda pre $n > n_0$ platí

$$K - \varepsilon < a_n < K + \varepsilon, \text{ to znamená, že } |a_n - K| < \varepsilon$$

čo sme mali dokázať.

Príklad 17. Postupnosť $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ je klesajúca a ohraničená, pretože pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n = \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} = a_{n+1}, \qquad 1 < \frac{n+1}{n} \leq 2.$$

Máme teda limitu. Nájdeme ju napr. podľa vety 4.

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = 0$

Teda potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Ak sú dané postupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_nb_n\}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ (1)

nazývame postupne súčet, rozdiel, súčin a podiel daných dvoch postupností.
Podiel má zmysel iba, ak všetky $b_n \neq 0$.

Príklad 18. Ak $\{a_n\} = \{2 + \frac{1}{n}\}$, $\{b_n\} = \{2 - \frac{1}{n}\}$

tak $\{a_n + b_n\} = \{4\}$, $\{a_n - b_n\} = \{\frac{2}{n}\}$, $\{a_n b_n\} = \{4 - \frac{1}{n^2}\}$, $\{\frac{a_n}{b_n}\} = \{\frac{2n+1}{2n-1}\}$.

Vzniká otázka, či postupnosti (1) sú konvergentné a aj postupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.
Kladnú odpoveď dáva veta 10.

Veta 10. Ak sú postupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentné, tak aj postupnosti $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ sú konvergentné. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, tak

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = a \,.\, b$

Ak okrem toho $b_n \neq 0$ pre všetky **n** a **b** $\neq 0$, tak aj postupnosť $\{\frac{a_n}{b_n}\}$

je konvergentná a platí

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$;

Dôkaz. Dokážeme tvrdenie 1. Treba dokázať, že v každom okolí $U_\varepsilon(a + b)$ ležia takmer všetky členy postupnosti $\{a_n + b_n\}$, to znamená, že ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\mathbf{n_0}$ také, že pre $n > n_0$ platí

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

Nech je dané ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$. Hľadajme príslušné $n_0$. Podľa predpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

To znamená, že ku každému kladnému číslu, a teda aj k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje také číslo $n_2$, že pre $n > n_2$ platí

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Podľa predpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. To znamená, že ku každému kladnému číslu, a teda aj k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje také číslo $n_2$, že pre $n > n_2$ platí

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Majme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pre každé $n > n_0$ platí súčasne $n > n_1$, $n > n_2$, takže platí

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teda pre každé $n > n_0$ platí

$$\left|(a_n + b_n) - (a + b)\right| = \left|(a_n - a) + (b_n - b)\right| \le \left|a_n - a\right| + \left|b_n - b\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

a to sme chceli dokázať. Tvrdenia 2. a 3. sa dokazujú analogicky.

Poznámka. Ak sa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a **c** je ľubovoľné číslo, tak $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, ak $b_n = c$, pre všetky n, a teda podľa vety 10. je $\lim\limits_{n\to\infty} (ca_n) = ca$. Špeciálne platí:

$\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -a$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + (-b_n)) = a + (-b) = a - b$.

Tieto výsledky spolu s vetou 10 môžeme prehľadne zhrnúť do týchto vzorcov.

Ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, tak

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

Ak okrem toho $\lim b_n \neq 0$, tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Úplnou indukciou možno platnosť týchto vzorcov ( pre súčet a súčin) rozšíriť na ľubovoľný konečný počet sčítancov alebo činiteľov.

Príklad 19. Opätovným použitím vzorcov (2) môžeme riešiť i zložitejšie príklady. Hľadajme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 3n + 2}$$

Pýtajme sa, či táto limita existuje, a ak existuje, aká je jej hodnota. Napísaný zlomok má zmysel pre $n \ge 3$ ( menovateľ sa nesmie rovnať nule).
Príklad upravíme pre $n \ge 3$ takto

$$\frac{2n^2+1}{n^2-3n+2} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-3\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Vieme, že $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Podľa (2) postupne dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\,.\,\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\right) = 0\,.\,0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 2\,.\,0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{n}\right) = (-3)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = (-3)\,.\,0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 2+0 = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}1 - \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} = 1-0+0 = 1$$

Limita menovateľa je $1 \neq 0$, teda hľadaná limita existuje a platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-3n+2} = \frac{2}{1} = 2$$

Poznámka. Postupnosti $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ môžu mať limitu, hoci postupnosť $\{a_n\}$ alebo $\{b_n\}$ limitu nemá. Napríklad z postupnosti $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\{n\}$ je druhá divergentná napriek tomu súčin týchto postupnosti, čo je $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ a podiel $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ sú konvergentné postupnosti.

## Číslo e

Dôležitú úlohu v matematike má postupnosť, ktorej **n – tý** člen je

$$\mathbf{a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Dokážeme najskôr, že táto postupnosť je rastúca. Podľa binomickej vety platí

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^2} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{n!}\,\frac{1}{\,} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

A teda $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots +$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Pretože $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$, $1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1}$, ... $1 - \frac{n-1}{n} < -\frac{n-1}{n+1}$

Je $a_n < a_{n+1}$ to znamená, daná postupnosť je rastúca. Ďalej je zrejme, že

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Pretože pre $k \geq 2$ je $1 - \frac{k-1}{n} < 1$, $\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} < \frac{1}{2^{k-1}}$

pritom platí nerovnosť

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2-2}}\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 + \frac{1}{\,}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{\,}\right)^{n-1}$$

Teda $1 < a_n < 3$ čo znamená, že daná postupnosť je ohraničená. Pretože je aj monotónna, podľa vety 9 je konvergentná. Jej limitu budeme označovať písmenom **e**. Teda

$$\mathbf{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Možno dokázať, že číslo **e** je iracionálne. Toto číslo **e** spolu s číslom π je jedným z najdôležitejších čísel matematickej analýzy. Číslo **e** je aj súčtom nekonečného radu

$$\mathbf{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \dots} \qquad \mathbf{e = 2{,}71828\dots}$$

Číslo **e** má taktiež vlastnosti, že je výhodné zvoliť ho za základ logaritmov. Logaritmy so základom **e** sa nazývajú **prirodzené logaritmy**. Namiesto $\log_e x$ píšeme obyčajne iba $\ln x$.

## Mocnina s iracionálnym exponentom.

Symbol $\mathbf{a^x}$ máme zatiaľ definovaný iba pre racionálne číslo **x**. Vieme čo znamená

$2^5$, $5^{2/3}$ , a podobne

Nevieme však ešte, čo znamená $\mathbf{a^x}$, keď x je iracionálne číslo. Napríklad čo je to $2^\pi$ ? Našou úlohou je definovať význam symbolu $\mathbf{a^x}$ pre všetky reálne čísla **x** ( teda i pre iracionálne). Ponúka sa myšlienka: zvoľme postupnosť $\{r_n\}$ racionálnych čísel konvergujúcu k číslu **x**, to je takú, že $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

V článku o vybraných postupnostiach sme ukázali, že taká postupnosť a to dokonca neklesajúca, existuje. Limitu postupnosti $\{a^{r_n}\}$ označíme $\mathbf{a^x}$**.** Ale aby sme to mohli vykonať, musíme najskôr ukázať, že $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ existuje a nezávisí od toho, ktorú postupnosť

Racionálnych čísel konvergujúcu k **x** sme zvolili a napokon, že v prípade racionálneho čísla x sa táto limita rovná číslu $a^x$, ktoré sme definovali. To všetko nám zaručuje veta 11. , ktorú uvedieme bez dôkazu.

Veta 11. Pre ľubovoľné reálne číslo **a** > **0** a ľubovoľné reálne číslo **x** platí:

a) Ak $\{ r_n\}$ je ľubovoľná postupnosť racionálnych čísel taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ , tak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \alpha$ . Toto číslo α je kladné a nezávisí iba od **a** a **x**.

b) Ak **x** je racionálne číslo, tak $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a^x}$**.**

Číslo α z vety 11. označujeme symbolom $\mathbf{a^x}$. Z tejto definície vyplýva, že číslo $a^x$ môžeme aproximovať s ľubovoľnou presnosťou mocniny s racionálnym exponentom. Napríklad $2^\pi \doteq 2^{3,14}$. Možno dokázať, že tak x leží medzi racionálnymi číslami $\mathbf{r_1, r_2}$, tak $\mathbf{a^x}$ leží medzi číslami $\mathbf{a^{r1}, a^{r2}}$, čo znamená, že $\mathbf{a^{r1} < a^x < a^{r2}}$, ak $\mathbf{r_1 < x < r_2}$.

Napríklad $2^{3,14} < 2^\pi < 2^{3,15}$, $2^{3,141} < 2^\pi < 2^{3,142}$, $2^{3,1415} < 2^\pi < 2^{3,1416}$

Možno dokázať, že pre takto definovanú ( zovšeobecnenú ) mocninu platia tie isté pravidlá ako pre mocniny s racionálnym exponentom. $a^{x1} \cdot a^{x2} = a^{x1+x2}$, $(a^{x1})^{x2} = a^{x1x2}$

## Nevlastná limita postupnosti.

Majme postupnosť $\{a_n\} = \{n^2\}$. Čo je $1^2, 2^2, 3^2, .... n^2, ...$ (1)

Táto postupnosť zrejme nie je ohraničená, teda podľa vety 8. nie je konvergentná. Má však túto jednoduchú vlastnosť: s rastúcim indexom **n** vzrastajú členy tejto postupnosti nad každé číslo. Presne povedané: Ku každému číslu **A** existuje číslo $\mathbf{n_0}$ také, že pre $\mathbf{n > n_0}$ je $\mathbf{a_n > A}$, to znamená, že v každom okolí $U_A(\infty)$ ležia takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$. Skutočne: Ak je $A \leq 0$, stačí voliť $\mathbf{n_0 = 0}$, alebo pre $\mathbf{n > n_0}$ je $\mathbf{n^2 > 0 \geq A}$, čiže $\mathbf{a_n > A}$. Ak je $\mathbf{A > 0}$, stačí voliť $\mathbf{n_0 = \sqrt{A}}$, lebo pre $\mathbf{n > n_0}$ je $\mathbf{n^2 > n_0 = A}$. Je jasné, že čím väčšie je A, tým väčšie musíme vo všeobecnosti voliť $n_0$, ak chceme, aby pre všetky $n > n_0$ bolo $n^2 > A$.

Podobnú vlastnosť má postupnosť $\{a_n\} = \{ -2_n + 1\}$, .... (2)

$- \quad 1, -3, -5, -7, ... -2_n + 1, ....$

Tu platí toto : Nech je A akékoľvek číslo, existuje číslo $\mathbf{n_0}$ také, že pre $\mathbf{n > n_0}$ je $\mathbf{a_n < A}$. Stačí voliť $\mathbf{n_0}$ tak, aby $-2n_0 + 1 = A$, to znamená

$$.\mathbf{n_0 = \frac{1}{2}(1 - A)}$$

Pre $n > n_0$ je potom $-2_n + 1 < -2_{n0} + 1 = A$, čiže $a_n < A$.
Opísané vlastnosti vyjadrujeme krátko slovami: postupnosť (1) má nevlastnú limitu $\infty$, postupnosť (2) má nevlastnú limitu $-\infty$ . A všeobecne ju definujeme:

---

Postupnosť $\{a_n\}$ má nevlastnú limitu $\infty$, ak v každom okolí $U_A(\infty)$ ležia takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$, čo značí, že ak ku každému číslu A existuje také číslo $n_0$, že pre $n > n_0$ je $.a_n > A$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ alebo krátko $a_n \to \infty$.

Podobne definujeme: Ak v každom v okolí $U_A(-\infty)$ ležia takmer všetky členy postupnosti $\{a_n\}$, čo znamená, že ak ku každému číslu A existuje také číslo $n_0$, že pre $n > n_0$ je $a_n < A$, hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}$ má nevlastnú limitu $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ alebo $a_n \to -\infty$.

Poznámka . Limita v zmysle definície uvedenej v článku limita postupnosti sa často nazýva **vlastná limita** , aby sme ju odlíšili od nevlastnej limity. Názov konvergentná postupnosť používame len pre postupnosti, ktoré majú vlastnú limitu.

Ak je daná postupnosť $\{a_n\}$, zrejme môžu nastať tieto prípady:

1) existuje vlastná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
4) Neexistuje ani vlastná, ani nevlastná limita. V tom prípade hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}$ je **oscilujúca**. Taká je napr. postupnosť $\{(-1)^n\}$. Možno dokázať, že tieto štyri možnosti sa navzájom vylučujú.

Poznámka . Pomocou okolí môžeme definíciu vlastnej limity sformulovať spoločne takto: Bod **a** je limitou postupnosti $\{a_n\}$, ak ku každému okoliu $U(a)$ existuje také okolie $U(\infty)$, že pre každé $n \in U(\infty)$ je $a_n \in U(a)$. Ak **a** je číslo, hovoríme o vlastnej limite, ak $\mathbf{a} = \infty$ alebo $\mathbf{a} = -\infty$, hovoríme o nevlastnej limite.

Uvedieme bez dôkazu ešte niekoľko dôležitých viet o limite monotónnych postupnosti a o nevlastnej limite.

Veta 12. a) Nech je postupnosť $\{a_n\}$ neklesajúca. Ak nie je zhora ohraničená, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
A je zhora ohraničená, má vlastnú limitu **a** pričom platí $a_n \le a$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Nech je postupnosť $\{a_n\}$ nerastúca. Ak nie je zdola ohraničená, platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Ak je zdola ohraničená, má vlastnú limitu **a** a platí $a_n \ge a$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Z tejto vety vyplýva:

Veta 13. Monotónna postupnosť je konvergentná vtedy a len vtedy, keď je ohraničená.

Veta 14. a) Ak je postupnosť $\{a_n\}$ ohraničená a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ , tak

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \text{ ak } b_n \neq 0 \text{ pre } 1, 2, \ldots$$

b) Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, tak $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$,

c) Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, tak $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = -\infty$.

d) Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, tak

$$\lim (a_n b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{ak } a > 0 \\ -\infty, & \text{ak } a < 0 \end{cases}$$

e) Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $b_n > 0$ pre všetky n, tak

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \infty, & \text{ak } a > 0 \\ -\infty, & \text{ak } a < 0 \end{cases}$$

Príklady: 1. $\lim_{n\to\infty} 2^n$, a teda $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$,

2. $\lim [(-1)^n + n] = \infty$, $\lim [(-1)^n - n] = -\infty$,

Pretože postupnosť $\{(-1)^n\}$ je ohraničená a postupnosť $\{n\}$ ma nevlastnú limitu $\infty$.

3. $\lim_{n\to\infty} (n^3 - 5n - 10) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n} - \frac{10}{n^3}\right) n^3 = \infty$

Pretože $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n} - \frac{10}{n^3}\right) = 1 > 0$, $\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$.