Matematika

Opakovanie stredoškolskej matematiky, nie len pre triedy so zameraním na matematiku

Marek Vrábel

2004

Táto kniha vznikla na základe poznatkov, ktoré som získal na hodinách matematiky, počas môjho štúdia na Gymnáziu na Párovskej ul. v Nitre.

Mal som šťastie, že mojím učiteľom matematiky bol Ivan Teplička, ktorému by som sa chcel touto cestou poďakovať. Ivan Teplička patrí medzi uznávaných učiteľov matematiky v širokom okolí. Svoje hodiny oživuje históriou matematiky a tým sú jeho hodiny pútavejšie.

Čitateľ tu nájde poznatky zo všetkých ročníkov strednej školy usporiadaných do ucelených častí a to prispieva k lepšiemu pochopeniu danej problematiky, pretože ako vieme počas štúdia si študent osvojuje nové poznatky, ktoré doplňujú a rozširujú tie predchádzajúce.

Posledné kapitoly, označené D1-D6, sú zamerané na zopakovanie si Množín, Konštánt a premenných, Výrazom a ich úpravám, Operáciám s polynómami, Slovným úlohám a poslednou je kapitola venovaná Planimetrii. Tieto kapitoly som sa rozhodol zaradiť na koniec, niežeby boli nedôležité, ale poznatky z nich sa využívajú vo viacerých častiach diela a bolo by nesprávne im nevenovať zopár stránok.

Autor

1. ZÁKLADY MATEMATICKEJ LOGIKY

1. Výroky

- Pojem výroku, pravdivostná hodnota, hypotéza.
- Druhy výrokov:
  - podľa toho, ako vznikli - jednoduché
    - zložené - ich druhy a pravdivostné hodnoty
  - podľa toho, či obsahujú kvantifikátory - kvantifikované
    - nekvantifikované

2. Výrokové formuly

- tautológia, kontradikcia
- obmena výrokovej formuly
- obrátená implikácia

3. Negácia výroku

- negácia zložených výrokov
- negácia kvantifikovaných výrokov.

.....

- **<u>výrok</u>** je oznamovacia veta, ktorá môže byť len pravdivá alebo nepravdivá, výroky označujeme veľkými písmenami A, B,...
- každému výroku priraďujeme pravdivostnú hodnotu:
  pravda.....1, p
  nepravda...0, n
- výrok, ktorého pravdivostnú hodnotu nepoznáme nazývame hypotéza

<u>Pr.</u>

A... Bratislava je hlavné mesto Slovenska. **1** (alebo označíme **p**)
B... Nitra je na východe Slovenska. **0** (alebo označíme **n**)
C... 2+3<6 **1**
D... 5-2>8 **0**
E... Na Marse je život. (o tomto tvrdení nevieme rozhodnúť, čiže to nie je výrok, ale **hypotéza**)

- výroky, ktoré vzniknú spojením dvoch alebo viacerých výrokov logickými spojkami sa nazývajú **<u>zložené výroky</u>**, ostatné sú **<u>jednoduché</u>**
  (**logické spojky** sú slová alebo slovné spojenia, ktorými spájame výroky)

a) **konjunkcia** výrokov A,B je výrok utvorený z výrokov A,B pomocou spojky **a**
A a B (čo značíme **A** $\wedge$ **B** a čítame A a súčasne B)
b) **disjunkcia** (alternatíva) výrokov A,B je výrok utvorený z výrokov A,B pomocou spojky **alebo**
A alebo B (čo značíme **A** $\vee$ **B** a čítame A alebo B)
c) **implikácia** výrokov A,B je výrok utvorený z výrokov A,B pomocou spojky **Ak..., tak...**
Ak A, tak B (čo značíme **A** $\Rightarrow$ **B** a čítame A implikuje B)
d) **ekvivalencia** výrokov A,B je výrok utvorený z výrokov A,B pomocou spojky **... práve vtedy, keď ...**
A práve vtedy, keď B (čo značíme **A** $\Leftrightarrow$ **B** a čítame A ekvivalentné s B)

<u>Pr.</u>

A... Príde Peter <u>a</u> príde Jana. (výrok A je zložený z dvoch výrokov: Príde Peter. Príde Jana. označme ich B,C potom možno namiesto A napísať B $\wedge$ C)
B... Príde Peter <u>alebo</u> príde Jana. (výrok B je zložený z dvoch výrokov: Príde Peter. Príde Jana. označme ich C,D potom možno namiesto B napísať C $\vee$ D)
C... <u>Ak</u> príde Peter, <u>tak</u> príde Jana. (výrok C je zložený z dvoch výrokov: Príde Peter. Príde Jana. označme ich D,E potom možno namiesto C napísať D $\Rightarrow$ E)

D... Peter príde <u>práve vtedy, keď</u> príde Jana. (výrok D je zložený z dvoch výrokov: Príde Peter. Príde Jana. označme ich E,F potom možno namiesto D napísať E $\Leftrightarrow$ F)

(**pozor !** ak sa vo výroku vyskytuje spojenie **hovorí, že** tak je to jednoduchý výrok pr.: V televízii <u>hovorili, že</u> zajtra bude snežiť, alebo bude pršať.)

- výroky obsahujúce kvantifikátory nazývame **<u>kvantifikované výroky</u>**, výroky, ktoré neobsahujú kvantifikátory sú nekvantifikované výroky
(**kvantifikátory** sú slová alebo slovné spojenia udávajúce počet objektov: aspoň tri, najviac jeden, práve dvaja, nikto, niekto, každý, skoro všetci, žiadny,...)

<u>Pr.</u>

$M = \{13,14,15,16,17,18,19,20\}$

A... Aspoň tri čísla množiny M sú zložené

B...Prišli najviac štyria.

- **<u>výrokové formuly</u>** sú zápisy utvorené z výrokových premenných, znakov logických spojok a zátvoriek tak, že vyjadrujú stavbu výrokov

<u>Pr.</u>

$(A \wedge B) \Rightarrow C$

$A \Leftrightarrow (B \vee C)$

A,B,C sú výrokové premenné, za ktoré sa dosádzajú výroky

- každej výrokovej formule priraďujeme tabuľku pravdivostných hodnôt
(spojku **alebo** chápeme v zmysle nevylučovacom: $1 \vee 0$ je 1)

A	A'	$A \wedge A'$
1	0	0
0	1	0

A	A'	$A \vee A'$
1	0	1
0	1	1

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow A$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Tabuľka pravdivostných hodnôt základných zložených výrokov

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

- výroková formula, ktorá vždy nadobúda pravdivostnú hodnotu pravda sa nazýva **<u>tautológia</u>**
$A \vee A'$ (tercium non datur - zákon vylúčenia tretieho), $A \Rightarrow A$, $(A \wedge B) \Rightarrow B$, $A \Rightarrow (A \vee B)$, $(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$
- výroková formula, ktorá vždy nadobúda pravdivostnú hodnotu nepravda sa nazýva **<u>kontradikcia</u>**
$A \wedge A'$
(ostatné sú splniteľné)
- ak dve výrokové formuly s rovnakými premennými nadobúdajú v každom riadku tabuľky rovnakú pravdivostnú hodnotu, tak jedna je **<u>obmenou</u>** druhej
$A \Rightarrow B$ a $B' \Rightarrow A'$, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ a $A \Leftrightarrow B$ (obmenu A označíme A_o)
(obmenu vytvoríme tak, že výrok dva krát znegujeme)

- **<u>obrátenou implikáciou</u>** k $A \Rightarrow B$ je $B \Rightarrow A$, nemusí mať rovnakú pravdivostnú hodnotu, ale môže

- **<u>negácia</u>** výroku **V** je výrok **V'** (**non V**) utvorený z výroku V, ktorý popiera tvrdenie výroku V (čiže má opačnú pravdivostnú hodnotu)
(**pozor !** negáciu nemôžme utvoriť tak, že pred výrok A pridáme slovné spojenie Nieje pravda, že A)
<u>Pr.</u>

A... Mám hnedý sveter. → A'... Nieje pravda, že mám hnedý sveter.

A... Mám hnedý sveter. → A'... Nemám hnedý sveter.

- ak výrok obsahuje niektoré z možností, jeho negácia musí obsahovať všetky zvyšné možnosti

<u>Pr.</u>

A... Bratislava je hlavné mesto Slovenska. **1**
A'...Bratislava nieje hlavné mesto Slovenska. **0**
B... 2+3<6 **1**
B'...2+3≥6 **0**
(tu je ukázané, že vo výroku B je znak <, teda vo výroku B' musia by ostatné možnosti, pre relačný vzťah, čiže ≥)

- negácia zložených výrokov:

$$(A \wedge B)' = A' \vee B'$$
$$(A \vee B)' = A' \wedge B'$$
$$(A \Rightarrow B)' = A \wedge B'$$
$$(A \Leftrightarrow B)' = (A \wedge B') \vee (B \wedge A')$$

<u>Pr.</u>

A... Budem čítať a pozerať TV.
A'....Nebudem čítať alebo nebudem pozerať TV.

- negácia kvantifikovaných výrokov sa tvorí tak, že zameníme kvantifikátory za opačné
(**pozor !** $M = \{13,14,15,16,17,18,19,20\}$

A... Aspoň tri čísla množiny M sú zložené.

A'…Aspoň tri čísla mn. M niesu zložené.

A'...Najviac dve čísla mn. M sú zložené.

<u>Pr.</u>

A... Aspoň piati žiaci prišli neskoro.
A'...Najviac štyria žiaci prišli neskoro.
B... Existuje aspoň 25 dvojciferných čísel.
B'...Existuje najviac 24 dvojciferných čísel.
C... Práve 38 žiakov prvých ročníkov bolo v kine.
C'...Najviac 37 alebo aspoň 39 žiakov prvých ročníkov bolo v kine.

<u>Cvičenia</u>

1. Utvorte negáciu:

a) Všetci nominovaní pretekári sú zdraví.
b) Každý koreň danej rovnice je väčší ako 2.
c) Nebol v práci najviac 10 dní.
d) Presne pri treťom štarte motor naskočil.
e) $3+\sqrt{2} \leq \sqrt{20}$
f) $\sqrt{7}-\sqrt{5}=\sqrt{2}$

g) Nikto nechýba.
h) Práve jeden chýba.
i) Predbehol každého súpera.
j) Nič nevidel.
k) Ktosi nás videl.
l) Nikto to nevie.
m) V danom trojuholníku je najviac jeden tupí uhol.
n) Všetci sme odišli.

2 . Vyjadrite stavbu (vytvor výrokovú formulu)**:**
a) Bude snežiť a pršať.
b) Keď sa učím, nepozerám televízor.
c) Ak vyhráme, alebo budeme remizovať, staneme sa majstrami sveta.
d) Dnes sa budem učiť, alebo ak sa učiť nebudem, budem pozerať televízor.

3. Utvorte negáciu a obmenu:
a) Ak bude pršať, tak budem spať alebo čítať.
b) Ak bude snežiť alebo mrznúť, tak sa pôjdem lyžovať a korčuľovať.
c) Citróny kúpim práve vtedy, keď nebudú pomaranče.

4. Vyjadrite všetky základné typy zložených výrokov pomocou konjunkcie a negácie

5. Vyjadrite všetky základné typy zložených výrokov pomocou disjunkcie a negácie

Neriešené úlohy

1. Napíšte výrokovú formulu vyjadrujúcu stavbu výroku a utvorte negáciu:
a) Ak je vodič na neprehľadnom mieste, neotáča sa a necúva.
b) Ak je prirodzené číslo zložené a nie je druhou mocninou, tak má aspoň štyroch deliteľov.
c) Ak dodávatelia splnia úlohy, dokončíme stavbu a začneme montáž.
d) Do Bratislavy poletím lietadlom alebo pôjdem vlakom a ak sa zdržím aspoň dva dni, tak sa ubytujem v hoteli.
e) Ak bude svietiť slnko a nebude zima, tak pôjdem na výlet alebo na futbal.

2. Utvorte negáciu výroku:
a) Všetky prvočísla sú nepárne čísla.
b) Nájde sa aspoň osem dvojciferných prvočísiel.
c) Ak sú priamky rovnobežné, tak úloha má najviac dve riešenia.
d) $\forall a \in Q \forall b \in Q : a < b \Rightarrow \exists c \in R - Q : a < c < b$
e) $\forall a \in N \forall b \in N \exists c \in Z :$ $a^2 - 2b^2 = c$
f) $\forall a \in R \forall b \in R : a \leq b \exists c \in R^+ : b = a + c$
g) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in R : |x - y| < \delta \Rightarrow |x - 2y| < \varepsilon$

3. Vyslovte definíciu funkcie, ktorá:
a) nie je prostá, b) nie je zhora ohraničená, c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$

4. Napíšte obmenu výrokovej formuly:
a) $A \Rightarrow B$, b) $A \Leftrightarrow B$, c) $A \Rightarrow (B \wedge C')$, d) $(A \vee B)' \wedge (A' \Rightarrow B)$

5. Napíšte obmenu obsahujúcu iba konjunkciu a negáciu:
a) $A \Rightarrow B'$, b) $A \Rightarrow (B \wedge C')$, c) $(A \vee B') \wedge (A' \Rightarrow B)$

6. Napíšte tri obmeny výrokovej formuly:

a) $A \Rightarrow B$, b) $A \Leftrightarrow B$

7. Nájdite:

a) aspoň päť tautológií

b) aspoň tri kontradikcie

8. Vyjadrite všetky druhy zložených výrokov iba pomocou:

a) konjunkcie a negácie

b) alternatívy a negácie.

9. Napíšte obmenu obsahujúcu iba konjunkciu a negáciu:

a) $A \Rightarrow B'$, b) $A \Rightarrow (B \wedge C')$, c) $(A \vee B)' \wedge (A' \Rightarrow B)$

10. Utvorte negáciu, obmenu a obrátenie:

a) Ak má štvoruholník ABCD aspoň tri strany zhodné a jeho uhlopriečky sa rozpoľujú, tak je štvorec alebo kosoštvorec.
b) Ak sú priamky rovnobežné, tak úloha má najviac dve riešenia.
c) Ak je prirodzené číslo zložené a nie je druhou mocninou, tak má aspoň štyroch deliteľov.

2. METÓDY DÔKAZOV V MATEMATIKE

1. Dôkazy matematických viet
- úvod
- modus ponens
- modus tolens
- reťazec implikácií

2. Druhy dôkazov
- dôkazy jednoduchých výrokov - priamy, sporom
- dôkazy implikácií - priamy, sporom, nepriamy
- dôkazy ekvivalencie
- dôkaz matematickou indukciou

.....

- **matematika** ako veda je budovaná axiomaticky, základom každej matematickej teórie je niekoľko primitívnych **pojmov** a **axióm**

(primitívne pojmy sú také, ktoré v rámci danej teórie považujeme za známe; delia sa na **primitívne objekty** a **primitívne vzťahy**)
(axiómy sú vety, ktoré v rámci danej teórie považujeme za pravdivé bez dôkazu)

- pri budovaní matematickej teórie sa postupuje tak, že sa vyslovujú hypotézy a hľadá sa ich pravdivostná hodnota,
- **matematické vety** sú pravdivé výroky s matematickým obsahom
- ostatné vety sa dokazujú a o statné pojmy sa definujú

- **dôkaz** je logicky správny postup, ktorým hypotéze priradíme pravdivostnú hodnotu „pravda"

- o tom, čo je logicky správny postup, hovoria **<u>pravidlá odvodzovania</u>** (úsudky)**:**

.....
..... predpoklady
.....
..... záver

1. Modus ponens

A platí
$A \Rightarrow B$ platí
B platí

A	B	A⇒B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

2. Modus tolens

B neplatí
$A \Rightarrow B$ platí
A neplatí

3. Reťazec implikácií

$A \Rightarrow B_1$ platí
$B_1 \Rightarrow B_2$ platí
$B_2 \Rightarrow B_3$ platí
$\vdots$
$B_n \Rightarrow B$ platí
$A \Rightarrow B$ platí

<u>Pr.</u>

Otec povedal: „Ak budeš vyznamenaný, kúpim ti bicykel.“
Niesom vyznamenaný a nemám bicykel. Splnil otec sľub?
A...Budeš vyznamenaný
B...Kúpim bicykel
A⇒B

A⇒B platí
A neplatí
B ?

A	B	A⇒B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Otec sľub neporušil.

<u>Pr.</u>

Zistite správnosť nasledujúcich úsudkov:

a) A neplatí
$A \vee B$ platí
B platí

A	B	A∨B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Logicky správny

b) A platí
$A \Rightarrow B$ neplatí
B platí

A	B	A⇒B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Logicky nesprávny

c) B platí
$A \Rightarrow B$ platí
A platí

A	B	A⇒B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Logicky nesprávny

- **<u>priamy dôkaz výroku</u>:** nájdeme vhodný výrok V, o ktorom je známe, že platí (axióma alebo už je dokázaný) a zostavíme reťazec pravdivých implikácií

$V \Rightarrow A_1$	platí				
$A_1 \Rightarrow A_2$	platí	$\longrightarrow$	V	platí	
$\vdots$			$V \Rightarrow A$	platí	
$A_n \Rightarrow A$	platí		A	platí	modus ponens
A	platí				

<u>Pr.</u>

Je pravdivý výrok A a implikácie $A \Rightarrow B,\ C \Rightarrow B', A' \Rightarrow E', E' \Rightarrow D, C' \Rightarrow D'$. Dokážte E.

A	platí
$A \Rightarrow B$	platí
$B \Rightarrow C'$	platí (obmena $C \Rightarrow B'$)
$C' \Rightarrow D'$	platí
$D' \Rightarrow E$	platí (obmena $E' \Rightarrow D$)
E	platí

<u>Pr.</u>

Dokážte, že $2\sqrt{6} < 5$

A... $2\sqrt{6} < 5$

Dôkaz

V ... $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 > 0$

A_1... $(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 > 0$

A_2... $2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 > 0$

A_3... $5 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} > 0$

A ... $2\sqrt{6} < 5$

$2\sqrt{6} < 5$ platí

Pomocný výpočet

$2\sqrt{6} < 5$

$2\sqrt{2}\sqrt{3} < 3 + 2$

$2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 > 0$

$(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 > 0$

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 > 0$

<u>Pr.</u>

Dokážte, že $\forall n \in N : 2 \mid (n^2 - 3n)$.

$\forall n \in N : n = 2k \vee n = 2k+1; k = 0,1,2,\ldots$

1.

$n = 2k \ldots n^2 - 3n = (2k)^2 - 3.2k = 4k^2 - 6k = 2.(2k^2 - 3k) = 2x$

2.

$n = 2k+1 \ldots n^2 - 3n = (2k+1)^2 - 3.(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 - 6k - 3 =$

$= 4k^2 - 2k - 2 = 2.(2k^2 - k - 1) = 2y$

$\forall n \in N : 2 \mid (n^2 - 3n)$ platí

- **<u>dôkaz výroku sporom</u>:** pri tejto metóde vychádzame z negácie výroku, zostavíme reťazec pravdivých implikácií a dospejeme k nejakému výroku, o ktorom vieme, že nieje pravdivý a z toho vyplýva, že negácia je nepravdivá, čiže pôvodný výrok je pravdivý

A'					
$A' \Rightarrow B_1$	platí				
$B_1 \Rightarrow B_2$	platí	$\longrightarrow$	$A' \Rightarrow B$	platí	
$\vdots$			B	neplatí	
$B_n \Rightarrow B$	platí		A'	neplatí	modus tolens
B	neplatí		A	platí	
A'	neplatí				
A	platí				

<u>Pr.</u>

Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.
Spravíme dôkaz sporom.

Predpokladajme, že $\sqrt{2} \in Q$, čiže $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \wedge D(p,q) = 1$

$$p = \sqrt{2}.q$$
$$p^2 = 2q^2$$
$$p = 2k$$
$$2q^2 = 4k^2$$
$$q^2 = 2k^2$$
$$q = 2l$$
$$D(p,q) = 2 \neq 1$$

máme spor, tak $\sqrt{2} \notin Q$

- **<u>dôkazy implikácií</u>** ($A \Rightarrow B$)

PRIAMY

$A \Rightarrow B_1$	platí
$B_1 \Rightarrow B_2$	platí
$\vdots$	
$B_n \Rightarrow B$	platí
$A \Rightarrow B$	platí

<u>Pr.</u>

Dokážte $\forall n \in N : 3|n \Rightarrow 3|(n^2 + 6n)$

$$\forall n \in N : n = 3k \Rightarrow n^2 + 6n = 3x$$
$$\forall n \in N : 3|n$$
$$n = 3k$$
$$n^2 + 6n = (3k)^2 + 6.3k = 9k^2 + 18k = 3.(3k^2 + 6k) = 3x$$
$$3|n^2 + 6n$$

NEPRIAMY
(dokazuje sa obmena, ktorá má rovnakú pravdivostnú hodnotu $B' \Rightarrow A'$)
$B' \Rightarrow A'$

$B' \Rightarrow B_1$	platí
$B_1 \Rightarrow B_2$	platí
$\vdots$	
$B_n \Rightarrow A'$	platí
$B' \Rightarrow A'$	platí
$A \Rightarrow B$	platí

Pr.

Dokážte $\forall n \in N : 2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$

$\forall n \in N : 2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2$

$\forall n \in N : 2 \nmid n$

$n = 2k + 1$

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2.(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1$

$2 \nmid n^2$

$\forall n \in N : 2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$ platí

SPOROM
(dokazuje sa negácia, ktorá má opačnú pravdivostnú hodnotu $A \wedge B'$)
$A \wedge B'$

$(A \wedge B') \Rightarrow A_1$	platí
$A_1 \Rightarrow A_2$	platí
$A_1 \Rightarrow A_3$	platí
$\vdots$	
$A_n \Rightarrow Z$	platí
Z	neplatí
$A \wedge B'$	neplatí
$A \Rightarrow B$	platí

- **dôkaz výroku** $A \Leftrightarrow B$
(robí sa nepriamo)
$A \Leftrightarrow B$ **je to isté ako** $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1. dokážeme $A \Rightarrow B$
2. dokážeme $B \Rightarrow A$

- **matematická indukcia**
indukcia - spôsob uvažovania, pri ktorom z konkrétnych prípadov robíme všeobecné závery
dedukcia - spôsob uvažovania, pri ktorom všeobecné závery aplikujeme na konkrétne prípady
- poznáme dva druhy indukcie:
1. neúplná - z niektorých konkrétnych prípadov (nie všetkých) urobíme všeobecný záver, nieje dôkazovou metódou a využíva sa pri vyslovovaní hypotéz
2. úplná - z preskúmania konkrétnych prípadov urobíme všeobecný záver
- úplná indukcia v množine prirodzených čísel sa nazýva **matematická indukcia**

- matematická indukcia je dôkazová metóda, ktorou dokazujeme vety typu:

$\forall n \in N : V(n)$

$\forall n \in N; n \geq n_0 : V(n)$

- dôkaz matematickou indukciou sa vykonáva v **dvoch krokoch**

1. Overíme, že platí $V(1)$ alebo $V(n_0)$

2. Dokážeme vetu tvaru: $\forall k \in N : V(k) \Rightarrow V(k+1)$, kde $V(k)$ je **indukčný predpoklad** a $V(k+1)$ je **indukčný krok**

Touto metódou vlastne **nahrádzame modus ponens**

$V(1)$	platí	$V(2)$	platí		$V(k)$	platí
$V(1) \Rightarrow V(2)$	platí	$V(2) \Rightarrow V(3)$	platí	...	$V(k) \Rightarrow V(k+1)$	platí
$V(2)$	platí	$V(3)$	platí		$V(k+1)$	platí

Pr.

Dokážte, že platí $\forall n \in N : 3 \mid (n^3 + 2n)$

1. $n = 1 \ldots 3 \mid (1^3 + 2.1)$

$3 \mid 3$ platí

2. $\forall k \in N : 3 \mid (k^3 + 2k) \Rightarrow 3 \mid [(k+1)^3 + 2.(k+1)]$

$\forall k \in N : k^3 + 2k = 3x \Rightarrow (k+1)^3 + 2.(k+1) = 3y$

$(k+1)^3 + 2.(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) =$

$= 3x + 3.(k^2 + k + 1) = 3.(x + k^2 + k + 1) = 3y$

$\forall n \in N : 3 \mid (n^3 + 2n)$ platí

Pr.

Dokážte, že platí $\forall n \in N : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n.(n+1)}{2}$

1. $n = 1 \ldots 1 = \dfrac{1.2}{2}$

$1 = 1$ platí

2. $\forall k \in N : 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \dfrac{k.(k+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) =$

$= \dfrac{(k+1).(k+2)}{2}$

$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \dfrac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \dfrac{k.(k+1) + 2.(k+1)}{2} =$

$= \dfrac{(k+1).(k+2)}{2}$

$\forall n \in N : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n.(n+1)}{2}$ platí

Pr.

Dokážte, že platí $\forall n \in N : 30 \mid (7^{4n+1} - 7)$

1. $n = 1 \ldots 30 \mid (7^{4.1+1} - 7)$

   $30 \mid 16800$ platí

2. $\forall k \in N : 30 \mid (7^{4k+1} - 7) \Rightarrow 30 \mid (7^{4.(k+1)+1} - 7)$

   $\forall k \in N : 7^{4k+1} - 7 = 30x \Rightarrow 7^{4.(k+1)+1} - 7 = 30y$

   $7^{4.(k+1)+1} - 7 = 7^{4k+4+1} - 7 = 7^{4k+1}.7^4 - 7 = 7^{4k+1}.2401 - 7 =$

   $= 7^{4k+1}.(2400+1) - 7 = 7^{4k+1}.2400 + 7^{4k+1} - 7 = 2400.7^{4k+1} + 30x =$

   $= 30.(80.7^{4k+1} + x) = 30y$

$\forall n \in N : 30 \mid (7^{4n+1} - 7)$ platí

- iný variant matematickej indukcie

$\forall n \in N : V(n)$

1. Overíme, že platí $V(1)$ alebo $V(n_0)$

2. Predpokladáme, že V platí pre všetky prirodzené čísla menšie ako k a dokážeme, že platí aj pre k

(V platí $\forall\, p < k$) $\Rightarrow V$ platí pre k

Pr.

Dokážte, že počet podmnožín n-prvkovej množiny je 2^n

$\forall n \in N : P(n) = 2^n$

1. $n = 1 \ldots \{a\} \ldots P(1) = 2; \{\theta, \{a\}\}$ platí

2. $\forall k \in N : P(k) = 2^k \Rightarrow P(k+1) = 2^{k+1}$

Majme k-prvkovú množinu $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, predpokladáme, že $P(k) = 2^k$. Do mn. M pridajme prvok a_{k+1}: $M' = \{a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}\}$. Bez prvku a_{k+1} máme 2^k podmnožín a keď do každej pridáme a_{k+1}, tak budeme mať ďalších 2^k podmnožín a $2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$. Tým sme dokázali $P(k+1) = 2^{k+1}$, čiže $\forall n \in N : P(k) = 2^n$.

Cvičenia

1. Je pravdivý výrok D a implikácie $B \Rightarrow A',\ B' \Rightarrow C,\ D \Rightarrow E', E \Rightarrow C', E' \Rightarrow F$. Dokážte F.

2. Dokážte, že:

a) $\forall x \in R : x^2 + 1 \geq 2x$

b) $\forall x, y \in R : x^2 + y^2 \geq 2xy$

3. Dokážte:

a) $\forall n \in N : 3 \mid (n^3 + 5n)$

b) $\forall n \in N : 3 \mid (2n^3 + n)$

c) $\forall n \in N : 6 \mid (n^3 - n)$

d) $\forall n \in N : 5 \mid (n^5 - n)$

4. Dokážte:

a) $\forall n \in N : 4|n \Rightarrow 16|(n^2 + 4n)$

b) $\forall n \in N : 2|n \Rightarrow 2|n^2$

5. Dokážte:

$\forall n \in N : 3|(n^2 + 2) \Rightarrow 3 \nmid n$

6. Dokážte, že platí:

a) $\forall n \in N : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

b) $\forall n \in N : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

c) $\forall n \in N : 6|(n^3 + 5n)$

d) $\forall n \in N : 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2.(2^n - 1)$

e) $\forall n \in N : 1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n.(n+1) = \frac{1}{3} n.(n+1).(n+2)$

f) $\forall n \in N : 133|(11^{n+1} + 12^{2n-1})$

7. Dokážte, že v každom konvexnom n-uholníku existuje $n-3$ uhlopriečok, ktoré sa nepretínajú a majú ten istý vrchol.

8. Dokážte matematickou indukciou vzorec pre počet uhlopriečok konvexného n-uholníka.

9. Dokážte matematickou indukciou vzorec pre súčet vnútorných uhlov n-uholníka.

Neriešené úlohy

1. Zistite správnosť nasledujúcich úsudkov:

a) $\begin{array}{ll} A & \text{platí} \\ A \Rightarrow B & \text{platí} \\ \hline B & \text{platí} \end{array}$ b) $\begin{array}{ll} B & \text{platí} \\ A \Rightarrow B & \text{platí} \\ \hline A & \text{platí} \end{array}$ c) $\begin{array}{ll} A & \text{platí} \\ A \vee B & \text{platí} \\ \hline B & \text{platí} \end{array}$

2. Je pravdivý výrok D a implikácie $B \Rightarrow A', B' \Rightarrow C, D \Rightarrow E', F \Rightarrow C', E' \Rightarrow F$. Dokážte B.

3. Je pravdivý výrok A a implikácie $A \Rightarrow B, C \Rightarrow B', A' \Rightarrow E', E' \Rightarrow D, C' \Rightarrow D'$. Dokážte sporom E.

4. Je pravdivý výrok D a implikácie $B \Rightarrow A', B' \Rightarrow C, D \Rightarrow E', D \Rightarrow A$.Dokážte sporom C.

5. Sú dané pravdivé implikácie $B \Rightarrow A', C \Rightarrow B', C' \Rightarrow D', E' \Rightarrow D$. Dokážte implikáciu $A \Rightarrow E$ priamo aj nepriamo.

6. Dokážte:

a) $\sqrt{7+\sqrt{7}} \geq 1 + \sqrt{7-\sqrt{7}}$

b) $\sqrt{10-\sqrt{11}} < \sqrt{10+\sqrt{11}} - 1$

c) $\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{6}} < 2+\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{6}}$

7. Dokážte:

a) $\forall x, y \in R : x^2 + y^2 \geq 2xy$

b) $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2}$

c) $\forall x, y \in R^+ : x^2 y + xy^2 \leq x^3 + y^3$

d) $\forall x, y, u, v \in R : (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \geq (xu + yv)^2$

8. Dokážte, že:

a) $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo

b) $\sqrt{7}$ je iracionálne číslo

c) $\log 7$ je iracionálne číslo

d) $\log_2 3$ je iracionálne číslo

9. Dokážte:

a) $\forall n \in N : 2 \mid (n^2 - n)$, b) $\forall n \in N : 3 \mid (n^3 + 2n)$, c) $\forall n \in N : 4 \mid (n^4 + 3n^2)$

d) $\forall n \in N : 6 \mid (n^3 - n)$, e) $\forall n \in N : 6 \mid (n+3) \Rightarrow 18 \mid (3n^2 + 3n - 18)$

f) $\forall n \in N : 3 \mid (n^2 + 2) \Rightarrow 3 \nmid n$, g) $\forall n \in N : 3 \nmid (n^4 - 1) \Rightarrow 3 \mid n$, h) $\forall n \in N : 2 \mid n^2 \Leftrightarrow 2 \mid n$

10. Dokážte:

a) $\forall n \in N : 3 \mid (n-2) \Rightarrow 6 \mid (n^2 - 5n + 6$,

b) $\forall n \in N : 2 \nmid n \Rightarrow 16 \mid (n^4 - 1)$,

c) $\forall n \in N : 3 \nmid n \Rightarrow 3 \mid (n^2 - 1)$,

d) $\forall n \in N : (2 \nmid n \wedge 3 \nmid n \Rightarrow 24 \mid (n^2 - 1)$

e) $\forall a, b \in N : 3 \mid (a^2 + b^2) \Rightarrow (3 \mid a \wedge 3 \mid b)$

11. Dokážte, že:

a) $\forall n \in N : 5 \mid (3^{4n-3} + 2)$, b) $\forall n \in N : 30 \mid (7^{4n+1} - 7)$, c) $\forall n \in N : 30 \mid (11^{4n+1} - 11)$,

d) $\forall n \in N : 113 \mid (11^{n+1} + 12^{2n-1})$, e) $\forall n \in N : 31 \mid (5^{n+1} + 6^{2n-1})$

12. Dokážte:

a) $\forall n \in N : \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

b) $\forall n \in N : 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3} n(4n^2 - 1)$

c) $\forall n \in N : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

13. Dokážte matematickou indukciou základnú vetu aritmetiky.

3. TEÓRIA ČÍSEL

1. Obor prirodzených čísel

2. Prvočísla
- prvočíslo, zložené číslo, hľadanie prvočísiel, Eratostenovo sito, veta o prvočíselných deliteľoch
- veta o počte prvočísiel a jej dôkaz
- základná veta aritmetiky a jej dôkaz
- vyjadrenie deliteľov pomocou prvočísiel, počet deliteľov

3. NSD, nsn
- spoločný deliteľ a spoločný násobok
- pojem NSD a nsn
- metódy hľadania NSD: a) pomocou prvočíselných rozkladov
  b) pomocou vzťahu $D(a,b) = D(a,b-a)$
  c) Euklidov algoritmus

4. Kritériá deliteľnosti
- pojem kritéria deliteľnosti
- deliteľnosť číslami 2, 4, 8, 16 atď.
- deliteľnosť číslami 3 a 9
- deliteľnosť číslom 11
- deliteľnosť číslami 7, 13, 17 atď.

5. Obor celých čísel

6. Obor racionálnych čísel

7. Obor reálnych čísel

.....

- **druhy čísiel:** na vyjadrenie počtu objektov vznikli prirodzené čísla **N**, na vyjadrenie zmeny v počte objektov vznikli celé čísla **Z**, potrebou deliť objekty na časti vznikli racionálne čísla **Q**. Niektoré úsečky sa nedajú vyjadriť ako racionálne čísla, tak vznikli iracionálne čísla **I**. Množina utvorená z I a Q je množina reálnych čísiel **R** a nakoniec sú komplexné čísla **C**.

- **zápisy čísiel:**
  číslo je matematický pojem, **číslice** sú znaky, ktorými zapisujeme čísla
- čísla zapisujeme podľa pravidiel **číselných sústav**:
  A. **adičné** (sčítacie, hodnoty číslic sa sčítavajú)
    1. sústava jaskynného človeka: I, II, IIII, ~~IIII~~,...
    2. egyptská sústava: I=1, ∩=10, ⊖=100; ⊖⊖∩∩∩IIII=234
    3. rímska sústava: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000; MCX=1110, CCM=800
  B. **pozičné** (hodnota číslice závisí od pozície v zápise čísla)
    Základ môže byť 2,3,... (dvojková sústava, trojková s., ...)
    Desiatková pozičná sústava
    - používa číslice 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
    - čísla zapisujeme tak, že utvárame usporiadané skupiny číslic
    - každé číslo v DPS má **číslicový zápis**, tvorený usporiadanou skupinou číslic, ktorý je skrátením **rozvinutého zápisu**
      napr. 15867 (číslicový)=$1.10^4+5.10^3+8.10^2+6.10^1+7.10^0$ (rozvinutý)

- **obor prirodzených čísiel (N)**

Sú to čísla 1,2,3,...; slúžia na vyjadrenie počtu objektov
Operácia na množine A je predpis, ktorý usporiadanej dvojici [a,b] priradí prvok c$\in$A
(základnými operáciami v obore N sú sčítanie a násobenie)

Veta

$\forall a,b,c \in N$:

1. $a+b \in N \quad a.b \in N$ (U)...Veta o **uzavretosti** N vzhľadom na sčítanie resp. násobenie
2. $a+b=b+a \quad a.b=b.a$ (K)...Veta o **komutatívnosti** sčítania resp. násobenia v N
3. $(a+b)+c=a+(b+c) \quad (a.b).c=a.(b.c)$ (A)... Veta o **asociatívnosti** sč. resp. nás. v N
4. * $a.1=a$ (N)... Veta o **neutrálnosti** 1 na operáciu násobenie
5. $a.(b+c)=a.b+a.c$ (D)...Veta o **distributívnosti** násobenia vzhľadom na sčítanie

Každé prirodzené číslo má svoj číslicový aj rozvinutý zápis

Pr.

Ktoré dvojciferné prirodzené číslo sa po výmene číslic zväčší o 36?

$\overline{ab}=10a+b$

$\overline{ab}=\overline{ba}-36 \qquad \overline{ba}-\overline{ab}=36$

$(10b+a)-(10a+b)=36$

$9b-9a=36$

$b-a=4$ →

$$\boxed{\begin{array}{l} a=1\ldots b=5\ldots 15 \\ a=2\ldots b=6\ldots 26 \\ a=3\ldots b=7\ldots 37 \\ a=4\ldots b=8\ldots 48 \\ a=5\ldots b=9\ldots 59 \end{array}}$$

Veta

Každé $n \in N$ môžeme pomocou ľubovoľného prirodzeného čísla zapísať v tvare:

$n=p.a+z;\ p \in N \cup \{0\}, z \in \{0,1,2,\ldots,a-2,a-1\}$

p je neúplný podiel a z je zvyšok

Pr.

Aký zvyšok po delení 4 majú druhé mocniny prirodzených čísiel?

1. n je párne

$$n=2k\ldots n^2=(2k)^2=4k^2+0$$

2. n je nepárne

$$n=2k-1\ldots n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=4(k^2+k)+1$$

Zvyšky druhých mocnín po delení 4 sú 0 a 1
(skúste to isté pri delení 3, návod: 1. n=3k, 2. n=3k+1, 3. n=3k+2)

Def.

Prirodzené číslo a je deliteľom prirodzeného čísla n, ak existuje prirodzené číslo p, tak že n=a.p

$a|p \Leftrightarrow \exists p \in N : n=a.p$

D(n) označíme množinu všetkých deliteľov čísla n (napr. D(9)={1,3,9}

Def.

Prirodzené čísla a, b sa nazývajú súdeliteľné, ak existuje prirodzené číslo d>1, tak že $d|a \wedge d|b$

Def.

Prirodzené číslo d sa nazýva spoločný deliteľ prirodzených čísel a, b ak platí $d|a \wedge d|b$

- **<u>prvočísla</u>**
  1. 1deliteľ … 1
  2. 2 delitelia … 2,3,5,7,… **prvočísla**
  3. viac ako 2 delitelia … 4,6,8,9,… **zložené čísla**

<u>Def.</u>

Prirodzené číslo p>1 sa nazýva prvočíslo, ak má práve dvoch rôznych deliteľov (1 a seba samého). Prirodzené číslo, ktoré má aspoň troch deliteľov je zložené číslo.

- prvočísla sa dajú určovať týmito metódami:
  1. tabuľky (napr. 104395301)
  2. **Eratostenovo sito**

     ~~1~~,2,3,~~4~~,5,~~6~~,7,~~8~~,~~9~~,~~10~~,11,~~12~~,13,~~14~~,~~15~~,~~16~~,17,~~18~~,19,~~20~~,~~21~~,~~22~~,23,~~24~~,~~25~~,~~26~~,~~27~~,~~28~~,29,…

     škrtneme 1; prvé neškrtnuté je prvočíslo, čiže 2, škrtneme násobky 2; prvé neškrtnuté je prvočíslo, čiže 3, škrtneme násobky 3; zase prvé neškrtnuté, to je 5, atď.
  3. **veta o prvočíselných deliteľoch**

     <u>Veta</u> Každé zložené číslo je deliteľné aspoň jedným prvočíslom p, takým že $p \leq \sqrt{n}$

<u>Pr.</u>

Zistite, či sú 117 a 523 prvočísla.

$\sqrt{117} \doteq 10$ prvočísla do 10 sú 2,3,5,7; keďže $3|117$, tak 117 nieje prvočíslo

$\sqrt{523} \doteq 22$ prvočísla do 22 sú 2,3,5,7,11,13,17,19; keďže ani jedno nedelí 523, tak je prvočíslo

<u>Pr.</u>

Zistite, či sú 163163 a 3^{50}-7 prvočísla.

163163=163.1000+163=1001.163 je zložené

3^{50}-7=717897987691852588770242 je zložené

<u>Veta</u>

Prvočísiel je nekonečne veľa.

Dôkaz (sporom)

A... Prvočísiel je nekonečne veľa.

A'... Prvočísiel je konečný počet.

Majme konečný počet prvočísiel $p_1, p_2, \ldots, p_k$, keďže k je konečný počet, tak majme číslo $n = (p_1.p_2.\cdots.p_k) + 1$. Ak by n bolo prvočíslo, tak je to k+1, čiže A' neplatí a A platí.

Ak je zložené, tak existuje p_i také, že $n = p_i.x$

Z toho $p_i.x = p_1.p_2.\cdots.p_k + 1$

$p_i.x - p_1.p_2.\cdots.p_k = 1$ p_i sa nachádza aj v $p_1.p_2.\cdots.p_k$

$p_i.x - p_1.p_2.\cdots.p_i.\cdots.p_k = 1$

$p_i.(x - p_1.p_2.\cdots.p_{i-1}.p_{i+1}.\cdots.p_k) = 1$

odtiaľ $p_i|1$, čo nieje možné, pretože žiadne prvočíslo 1 nedelí a tak A' neplatí, čiže

A platí

Tým sme dokázali <u>sporom</u>, že prvočísiel je nekonečne veľa.

Veta

$\forall n \in N, n > 1 : n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_m^{\alpha_m}$; $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ sú prvočísla a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sú prirodzené čísla. Tento tvar je pre každé číslo jedinečný. (základná veta aritmetiky)

Dôkaz

1. $n = 2 \ldots 2 = 2^1$ platí
2. predpokladáme, že to platí pre každé $r < k; r = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_m^{\alpha_m}$

   pre k máme dve možnosti: a) je prvočíslo $k = k^1$, čiže veta platí; b) k je zložené, tak sa dá napísať v tvare $k = u.v;\ u < k \ \wedge\ v < k$

   $u = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_m^{\alpha_m}$

   $v = q_1^{\beta_1}.q_2^{\beta_2}.\cdots.q_t^{\beta_t}$

   $k = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_m^{\alpha_m}.q_1^{\beta_1}.q_2^{\beta_2}.\cdots.q_t^{\beta_t}$, čiže sa dá rozložiť na súčin prvočísiel aj v tomto prípade to platí

   $\forall n \in N, n > 1 : n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_m^{\alpha_m}$ platí

Pr.

Rozložte na prvočísla:

$4 = 2^2 \quad 6 = 2.3 \quad 12 = 2^2.3$

$180 = 2^2.3^2.5$

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$240 = 2^4.3.5$

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Veta

Každý deliteľ prirodzeného čísla $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_k^{\alpha_k}$ má tvar $d = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}.\cdots.p_k^{\beta_k}$;

$0 \le \beta_1 \le \alpha_1 \ \wedge\ 0 \le \beta_2 \le \alpha_2 \ \wedge \cdots \wedge\ 0 \le \beta_k \le \alpha_k$

Veta

Pre počet deliteľov prirodzeného čísla $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_k^{\alpha_k}$ platí:

$\tau(n) = (\alpha_1 + 1).(\alpha_2 + 1).\cdots.(\alpha_k + 1)$

Pr.

Určite počet deliteľov čísla 1500.

$1500 = 2^2.3.5^3 \qquad \tau(1500) = (2+1).(1+1).(3+1) = 3.2.4 = 24$

Pr.

Nájdite prirodzené číslo, ktorého štvorec má práve 1000 deliteľov.

$\tau(n^2) = 1000$

$n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_k^{\alpha_k} \qquad n^2 = p_1^{2\alpha_1}.p_2^{2\alpha_2}.\cdots.p_k^{2\alpha_k}$

$\tau(n^2) = (2\alpha_1 + 1).(2\alpha_2 + 1).\cdots.(2\alpha_k + 1) = 2m + 1$, je to nepárny počet deliteľov, čiže také číslo neexistuje.

Veta

Každá druhá mocnina má nepárny počet deliteľov.

- **deliteľnosť**

Veta

$$\forall a,b,c \in N : (a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$$

Dôkaz

$$\forall a,b,c \in N : a|b \wedge b|c$$
$$b = a.x \wedge c = b.y$$
$$c = b.y = a.x.y = a.z$$
$$a|c$$

Veta

$$\forall a,b,c \in N : (a|b \wedge a|c) \Rightarrow a|(b \pm c)$$

Dôkaz

$$\forall a,b,c \in N : a|b \wedge a|c$$
$$b = a.x \wedge c = a.y$$
$$b \pm c = (a.x \pm a.y) = a.(x \pm y) = a.z$$
$$a|(b \pm c)$$

Veta

$$\forall a,b,c \in N : (a|(b \pm c) \wedge a|c) \Rightarrow a|b$$

Dôkaz

$$\forall a,b,c \in N : a|(b \pm c) \wedge a|c$$
$$b \pm c = a.x \wedge c = a.y$$
$$b \pm a.y = a.x$$
$$b = ax \mp ay$$
$$b = a(x \mp y) = az$$
$$a|b$$

- **NSD, nsn**

Def.

Najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísiel a,b je najväčší spomedzi ich spoločných deliteľov. Označujeme D(a,b).

Pr.

12…D_{12}={1,2,3,4,6,12}
42…D_{42}={1,2,3,6,7,14,21,42}
D(12,42)=6

Def.

Najmenší spoločný násobok prirodzených čísiel a,b je najmenší spomedzi ich spoločných násobkov. Označujeme n(a,b).

Pr.

12…12,24,35,48,60,72,84,96,108,120,132,144,158,168,…
42…42,84,126,168,…
D(12,42)=84

Veta

$\forall a,b \in N:$

$1. D(a,a) = a$

$2. D(a,1) = 1$

$3. D(a,0) = a$

$4. D(ab,a) = a$

$5. 1 \le D(a,b) \le \min\{a,b\} \le \max\{a,b\} \le n(a,b) \le a.b$

Veta

$\forall a,b \in N : D(a,b).n(a,b) = a.b$

Dôkaz

$a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_k^{\alpha_k}; 0 \le \alpha_i$

$b = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}.\cdots.p_k^{\beta_k}; 0 \le \beta_i$

$D(a,b).n(a,b) = (p_1^{x_1}.p_2^{x_2}.\cdots.p_k^{x_k}).(p_1^{y_1}.p_2^{y_2}.\cdots.p_k^{y_k}) = a.b;$

$x_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}, y_i = \max\{\alpha_i, b_i\}$

všetky indexy sú obsiahnuté, čiže naozaj je to $a.b$

- metódy hľadania NSD

1. **prvočíselný rozklad** (touto metódou sa hľadá aj nsn)

   D(a,b)=?
   $a=2^2.3.5^2.11$
   $b=2.3^3.7^2.11^2$
   D(a,b)=2.3.11=66 (berieme spoločné prvočísla a najmenší index prvočísla)
   $n(a,b)=2^2.3^3.5^2.7^2.11^2$ (berieme všetky prvočísla a najväčší index)

2. pomocou vzťahu **D(a,b)=D(a,b-a)**

   D(221,187)=D(221-187,187)=D(34,187)=D(34,187-5.34)=D(34,17)=D(17,17)=17

   Veta

   $\forall a,b,c \in N : (d|a \wedge d|b) \Leftrightarrow (d|a-b \wedge d|b)$

   Dôkaz (je to ekvivalencia dokazuje sa v dvoch krokoch)

   1. $\forall a,b,c \in N : (d|a \wedge d|b) \Rightarrow (d|a-b \wedge d|b)$ platnosť tejto časti je zrejmá z predchádzajúcich viet o deliteľnosti, keďže $\forall a,b,c \in N : (a|b \wedge a|c) \Rightarrow a|(b \pm c)$

   2. $\forall a,b,c \in N : (d|a-b \wedge d|b) \Rightarrow (d|a \wedge d|b)$ podobne ako v kroku 1. platí z viet o deliteľnosti $\forall a,b,c \in N : (a|(b \pm c) \wedge a|c) \Rightarrow a|b$

3. **Euklidov algoritmus**

D(a,b)	D(221,187)
a>b	221=1.187+34
$a=k_1.b+z_1$	187=5.34+17
$b=k_2.z_1+z_2$	34=2.17+0
$z_1=k_3.z_2+z_3$	D(221,187)=17
$z_2=k_4.z_3+z_4$	
⋮	
$z_{l-2}=k_l.z_{l-1}+z_l$	
$z_{l-1}=k_{l+1}.z_l+0$	
$D(a,b)=z_l$	

Veta

$\forall a,b,c \in N : [a|c \wedge b|c \wedge D(a,b) = 1] \Rightarrow (a.b)|c$

- **kritéria deliteľnosti**

Sú to vety tvaru: $\forall n \in N : d|n \Leftrightarrow d|v(n)$, kde v(n) je výraz utvorený z n.

Veta

$\forall n \in N : 2|n \Leftrightarrow 2|z$

Pre každé prirodzené číslo n platí, že n je deliteľné 2 práve vtedy, keď jeho posledná číslica je deliteľná 2.

Dôkaz

n=10k+z z je posledná číslica, lebo je to zvyšok po delení 10

1. $\forall n \in N : 2|n \Rightarrow 2|z$

$2|n$

$2|(10k+z)$

$2|z$

2. $\forall n \in N : 2|z \Rightarrow 2|n$

$2|z$

$2|z \wedge 2|10k$

$2|(10k+z)$

$2|n$

Veta

$\forall n \in N : 4|n \Leftrightarrow 4|z$

Pre každé prirodzené číslo n platí, že n je deliteľné 4 práve vtedy, keď jeho posledné dvojčíslie je deliteľné 4.

Dôkaz

n=100k+z z je posledné dvojčíslie, lebo je to zvyšok po delení 100

1. $\forall n \in N : 4|n \Rightarrow 4|z$

$4|n$

$4|(100k+z)$

$4|z$

2. $\forall n \in N : 4|z \Rightarrow 4|n$

$4|z$

$4|z \wedge 4|100k$

$4|(100k+z)$

$4|n$

Veta

$\forall n \in N : 8|n \Leftrightarrow 8|z$

Pre každé prirodzené číslo n platí, že n je deliteľné 8 práve vtedy, keď jeho posledné trojčíslie je deliteľné 8.

Dôkaz

n=1000k+z z je posledné trojčíslie, lebo je to zvyšok po delení 1000

1. $\forall n \in N : 8|n \Rightarrow 8|z$

$8|n$

$8|(1000k+z)$

$8|z$

2. $\forall n \in N : 8|z \Rightarrow 8|n$

$8|z$

$8|z \wedge 8|1000k$

$8|(1000k+z)$

$8|n$

Veta

$\forall n \in N : 3|n \Leftrightarrow 3|c(n)$ (c(n) je ciferný súčet)

Pre každé prirodzené číslo n platí, že n je deliteľné 3 práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný 3.

Dôkaz

1. $\forall n \in N : 3|n \Rightarrow 3|c(n)$ $n = \overline{abc}$ $3|n$ $3.x = n = \overline{abc} = 100a + 10b + a =$

$= (99+1)a + (9+1)b + c = 99a + 9b + a + b + c = 3.(33a + 3b) + (a + b + c) =$

$= 3.k + (a+b+c) \quad \Rightarrow \quad 3|(a+b+c) \Rightarrow 3|c(n)$

2. $\forall n \in N : 3|c(n) \Rightarrow 3|n$

$3|c(n)$

$3|c(n) \wedge 3|3k$

$3|(3k + c(n))$

$3|n$

Veta

$\forall n \in N : 9|n \Leftrightarrow 9|c(n)$ (c(n) je ciferný súčet)

Pre každé prirodzené číslo n platí, že n je deliteľné 9 práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný 9.

Dôkaz

Je analogický ako pri deliteľnosti 3.

Veta

$\forall n \in N : 11|n \Leftrightarrow 11|[(a+c+e)-(b+d+f)]$

Pre každé prirodzené číslo n platí, že n je deliteľné 11 práve vtedy, keď rozdiel ciferného súčtu číslic na nepárnych miestach a ciferného súčtu na párnych miestach je deliteľný 11.

Dôkaz

$n = \overline{abcdef}$

$\forall n \in N : 11|n \Leftrightarrow 11|[(a+c+e)-(b+d+f)]$

1. $\forall n \in N : 11|n \Rightarrow 11|[(a+c+e)-(b+d+f)]$

$11|n$

$11.x = n = \overline{abcdef} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f = (100001-1)a +$
$+ (9999+1)b + (1001-1)c + (99+1)d + (11-1)e + f = (100001a + 9999b + 1001c +$
$+ 99d + 11e) - [(a+c+e)-(b+d+f)] = 11k - [(a+c+e)-(b+d+f)]$

2. $\forall n \in N : 11|[(a+c+e)-(b+d+f)] \Rightarrow 11|n$

$11|[(a+c+e)-(b+d+f)]$

$11|[(a+c+e)-(b+d+f)] \wedge 11|11k$

$11|[11k-(a+c+e)-(b+d+f)]$

$11|n$

Pr.

Nájdite všetky čísla tvaru $\overline{123x3y}$ deliteľné 9.

c($\overline{123x3y}$)=9+x+y

1. c=9…9+x+y=9…x+y=0…123030
2. c=18…9+x+y=18…x+y=9…123039,123138,123237,123336,123435,123534,123633,123732, 123831,123930
3. c=27…9+x+y=27…x+y=18…123939

- pre deliteľnosť 7, 13, 17,… neexistujú určené pravidlá, ale dajú sa vytvoriť, podobne to platí aj pre predchádzajúce čísla, vychádzame z toho, že každé číslo sa dá napísať v tvare: n=10k+z, n=100k+z, n=1000k+z,...

napr. pre:

a) 7…n=10k+z=7k+(3k+z), čiže $7|n \Rightarrow 7|(3k+z)$, kde k je výsledok po delení 10 a z je zvyšok

b) 13…n=10k+z, využijeme vlastnosť $x|n \Rightarrow x|y.n$, čiže 4n=40k+4z=39k+(k+4z) a z toho

$13|n \Rightarrow 7|(k+4z)$

(pr. Zistite, či $13|2613$. k=2613:10=261 a z=3, k+4z=273; potom znova k=273:10=27 a z=3, k+4z=39 a 39=3.13, tým sme zistili, že naozaj 13 delí 2613)

- **obor celých čísiel (Z)**

Pr.

Riešme v N:

X+2=5 x+7=3

X=2 x=3-7 x+a=b; a,b$\in$N

Rovnica x+a=b; a,b$\in$N nieje v obore N riešiteľná bez obmedzenia, preto potrebujeme nový typ čísiel c=a-b; b>a

Def.

Celé čísla sú rozdiely prirodzených čísiel.

7=8-1=9-2=…
0=1-1=2-2=…
-3=1-4=2-5=…
- slúžia na vyjadrenie zmeny v počte objektov

- **obor racionálnych čísiel (Q)**

Pr.

Riešme v Z:

2x=6 2x=9

x=3 x=$\frac{9}{2} \notin Z$ ax=b; a,b$\in$Z

Rovnica ax=b; a,b$\in$Z nieje v obore Z riešiteľná bez obmedzenia, preto musíme obor Z rozšíriť o všetky zlomky tvaru $\frac{b}{a}$

Def.

Racionálne čísla sú čísla, ktoré sa dajú napísať v tvare zlomku $\frac{p}{q}; p,q \in Z \wedge q \neq 0$

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3} = \frac{16}{12} = ...$$

Def.

Základným tvarom racionálneho čísla nazývame jeho zápis v tvare zlomku

$\frac{p}{q}; p,q \in Z \wedge q \neq 0, D(p,q) = 1$

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\frac{2}{5} = 0{,}4$ $\frac{7}{8} = 0{,}875$ $\frac{13}{4} = 3{,}25$ sú to desatinné čísla, majú ukončený desatinný rozvoj

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ $\frac{16}{3} = 8{,}\overline{3}$ $\frac{161}{45} = 3{,}5\overline{7}$ $\frac{430}{132} = 3{,}2\overline{57}$ niesu desatinné majú nekonečný desatinný periodický rozvoj

Def.

Racionálne číslo sa nazýva desatinné, ak sa dá napísať v tvare $\frac{c}{10^n}; c \in Z,\ n \in N$

$$\frac{c}{10^n} = \frac{c}{(2.5)^n} = \frac{c}{2^n.5^n}$$

Veta

Racionálne číslo p/q je desatinné práve vtedy, keď v rozklade jeho menovateľa v základnom tvare sú iba mocniny prvočísiel 2 a 5.

Pr.

Zistite, či sú desatinné čísla:

a) $\frac{130}{250} = \frac{13}{25} = \frac{13}{5^2} = 0{,}52 = \frac{13.2^2}{5^2.2^2} = \frac{52}{10^2}$ je desatinné

b) $\frac{75}{18} = \frac{25}{6} = \frac{25}{2.3}$ nieje desatinné

Pr.

Napíšte v tvare zlomku $0,\overline{8}$.

$a = 0,\overline{8}$

$a = 0{,}8888...$

$10a = 8{,}8888...$

$9a = 8$

$a = \frac{8}{9}$

- **obor reálnych čísiel (R)**

Riešme v Q:

$x^2 = 4$ $\quad x^2 = 2$

$x = \pm 2$ $\quad x = \pm\sqrt{2}$ $\quad x^2 = a; a \in Q_0^+$

Rovnica tvaru $x^2 = a; a \in Q_0^+$ nieje v obore Q riešiteľná bez obmedzenia, jej riešením môžu byť aj čísla, ktoré niesu racionálne.

- čísla, ktoré niesu racionálne sa nazývajú iracionálne (I)($\sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \pi, e$), v desiatkovej pozičnej sústave majú nekonečný neperiodický desatinná rozvoj

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ … iracionálne

$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ … racionálne

$\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ … iracionálne

$\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ … racionálne

Def.

Racionálne a iracionálne čísla tvoria obor reálnych čísiel.

Veta

$\forall a, b, c \in R$:

1.	$a + b \in R$	$a.b \in R$	$a - b \in R$	$a : b \in R; b \neq 0$	(U)
2.	$a + b = b + a$	$a.b = b.a$	*	*	(K)
3.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a.b).c = a.(b.c)$	*	*	(A)
4.	$a + 0 = 0 + a = a$	$a.1 = 1.a = a$	*	*	(N)
5.	$a.(b + c) = ab + ac$	$a.(b - c) = ab - ac$	*		(D)

U…Veta o **uzavretosti** oboru R
K… Veta o **komutatívnosti**
A… Veta o **asociatívnosti**
N… Veta o **neutrálnosti 0** resp. **1** vzhľadom na sčítanie resp. násobenie
D… Veta o **distributívnosti** násobenia vzhľadom na sčítanie resp. násobenie

- **absolútna hodnota reálneho čísla**

Def.

$\forall a \in R$:

1. $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$
2. $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

Veta

$\forall a, b \in R$:

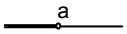
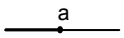
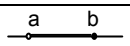
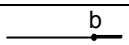
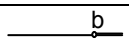
1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a.b| = |a|.|b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
5. $|a+b| \leq |a| + |b|$

geometrický význam $|a|$ je taký, že abs. hodnota udáva vzdialenosť čísla a od 0 na číselnej osi; podobne $|a-b|$ udáva vzdialenosť a od b na číselnej osi

Def.

Interval je množina reálnych čísiel, ktorá má niektorú z nasledujúcich vlastností:

1. $x > a$
2. $x \geq a$
3. $x < a$
4. $x \leq a$
5. $a \leq x \leq b$
6. $a < x < b$
7. $a \leq x < b$
8. $a < x \leq b$

zápis vlastností intervalu	grafický význam intervalu na osi	symbol intervalu
$x < a$		$(-\infty, a)$
$x \leq a$		$(-\infty, a\rangle$
$a < x < b$		(a, b)
$a \leq x < b$		$\langle a, b)$
$a < x \leq b$		$(a, b\rangle$
$a \leq x \leq b$		$\langle a, b\rangle$
$b \leq x$		$\langle b, \infty)$
$b < x$		(b, ∞)

Cvičenia

1. Nájdite všetky $\overline{ab} \in N$, ktoré sa po výmene číslic zmenšia o 20.

2. Z číslic 0,2,5,7,8,9 utvorte najmenšie šesť-ciferné párne číslo, pričom sa každá číslica smie použiť len raz.

3. Z čísla 4713268 vyčiarknite 3 číslice tak, aby vzniklo najväčšie číslo.

4. Trojciferné číslo je zakončené číslicou 4. Ak túto číslicu presunieme na 1. miesto, dostaneme číslo o 81 menšie ako pôvodné číslo. Určite to číslo.

5. Nájdite všetky trojciferné čísla, ktoré sa po vynechaní strednej číslice 9-krát zmenšia.

6. Dokážte, že ak $n \in N$ končí 5, tak n^2 končí 25.

7. Zistite, či sú prvočísla 1174, 947 a 2771.

8. Rozložte na prvočísla 560, 1124, 1124 a 3859.

9. Čo sa dá povedať o prirodzených číslach, ktoré majú:
a) práve 3 deliteľov, b) práve 4 deliteľov

10. Je číslo 6300 druhou mocninou prirodzeného čísla?

11. Nájdite NSD a nsn:
a) 92,156 b) 67,28 c) 423,900 d) 68,12 e) 34,119 f) 1001,242,583 g) 48,576,2664

12. Nájdite x, y:
a) D(x,y)=4 $\wedge$ n(x,y)=24 b) D(x,y)=7 $\wedge$ n(x,y)=686 c) n(x,y)=D(x,y)+5

13. Koľko vojakov je v rote, ak po nastúpení do dvojstupu, trojstupu, …, šesťstupu, vždy jeden chýba do úplného tvaru?

14. Zistite, či sú desatinné čísla:
a) $\frac{12}{200}$ b) $\frac{28}{98}$

15. Napíšte v tvare zlomku:
a) $3,\overline{49}$ b) $0,41\overline{6}$ c) $4,32\overline{1}$

Neriešené úlohy

1. Zistite, či sú nasledujúce čísla prvočíslami:
a) $2^{36}-1$ b) 123456543^2-1 c) 6^5-9^2 d) $13^{15}+17^{22}$ e) 127127127127127

2. Nech m, n sú také prirodzené čísla, že m + n je nepárne. Určite paritu čísel:
$m-n, m.n, 2m-n, m^{2n}$

3. Dokážte, že súčin ľubovoľných dvoch po sebe idúcich párnych čísel je deliteľný 8.

4. Dokážte, že súčin ľubovoľných troch po sebe idúcich párnych čísel je deliteľný 48.

5. Nájdite všetky čísla:
a) tvaru $\overline{aba}$ deliteľné 15

b) tvaru $\overline{34X5Y}$ deliteľné 36

6. Napíšte v DPS:
a) 11101101_2 b) 210212_3 c) 12012_3 d) 4231_5 e) 12562_8

7. Napíšte:
a) 695 v dvojkovej sústave b) 124_5 v trojkovej sústave, c) 327_8 v päťkovej sústave

8. Ak k dvojcifernému číslu pripočítame číslo, ktoré vznikne výmenou poradia číslic, dostaneme štvorec. Nájdi všetky také čísla.

9. Nájdite všetky dvojciferné čísla, ktoré sú deliteľné svojím ciferným súčtom.

10. Koľko deliteľov má číslo 12! ?

11. Ktoré prirodzené čísla majú práve a) 6, b) 8, c) 12 deliteľov?

12. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré má práve 15 deliteľov.

13. Nájdite prirodzené číslo, ktoré je deliteľné 2 a 9 a má práve 14 deliteľov.

14. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k tak, že čísla 384.k a 2592.k mali rovnaký počet deliteľov.

15. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré má tú vlastnosť, že keď k nemu pripočítame 20, 25, 30, tak dostaneme také tri čísla, že prvé z nich je deliteľné 4, druhé 5 a tretie 6.

16. Najmenší spoločný násobok čísel 18, 20, 24 a m je 720. Určite m.

17. Koľko najmenej cvičencov má k dispozícii cvičiteľ, ak po nastúpení do dvojstupu, trojstupu, . . . , osemstupu, vždy jeden chýba?

18. Nájdite všetky prvočísla p také, že:
a) p + 4 je štvorec prirodzeného čísla, b) 2p + 1 je tretia mocnina prirodzeného čísla

19. Nájdite všetky $a,b \in N$, pre ktoré platí:
a) $D(a,b) = 7 \wedge n(a,b) = 21$ b) $D(a,b) = 7 \wedge n(a,b) = 686$
c) $D(a,b) + 5 = n(a,b)$ d) $D(a,b) = n(a,b) - 7$

20. Zistite, pre ktoré $n \in N$ možno krátiť zlomok:
a) $\frac{14n+17}{21n+25}$ b) $\frac{21n+4}{14n+3}$ c) $\frac{5n+6}{8n+7}$

21. Nájdite všetky prirodzené riešenia rovnice:
a) x.y=6 b) x.y+3y=15 c) x.y-y=16 d) $x^2-y^2=14$

22. Dokážte, že pre každé $n \in N$ platí:
a) $30 \mid (5n^3 + 15n^2 + 10n)$
b) $120 \mid (n^5 - 5n^3 + 4n)$
c) $\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$ je celé číslo
d) $225 \mid (16^n - 15n - 1)$
e) $73 \mid (9^{2n+1} + 8^{n+2})$

4. KOMPLEXNÉ ČÍSLA

1. Základné pojmy
- definícia komplexného čísla, operácie s komplexnými číslami a ich vlastnosti
- neutrálne prvky, inverzné prvky

2. Druhy zápisov
- zložkový tvar
- algebrický tvar, znázorňovanie komplexných čísel , absolútna hodnota
- goniometrický tvar, argument
- exponenciálny tvar

3. Umocňovanie komplexných čísel
- násobenie a delenie komplexných čísel v goniometrickom tvare
- komplexná jednotka
- Moivrova veta
- umocňovanie komplexných čísel

4. Odmocňovanie komplexných čísel
- definícia n-tej komplexnej odmocniny
- výpočet odmocnín
- počet odmocnín a ich znázorňovanie

.....

$a + b\sqrt{-1}; a, b \in R$

$a + bi; a, b \in R$

$[a, b]$

$\sqrt{-1} = i$

Def.

Komplexné čísla sú usporiadané dvojice reálnych čísiel.

$z = [a, b]$ $\quad a = \mathrm{Re}(z)$ … reálna zložka

$b = \mathrm{Im}(z)$ … imaginárna zložka

Def.

$$\forall a, b, c, d \in R : [a, b] = [c, d] \underset{df}{\Leftrightarrow} (a = c \wedge b = d)$$

$[a, b] + [c, d]$

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Def.

$$\forall a, b, c, d \in R : [a, b] + [c, d] \underset{df}{=} [a + c, b + d]$$

$[a, b].[c, d]$

$(a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bd.i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Def.

$$\forall a, b, c, d \in R : [a, b].[c, d] \underset{df}{=} [ac - bd, ad + bc]$$

Veta

$\forall u, v, w \in C$:

1. komutatívnosť: $u + v = v + u$ $\quad u.v = v.u$
2. asociatívnosť: $(u + v) + w = u + (v + w)$ $\quad (u.v).w = u.(v.w)$
3. distributívnosť: $u.(v + w) = u.v + u.w$

4. **neutrálny prvok** e **:**

pre +

$$z + e = z$$
$$z = [a, b] \wedge e = [e_1, e_2]$$
$$[a, b] + [e_1, e_2] = [a, b]$$
$$[a + e_1, b + e_2] = [a, b]$$
$$a + e_1 = a \wedge b + e_2 = b$$
$$e_1 = 0 \wedge e_2 = 0$$
$$e = [0,0]$$

pre .

$$z.e = z$$
$$z = [a, b] \wedge e = [e_1, e_2]$$
$$[a, b].[e_1, e_2] = [a, b]$$
$$[ae_1 - be_2, ae_2 + be_1] = [a, b]$$
$$ae_1 - be_2 = a \wedge ae_2 + be_1 = b$$
$$ae_1 - be_2 = a \,|\, .a$$
$$ae_2 + be_1 = b \,|\, .b$$
$$a^2 e_1 - abe_2 = a^2$$
$$b^2 e_1 + abe_2 = b^2$$
$$(a^2 + b^2)e_1 = a^2 + b^2$$

$a^2 + b^2 \neq 0$ $\quad$ $a^2 + b^2 = 0$

$e_1 = 1$ $\quad$ $0e_1 = 0$

$e_1 \in R$

$ae_1 - be_2 = a$ $\quad$ $be_2 = 0$ $\quad$ $e_2 = 0$

$$e = [1,0]$$

5. **inverzný prvok:**

pre + (opačné číslo)

$$z + z' = e = [0,0]$$
$$z = [x, y] \wedge z' = [x', y']$$
$$[x, y] + [x', y'] = [0,0]$$
$$[x + x', y + y'] = [0,0]$$
$$x + x' = 0 \wedge y + y' = 0$$
$$x' = -x \wedge y' = -y$$
$$z' = [-x, -y] = -z$$

pre . (prevrátené číslo)

$$z.z' = [1,0]$$
$$z = [x, y] \wedge z' = [x', y']$$
$$[x, y].[x', y'] = [1,0]$$
$$[xx' - yy', xy' + x'y] = [1,0]$$
$$xx' - yy' = 1 \,|\, .x$$
$$xy' + x'y = 0 \,|\, .y$$
$$x^2 x' - xyy' = x$$
$$xyy' + x'y^2 = 0$$
$$(x^2 + y^2)x' = x$$

$x^2 + y^2 = 0$ $\quad$ $x^2 + y^2 \neq 0$

$0.x' = x$ $\quad$ $x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

x' *neex.*

$$x.\frac{x}{x^2+y^2}-yy'=1$$
$$\frac{x^2}{x^2+y^2}-1=yy'$$
$$\frac{x^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}=yy'$$
$$\frac{-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=y'$$
$$y'=\frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$z'=\left[\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right]=\frac{1}{z}$$
$$z\neq[0,0]$$

Pr.

Napíšte opačné a prevrátené číslo k číslu $a=[3,-4]$

$$-a=[-x,-y]=[-3,4] \qquad \frac{1}{a}=\left[\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right]=\left[\frac{3}{3^2+(-4)^2},\frac{4}{3^2+(-4)^2}\right]=\left[\frac{3}{25},\frac{4}{25}\right]$$

- **druhy zápisov C:**

1. **zložkový tvar** … $z=[a,b]$
2. **algebrický tvar**

$z=[a,b]$

$[a,0]=a\in R$ …reálne číslo

$\sqrt{-1}=i \qquad [0,1]^2=[0,1].[0,1]=[0-1,0+0]=-1 \qquad -1=i^2$

$i=[0,1]$… rýdzoimaginárna jednotka

$[a,0].[0,1]=[0,a]$… rýdzoimaginárne komplexné číslo

$[a,b]$…imaginárne číslo

$z=[a,b]=[a,0]+[0,b]=[a,0]+[b,0].[0,1]=a+bi$

$z=a+bi$ … algebrický tvar komplexného čísla

Pr.

$i^1=i \quad i^2=-1 \quad i^3=-i \quad i^4=1 \quad i^5=i \quad i^6=i^4.i^2=-1\cdots$

$i^{27}=(i^4)^6.i^3=1^6.(-i)=-i \quad i^{2001}=(i^4)^{500}.i=i$

Pr.

Napíšte v algebrickom tvare $z=(1+i)i$.

$z=(1+i)i=i+i^2=-1+i$

Pr.

$(5+2i)x+(3-5i)y=124$

$[5,2].[x,0]+[3,-5].[y,0]=[124,0]$

$[5x-0,0+2x]+[3y-0,0-5y]=[124,0]$

$$[5x,2x]+[3y,-5y]=[124,0]$$
$$[5x+3y,2x+5y]=[124,0]$$
$$5x+3y=124 \wedge 2x-5y=0$$
$$x=\frac{5y}{2}\ldots 15{,}5y=124$$
$$y=8\ldots x=20$$

Pr.

$$(4+3i)-(1-4i)=[4,3][1,-4]=[16,-13]=16-13i$$

- pri úprave komplexných čísiel tvaru $\frac{a+bi}{c+di}$ zlomky musíme rozšíriť adekvátnym výrazom, aby v menovateli nebolo i

Pr.

$$\frac{3+2i}{5i}=\frac{3+2i}{5i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{3i-2}{-5}=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}i \text{ alebo}$$
$$\frac{3+2i}{7-2i}=\frac{3+2i}{7-2i}\cdot\frac{7+2i}{7+2i}=\frac{21+14i+6i-4}{49+4}=\frac{17}{53}+\frac{30}{53}i$$

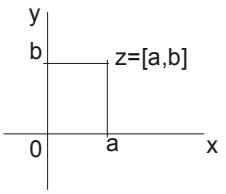
Pr.

Vypočítajte:

$$(1-i)^7=\left((1-i)^2\right)^3.(1-i)=(-2i)^3.(1-i)=-8(-i)(1-i)=8i-8i^2=8+8i$$

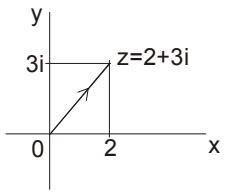
- komplexné čísla **znázorňujeme** ako:

1. body v gaussovej rovine

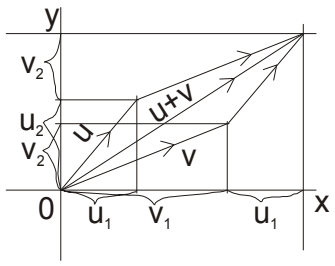


x…reálna os
y…imaginárna os

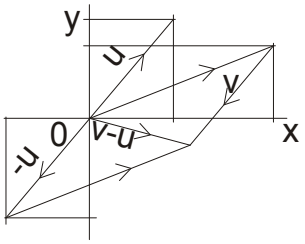
2. vektory



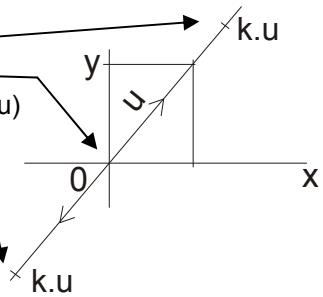
sčítanie



odčítanie



k-násobok
k>0…k.u
k=0…k.u=0
k<0…k.u= -k.(-u)

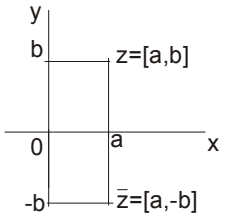


$z = [a,b] \ldots z = a + bi$

$\bar{z} = [a,-b] \ldots \bar{z} = a - bi$

Def.

Komplexne združeným číslom, ku komplexnému číslu $z = [a,b]$, nazývame číslo $\bar{z} = [a,-b]$.



-sú združené podľa osi x

Pr.

$z = 2 - 3i \ldots \bar{z} = 2 + 3i \quad b = 4 \ldots \bar{b} = 4 \quad c = 2i \ldots \bar{c} = -2i$

Veta

$\forall z = a + bi$:

1. $z.\bar{z} = a^2 + b^2$
2. $\overline{(\bar{z})} = z$

Dôkaz

1. $z.\bar{z} = (a+bi).(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$
2. $z = a + bi \ldots \bar{z} = a - bi \ldots \overline{(\bar{z})} = z$

Pr.

Nájdite všetky $x, y \in R$, tak aby čísla $5 + xyi$ a $x + y - 14i$ boli komplexne združené.

$z = [5, xy] \quad \bar{z} = [x + y, 4]$

$5 = x + y \wedge xy = 4$

$x = 5 - y \ldots (5 - y)y = 4$

$5y - y^2 = 4$

$y^2 - 5y + 4 = 0$

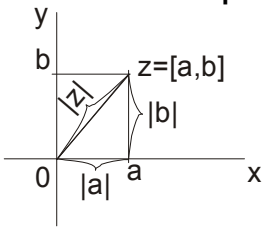
$(y-1).(y-4) = 0$

$y = 1 \vee y = 4$

$x = 4 \quad x = 1$

$P = \{[4,1],[1,4]\}$

- **absolútna hodnota komplexného čísla**



$|z|^2 = |a|^2 + |b|^2$

$|z|^2 = a^2 + b^2$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Def.

Absolútna hodnota čísla $z \in C; z = a + bi$ je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Veta **Dôkaz**

$\forall u, v, z \in C$:

1. $|z| > 0$ — 1. odmocnina je vždy z intervalu $(0, \infty)$
2. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ — 2. $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2}$
3. $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$ — 3. $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$
4. $|u.v| = |u|.|v|$ — 4. $|u.v| = \sqrt{(u.v)^2} = \sqrt{(u.v).\overline{u.v}} = \sqrt{u.\bar{u}}.\sqrt{v.\bar{v}} = |u|.|v|$
5. $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|}$ — 5. $\left|\frac{u}{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{u}{v}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{u}{v}\right)\left(\frac{\bar{u}}{\bar{v}}\right)} = \frac{|u|}{|v|}$
6. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ — 6. $\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2}} = \frac{1}{|z|}$

Pr.

Určite absolútnu hodnotu:

a) $z = 3 - 4i$ $\quad |z| = 5$ b) $z = -1 + i$ $\quad |z| = \sqrt{2}$ c) $z = -3i$ $\quad |z| = 3$

d) $z = i$ $\quad |z| = 1$

e) $z = \frac{-2+3i}{3-2i} = \frac{(-2+3i).(3+2i)}{(3-2i).(3+2i)} = \frac{-6+9i-4i+6i^2}{9+4} = -\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$

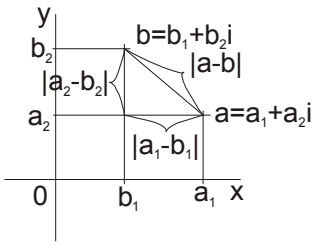
$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2} = 1$$

Veta

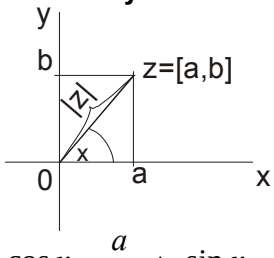
$$|a-b| = \sqrt{|a_1-b_1|^2 + |a_2-b_2|^2}$$

Dôkaz

$$|a-b| = |a_1 + a_2 i - b_1 - b_2 i| = |(a_1-b_1) + (a_2-b_2)i| = \sqrt{|a_1-b_1|^2 + |a_2-b_2|^2}$$



3. **goniometrický tvar**



x je argument bodu z a |z| je modul (sú to polárne súradnice)

$\cos x = \frac{a}{|z|} \wedge \sin x = \frac{b}{|z|}$ $\qquad a = |z|.\cos x \wedge b = |z|.\sin x$

$$z = [a,b] = a + bi = |z|\cos x + i.|z|\sin x = |z|.(\cos x + i\sin x)$$

$z = |z|.(\cos x + i\sin x)$ … <u>goniometrický tvar</u>

<u>Pr.</u>

Napíšte v goniometrickom tvare:

a) $z = -1 + i$

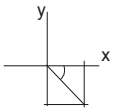
$|z| = \sqrt{2}$ $\quad \cos x = \frac{a}{|z|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin x = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = 135°$

$z = \sqrt{2}.(\cos 135° + i\sin 135°)$

b) $z = 1 - i\sqrt{3}$

$|z| = 2$ $\quad \cos x = \frac{1}{2} \wedge \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$x = 300°$

$z = 2.(\cos 300° + i\sin 300°)$

<u>Pr.</u>

Napíšte v algebrickom tvare:

a) $z = 2(\cos 315° + i\sin 315°) = 2.[\cos(360° - 45°) + i\sin(360° - 45°)] =$

$= 2.(\cos 45° - i\sin 45°) = 2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

b) $z = 3.\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3.\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 3.\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

$= 3.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3.\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

4. **exponenciálny tvar**

$\cos x + i\sin x = e^{ix}$ $\quad z = |z|.(\cos x + i\sin x) = |z|.e^{ix}$ xargument x sa tu zapisuje v radiánoch

$z = |z|.e^{ix}$ …<u>exponenciálny tvar</u>

<u>Pr.</u>

Napíšte v exponenciálnom tvare:

$z = 2 - i2\sqrt{3}$

$|z| = 4 \quad x = 300° \doteq 5{,}24$ $\qquad z = e^{5{,}24i}$

- **<u>násobenie a delenie komplexných čísiel v goniometrickom tvare</u>**

<u>Veta</u>

$\forall\, u, v \in C; u = |u|.(\cos\ x + i\sin\ x), v = |v|.(\cos\ y + i\sin\ y):$

1. $u.v = |u|.|v|.[\cos(x+y) + i\sin(x+y)]$
2. $\frac{u}{v} = \frac{|u|}{|v|}[\cos(x-y) + i\sin(x-y)]$

Dôkaz

$$u = |u|.(\cos x + i\sin x)$$

$$v = |v|.(\cos y + i\sin y)$$

1. $u.v = |u|.(\cos x + i\sin x).|v|.(\cos y + i\sin y) =$

$$= |u|.|v|.[\cos x\cos y + i\cos x\sin y + i\sin x\cos y - \sin x\sin y] =$$

$$= |u|.|v|.[(\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y)] =$$

$$= |u|.|v|.[\cos(x+y) + i\sin(x+y)]$$

2. $\dfrac{u}{v} = \dfrac{|u|.(\cos x + i\sin x)}{|v|.(\cos y + i\sin y)} = \dfrac{|u|.(\cos x + i\sin x).(\cos y - \sin y)}{|v|.(\cos y + i\sin y).(\cos y - \sin y)} =$

$$= \frac{|u|}{|v|}\cdot\frac{(\cos x\cos y + \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y - \cos x\sin y)}{\cos^2 y - i^2\sin^2 y} = \frac{|u|}{|v|}[\cos(x-y) + i\sin(x-y)]$$

Pr.

Sú dané čísla: $u = 6.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $v = 2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Vypočítajte:

a) $u.v = 2.\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

b) $\frac{u}{v} = 3.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

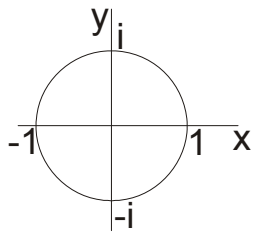
c) $\frac{v}{u} = \frac{1}{3}.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

d) $\frac{1}{u} = \frac{1}{6}.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

Def.

Číslo $z \in C$ je **komplexná jednotka** ak $|z| = 1$.

$$i, -i, 1, -1, \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ldots$$



jednotková kružnica

Pr.

Nech z je komplexná jednotka, zistite, či sú komplexné jednotky:

a) $-z$ $\quad |-z| = |z| = 1$ je

b) $\bar{z}$ $\quad |\bar{z}| = |z| = 1$ je

c) $\frac{1}{z}$ $\quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$ je

- **moivrova veta** ("moavrova" veta)
hovorí o umocňovaní komplexných jednotiek v goniometrickom tvare $\cos x + i\sin x$

$$(\cos x + i\sin x)^2 = (\cos x + i\sin x).(\cos x + i\sin x) = (\cos 2x + i\sin 2x)$$
$$\vdots$$
$$(\cos x + i\sin x)^n = \ldots = (\cos nx + i\sin nx)$$

Veta (moivrova)

$$\forall x \in R \forall n \in N : (\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$$

Dôkaz

1. $k = 1 \ldots (\cos x + i\sin x)^1 = \cos 1.x + i\sin 1.x$ …platí
2. $\forall x \in R \forall k \in N : (\cos x + i\sin x)^k = \cos kx + i\sin kx \Rightarrow (\cos x + i\sin x)^{k+1} =$
$= \cos[(k+1)x] + i\sin[(k+1)x]$

$$(\cos x + i\sin x)^{k+1} = (\cos x + i\sin x)^k.(\cos x + i\sin x) = (\cos kx + i\sin kx).$$
$$.(\cos x + i\sin x) = \cos kx\cos x + i\sin kx\cos x + i\sin x\cos kx - \sin kx.\sin x =$$
$$= \cos(kx + x\check{n} + i\sin(kx + x) = \cos[(k+1)x] + i\sin[(k+1)x]$$

Pr.

Vypočítajte:

$$z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 \qquad |z| = 1 \quad \cos x = \frac{1}{2} \qquad x_0 = 60° \qquad x = 300°$$

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = (\cos 300° - i\sin 300°)^6 = \cos 1800° + i\sin 1800° = \cos 0° - i\sin 0° = 1 + 0 = 1$$

(1800°=5.360°)

Pr.

Pomocou Moivrovej vety odvoďte vzorce pre: sin 2x, cos 2x

$$\cos x + i\sin x = \cos x + i\sin x \quad \Big|^2$$
$$\cos 2x + i\sin 2x = \cos^2 x + 2i\sin x\cos x + i^2\sin^2 x$$
$$\cos 2x + i\sin 2x = \cos^2 x + 2i\sin x\cos x - \sin^2 x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \wedge \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

Pr.

Pre komplexnú jednotku platí $z = \cos x + i\sin x$. Určite v goniometrickom tvare:

a) $\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos x + i\sin x} = \frac{\cos 0° + i\sin 0°}{\cos x + i\sin x} = \cos(-x) + i\sin(-x)$

b) $\overline{z} = \overline{\cos x + i\sin x} = \cos(-x) + i\sin(-x)$

c) $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{\cos 2x + i\sin 2x} = \frac{\cos 0° + i\sin 0°}{\cos 2x + i\sin 2x} = \cos(-2x) + i\sin(-2x)$

d) $z^2 + \frac{1}{z^2} = \cos 2x + i\sin 2x + \cos(-2x) + i\sin(-2x) = \cos 2x + \cos 2x + i(\sin 2x - \sin 2x) =$
$= 2\cos 2x$

- **umocňovanie komplexných čísiel**

$z = a + bi \qquad z^n = (a+bi)^n$

$z = |z|.(\cos x + i \sin x)$

$$\boxed{z^n = |z|^n.(\cos x + i\sin x)^n = |z|^n.(\cos nx + i \sin nx)}$$

Pr.

$(\sqrt{3} - i)^8 \qquad |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2 \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin x = -\frac{1}{2} \quad x_0 = 30° \ldots x = 330°$

$(\sqrt{3} - i)^8 = 2^8.(\cos 8.330° + i \sin 8.330°) = 256.(\cos 120° + i \sin 120°) = -128 + i128\sqrt{3}$

- **odmocňovanie komplexných čísiel**

$a \in R; a \geq 0; x \geq 0 \qquad \sqrt{a} = x \ldots x^2 = a$

$\sqrt{9} = 3$

$a \in C \qquad \sqrt{9} = \pm 3; \sqrt{-4} = \pm 2i; \sqrt[3]{8i} = -2i = \pm\sqrt{3} + i$

Def.

$\forall n \in N$ n-tou komplexnou odmocninou čísla $a \in C$ nazývame komplexné číslo z, také že platí: $z^n = a \ldots \sqrt[n]{a} = z$.

Dôkaz

$a = |a|.(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$z = |z|.(\cos x + i \sin x)$

$$\left[|z|.(\cos x + i \sin x)\right]^n = |a|.(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$|z|^n.(\cos nx + i \sin nx) = |a|.(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$|z|^n = |a| \wedge nx - \alpha = k.2\pi$$

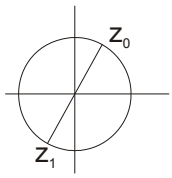
$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \wedge x = \frac{\alpha + k.2\pi}{n}$$

Veta

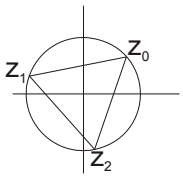
$\forall n \in N \forall a \in C; a = |a|.(\cos \alpha + i \sin \alpha) \neq 0 \; \exists$ práve n rôznych komplexných odmocnín z čísla a. Sú to čísla tvaru: $\boxed{z_k = \sqrt[n]{|a|}.\left(\cos \frac{\alpha + k.2\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + k.2\pi}{n}\right); k = 0,1,\ldots,n-1}$.

- všetky n-té odmocniny čísla $a \in C$ majú rovnakú absolútnu hodnotu, preto ležia na kružnici s polomerom $\sqrt[n]{|a|}$, sú vrcholom pravidelného n-uholníka

$n = 2$



$n = 3$



…

Pr.

Vypočítajte:

$$\sqrt[3]{-8}$$

$$a=-8=8.(\cos 180°+i\sin 180°)$$

$$z_k=\sqrt[3]{8}.\left(\cos\frac{180°+k.360°}{3}+i\sin\frac{180°+k.360°}{3}\right)$$

$$z_0=\sqrt[3]{8}.(\cos 60°+i\sin 60°)=2.\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$$

$$z_1=\sqrt[3]{8}.(\cos 180°+i\sin 180°)=-2$$

$$z_2=\sqrt[3]{8}.(\cos 300°+i\sin 300°)=\sqrt[3]{8}.(\cos 60°-i\sin 60°)=2.\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{-8}=-2 \wedge \sqrt[3]{-8}=1\pm i\sqrt{3}$$

Pr.

Riešte v C:

$$x^4+x^2+1=0$$

rovnicu budeme riešiť substitúciou $x^2=y$

$$y^2+y+1=0$$

$$D=b^2-4ac=1-4.1.1=-3$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{-3}=i\sqrt{3}$$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. $x^2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x=\sqrt{-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$|x|=\sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$|x|=1$$

$$\alpha=120°$$

$$x_k=\sqrt{1}.\left(\cos\tfrac{120°+k360°}{2}+i\sin\tfrac{120°+k360°}{2}\right)$$

$$x_0=\sqrt{1}.(\cos 60°+i\sin 60°)=\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1=-x_0=-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

2. $x^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x=\sqrt{-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$|x|=\sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$|x|=1$$

$$\alpha=240°$$

$$x_k=\sqrt{1}.\left(\cos\tfrac{240°+k360°}{2}+i\sin\tfrac{240°+k360°}{2}\right)$$

$$x_0=\sqrt{1}.(\cos 120°+i\sin 120°)=-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1=-x_0=\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^4+x^2+1=(x-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}).(x+\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}).(x+\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}).(x-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

Cvičenia

1. Napíšte opačné a prevrátené číslo k číslu:

a) $a=[-1,-2]$ b) $b=[3,0]$ c) $c=[0,2]$

2. Vypočítajte:

a) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{2001}$ b) $i.i^2.\,i^3.\cdots.i^{50}$

3. Napíšte v algebrickm tvare:

a) $(1+i).(1+i)$ b) $(2-3i)^2$ c) $\frac{7-4i}{2}$

4. Vypočítajte:

a) $(\sqrt{3}-i).(\sqrt{3}+i)$ b) $(2+5i)^2.(3-i)$ c) $(3+i)^3$

5. Vypočítajte:

a) $(1-i\sqrt{3})^9$ b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{24}$ c) $(1+i)^{100}$

6. Nájdite $x, y \in R$ tak aby platilo:

a) $[2,3].[x,-1]=[y,2y]$ b) $[2,-1].[x,y]=[3,-4]$

7. Určite všetky komplexné čísla z, pre ktoré platí:

a) $z=\bar{z}$ b) $z+\bar{z}=0$ c) $z=z.z$

8. Napíšte v goniometrickom tvare:

a) $z=-3i$ b) $z=-2$ c) $z=4i$ d) $z=5$ e) $z=\frac{2-i}{3i-1}$

9. Vypočítajte:

a) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}$ b) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{4}$

Neriešené úlohy

1. Napíšte v algebrickom tvare:

a) $z=(2+i)^3$, b) $z=\frac{7-4i}{3+2i}$, c) $z=\frac{3+2i}{7-2i}$, d) $z=(2+5i)^2.(3-i)$

2. Nájdite $x, y \in R$ tak aby platilo:

a) $(2-3i)x+(2-3i).(x+y)=7-8i$, b) $(1+i)x+(1-i)y=3-i$, c) $\frac{3-2i}{1+i}=2x+yi$

3. Nájdite všetky $x \in R$, pre ktoré je komplexné číslo $z=\frac{1-ix}{1+ix}$

a)reálne, b)rýdzoimaginárne

4. Určite $|z|$, ak: a) $z=\frac{(1+i)^3}{(1-i)^5}$, b) $z=\frac{(2+1).(1-i)^2}{(-3+4i)^2}$, c) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$

5. Nájdite všetky $z \in C$, pre ktoré platí:

a) $|z|=z$, b) $|z|^2=z^2$, c) $|z-i|=|z+1|$, d) $|z+1|=|z-1|$, e) $|z+2|=2$, f) $z^2=z+\bar{z}$,

g) $|z|-z=1+2i$, h) $|z|=z+\bar{z}$, i) $|z+\bar{z}|=|z-\bar{z}|$, j) $z=z^2$, k) $|z-1|+|z+1|=4$

6. Napíšte v goniometrickom tvare $z, -z, \overline{z}, \frac{1}{z}, \frac{z}{\overline{z}}$ **ak:**

a) $z = 1 + i$, b) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, c) $z = -1 + \sqrt{3i}$, d) $z = \frac{2-i}{3i-1}$, e) $z = \frac{i-3}{3+i}$

7. Pomocou Moivrovej vety odvoďte vzorce pre:
a) sin 3x, cos 3x, b) sin 4x, cos 4x.

8. Sú dané komplexné čísla $u = 6.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), v = 2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$**. Napíšte v goniometrickom tvare: a)** $u.v$**, b)** $\frac{u}{v}$**, c)** $\frac{v}{u}$**, d)** $\frac{1}{u}$

9. Vypočítajte:

a) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$ b) $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$ c) $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$ d) $(1 - i\sqrt{3})^{12}$

10. Pre komplexné číslo z platí $z = a(\cos x + i\sin x)$**. Napíšte v goniometrickom tvare:**

a) $\overline{z}$, b) $-z$, c) $\frac{1}{z}$, d) $\frac{1}{z^2}$, e) $\frac{z}{\overline{z}}$, f) $\frac{\overline{z}}{z}$

11. Pre komplexné jednotky u, v **platí** $u = \cos x + i\sin x, v = \cos y + i\sin y$**. Vypočítajte:**

a) $u + \frac{1}{u}$, b) $u^2 + \frac{1}{u^2}$, c) $\frac{u}{v} = \frac{v}{u}$, d) $u^n + \frac{1}{u^n}$

12. Nech $z = \cos x + i\sin x, n \in N$**. Vyjadrite pomocou** x **a** n **čísla:** $z^n + \frac{1}{z^n}$ a $z^n - \frac{1}{z^n}$

13. Vypočítajte a znázornite v komplexnej rovine:
a) $\sqrt[3]{-8}$, b) $\sqrt[3]{i}$, c) $\sqrt[4]{16i}$, d) $\sqrt{4}$, e) $\sqrt{-9}$, f) $\sqrt{4i}$, g) $\sqrt[3]{-2+2i}$

14. Je daná množina $M = \{z \in C; |z - 25i| \le 15\}$**. Nájdite prvok množiny M, ktorý má:**
a) najmenšiu absolútnu hodnotu
b) najmenší argument
c) najväčší argument

15. Čo platí o obrazoch všetkých komplexných čísel $z = (-1 + i\sqrt{3})^n + (-1 - i\sqrt{3})^n, n \in N$ **?**

5. LINEÁRNE ROVNICE, NEROVNICE A ICH SÚSTAVY

1. Karteziánsky súčin

2. Lineárna rovnica s jednou neznámou
- rovnica $ax + b = 0$, kde $a, b \in R$

3. Lineárna rovnica s dvoma neznámymi
- rovnica $ax + by = c$, kde $a, b, c \in R$
- graf jej oboru pravdivosti
- lineárna nerovnica a graf jej oboru pravdivosti

4. Lineárna rovnica s tromi neznámymi
- rovnica $ax + by + cz = d$, kde $a, b, c, d \in R$
- graf jej oboru pravdivosti
- lineárna nerovnica a graf jej obom pravdivosti

5. Lineárna rovnica s n neznámymi
- rovnica $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, kde $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in R$

6. Matice

7. Sústava lineárnych rovníc *(nelineárnych rovníc a sústava s parametrom)*
- sústava lineárnych rovníc ako konjunkcia a jej obor pravdivosti
- homogénna sústava, jej matica, obor pravdivosti
- nehomogénna sústava, matica sústavy a rozšírená matica sústavy
- Frobéniova veta, obor pravdivosti
- metódy riešenia: dosadzovacia, sčítacia, grafická, Gaussova eliminačná metóda
- determinanty, Cramerova veta

.....

- **<u>karteziánsky súčin</u>**
  - dvojica objektov, v ktorej nezáleží na poradí sa nazýva **neusporiadaná dvojica** $\{a, b\}$
  - dvojica objektov, v ktorej záleží na poradí sa nazýva **usporiadaná dvojica** $[a, b]$
    (kde a je prvá zložka a b je druhá zložka)

<u>Def.</u>

Karteziánsky súčin množín A, B je množina $A \times B$, všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]; x \in A, y \in B$.

$$A \times B = \{[x, y]; x \in A, y \in B\}$$

<u>Pr.</u>

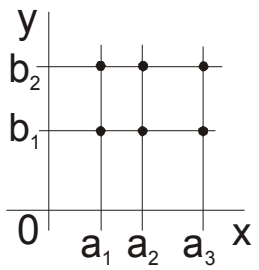
$$A = \{1,2\},\ B = \{a, b, c\}$$
$$A \times B = \{[1, a], [1, b], [1, c], [2, a], [2, b], [2, c]\}$$
$$B \times A = \{[a,1], [a,2], [b,1], [b,2], [c,1], [c,2]\}$$

karteziánsky súčin **nie je komutatívna operácia**

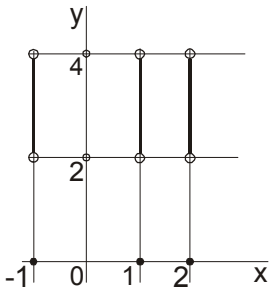
- karteziánsky súčin $A \times A$ môžeme napísať aj v tvare A^2 a nazývame ho **druhá karteziánska mocnina** ($A \times A \times A = A^3 \ldots$)

- graf karteziánskeho súčinu

$A = \{a_1, a_2, a_3\},\ B = \{b_1, b_2\}$



$A = \{-1,2,3\},\ B = (2,4)$



- **<u>lineárna rovnica s jednou neznámou</u>**

<u>Def.</u>

Lineárna rovnica s jednou neznámou je každá rovnica tvaru
$ax + b = 0; a, b \in R, a \neq 0$.

- jej riešením je **číslo** $x = -\dfrac{b}{a}$

- **<u>lineárna rovnica s dvoma neznámymi</u>**

<u>Def.</u>

Lineárna rovnica s dvoma neznámymi je každá rovnica tvaru
$ax + by = c; a, b, c \in R, a \neq 0 \vee b \neq 0$.

- obor pravdivosti lineárnej rovnice s dvoma neznámymi je množina obsahujúca **nekonečne veľa usporiadaných dvojíc**
- graf oboru pravdivosti je **priamka** v rovine

<u>Pr.</u>

Riešte v R^2:

$$2x + 3y = 6$$

$x = 0 \ldots 2.0 + 3y = 6$

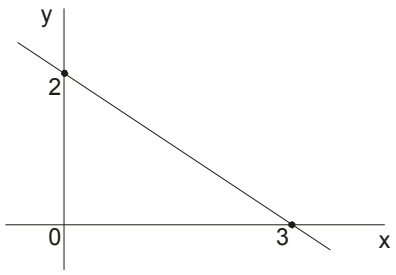
$3y = 6$

$y = 2 \ldots [0,2]$

$y = 0 \ldots 2x + 3.0 = 6$

$2x = 6$

$x = 3 \ldots [3,0]$



Def.

Lineárna nerovnica s dvoma neznámymi je každá nerovnica tvaru
$ax + by\ N\ c; a, b, c \in R, a \neq 0 \vee b \neq 0, N$ je niektorý zo znakov nerovnosti.

- obor pravdivosti lineárnej nerovnice s dvoma neznámymi je množina obsahujúca **nekonečne veľa usporiadaných dvojíc**
- graf oboru pravdivosti je **polrovina** alebo **polrovina bez hraničnej priamky**

Pr.

Riešte v R^2:

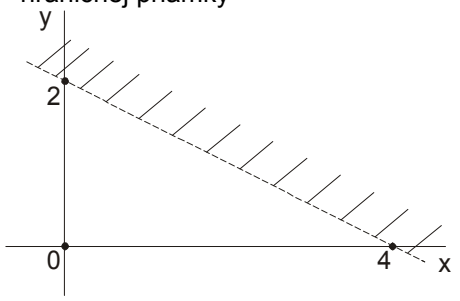
a) $x + 2y > 4$

- aby sme zistili, kde hraničná priamka polroviny pretne os x a y vyriešime lineárnu rovnicu

$x + 2y = 4$

$x = 0 \ldots y = 2 \ldots [0,2]$ $\qquad$ $y = 0 \ldots x = 4 \ldots [4,0]$

- nato, aby sme určili, ktorá polrovina to bude, si musíme zvoliť nejaký bod nad alebo pod hraničnou priamkou; napr. $[0,0] \ldots 0 + 2.0 > 4$ $\quad 0 > 4$, vidíme, že tento bod nerovnici nevyhovuje, to znamená, že musíme zvoliť opačnú polrovinu
- tá bude našim riešením, nakoľko je v nerovnici ostrá nerovnosť, tak polrovina bude bez hraničnej priamky

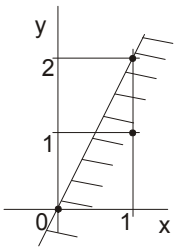


b) $y \leq 2x$

$y = 2x$

$x = 0 \ldots y = 0 \ldots [0,0]$, keďže hraničná priamka prechádza začiatkom súradnicovej sústavy, musíme si zvoliť iný bod hraničnej priamky, napr. $x = 1 \ldots y = 2 \ldots [1,2]$

- teraz si zvolíme bod mimo priamky $[1,1] \ldots 1 \leq 2$



Def.

Sústavu lineárnych rovníc (nerovníc) chápeme ako ich konjunkciu.

$l_1(x) = p_1(x) \wedge l_2(x) = p_2(x)$

$l_1(x)\ N\ p_1(x) \wedge l_2(x)\ N\ p_2(x)$

Veta

Obor pravdivosti sústavy je prienikom oborov pravdivosti jednotlivých rovníc (nerovníc).

$P = P_1 \cap P_2$

- **sústavu** lineárnych rovníc **môžeme riešiť**:
  1. **dosadzovacou metódou**
  2. **sčítacou metódou**
  3. **grafickou metódou**

Pr.

Riešte v R^2:

$$x+3y=8$$
$$2x-5y=5$$

1. dosadzovacia metóda

$$x+3y=8$$
$$2x-5y=5$$
$$x=8-3y$$
$$2(8-3y)-5y=5$$
$$16-6y-5y=5$$
$$11=11y$$
$$y=1$$
$$x=8-3.1$$
$$x=5$$
$$P=\{[5,1]\}$$

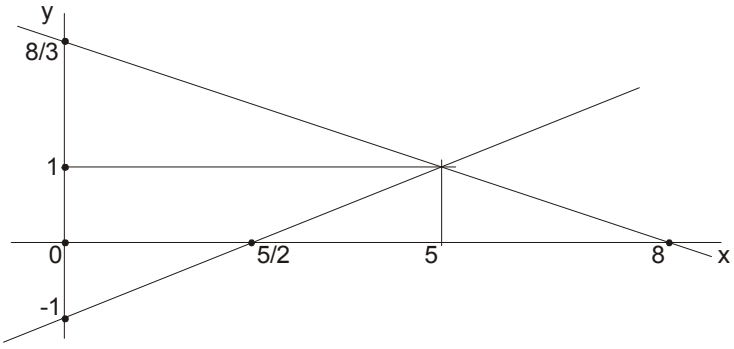
2. sčítacia metóda

$$x+3y=8 \;\big|.(-2)$$
$$2x-5y=5$$
$$-2x-6y=-16$$
$$2x-5y=5$$
$$11=11y$$
$$y=1$$
$$x=8-3.1$$
$$x=5$$
$$P=\{[5,1]\}$$

3. grafická metóda

$$x+3y=8$$
$$x=0 \ldots y=\tfrac{8}{3} \ldots \left[0,\tfrac{8}{3}\right]$$
$$y=0 \ldots x=8 \ldots [8,0]$$

$$2x-5y=5$$
$$x=0 \ldots y=-1 \ldots [0,-1]$$
$$y=0 \ldots x=\tfrac{5}{2} \ldots \left[\tfrac{5}{2},0\right]$$



Veta

Obor pravdivosti sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi môže byť:

1. jednoprvková množina - grafy oborov pravdivosti jednotlivých rovníc sú rôznobežné priamky
2. prázdna množina - grafy oborov pravdivosti jednotlivých rovníc sú rovnobežné rôzne priamky
3. nekonečná množina - grafy oborov pravdivosti jednotlivých rovníc sú totožné priamky

Pr.

Riešte v R^2:

a) $$4x-2y=12$$ $$2x-y=5$$

b) $$4x-2y=12$$ $$-2x+y=-6$$

a)
$$4x-2y=12$$
$$2x-y=5 \;\big|.(-2)$$
$$4x-2y=12$$
$$-4x+2y=-10$$

$$0x+0y=2$$
$$P=\theta$$

b)
$$\begin{array}{l} 4x-2y=12 \\ -2x+y=-6 \;\big|.(-2) \\ \hline 4x-2y=12 \\ \underline{4x-2y=12} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4x-2y=12 \\ -2y=14-4x \\ y=2x-6 \\ P=\{[x,2x-6];x\in R\} \end{array}$$

- **sústavu** lineárnych nerovníc **môžeme riešiť**: **grafickou metódou**

Pr.

Riešte v R^2:

$$\begin{array}{l} 2x+3y\geq 12 \\ \underline{3x-y<7} \end{array}$$

$2x+3y=12$

$x=0 \ldots y=4 \ldots [0,4]$

$y=0 \ldots x=6 \ldots [6,0]$

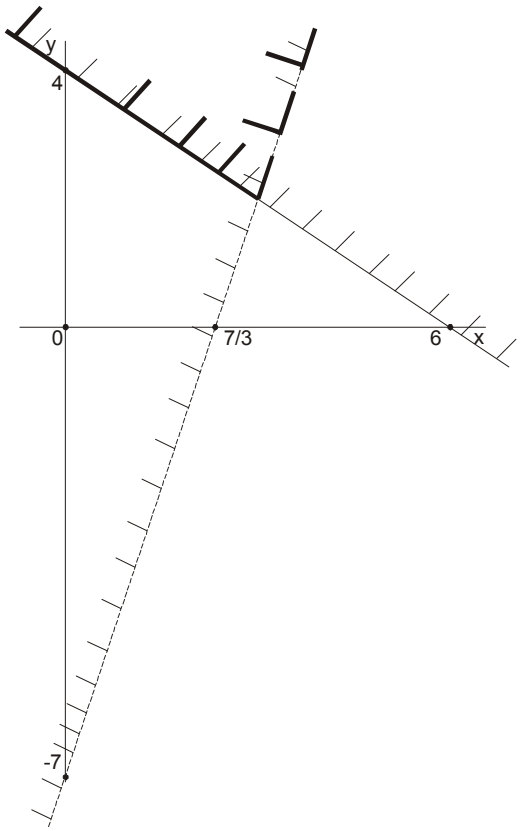
$[0,0]\ldots 0\geq 12$

$3x-y=7$

$x=0 \ldots y=-7 \ldots [0,-7]$

$y=0 \ldots x=\frac{7}{3} \ldots [\frac{7}{3},0]$

$[0,0]\ldots 0<7$



- **<u>lineárna rovnica s tromi neznámymi</u>**

<u>Def.</u>

Lineárna rovnica s tromi neznámymi je každá rovnica tvaru
$ax+by+cz=d\,;a,b,c,d\in R, a\neq 0\vee b\neq 0\vee c\neq 0$.

- obor pravdivosti lineárnej rovnice s tromi neznámymi je množina obsahujúca **nekonečne veľa usporiadaných trojíc**
- graf oboru pravdivosti je **rovina** v priestore

Pr.

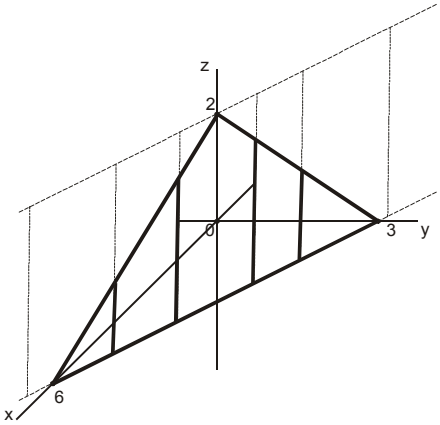
Riešte v R^3:

$x+2y+3z=6$

$x=0, y=0 \ldots z=2 \ldots [0,0,2]$

$x=0, z=0 \ldots y=3 \ldots [0,3,0]$

$y=0, z=0 \ldots x=6 \ldots [6,0,0]$



Def.

Lineárna nerovnica s tromi neznámymi je každá nerovnica tvaru
$ax + by + cz\ N\ d\,; a,b,c,d \in R, a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0, N$ je niektorý zo znakov nerovnosti.

- obor pravdivosti lineárnej nerovnice s tromi neznámymi je množina obsahujúca **nekonečne veľa usporiadaných trojíc**
- graf oboru pravdivosti je **polpriestor** alebo **polpriestor bez hraničnej roviny**

Def.

Sústavu lineárnych rovníc (nerovníc) chápeme ako ich konjunkciu.

$$l_1(x) = p_1(x) \wedge l_2(x) = p_2(x) \wedge l_3(x) = p_3(x)$$

$$l_1(x)\ N\ p_1(x) \wedge l_2(x)\ N\ p_2(x) \wedge l_3(x)\ N\ p_3(x)$$

Veta

Obor pravdivosti sústavy je prienikom oborov pravdivosti jednotlivých rovníc (nerovníc).

$$P = P_1 \cap P_2 \cap P_3$$

Veta

Obor pravdivosti sústavy lineárnych rovníc s tromi neznámymi môže byť:

1. jednoprvková množina - jedna usporiadaná trojica
2. prázdna množina - grafy oborov pravdivosti jednotlivých rovníc sú rovnobežné rôzne roviny
3. nekonečná množina - nekonečne veľa usporiadaných trojíc, tvoriacich priamku alebo rovinu

Pr.

Riešte v R^3:

a)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ -3x + y - 2z &= 2 \\ 2x + 3y + 2z &= 11 \end{aligned}$$

- sústavu môžeme riešiť, podobne ako pri dvoch neznámych, dosadzovacou metódou alebo tým, že si ju upravíme na **trojuholníkový tvar** (tento postup si ukážeme)

$$\begin{aligned} x &= -1 - 2y + 3z \\ -3(-1 - 2y + 3z) + y - 2z &= 2 \\ 2(-1 - 2y + 3z) + 3y + 2z &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -1 - 2y + 3z \\ 7y - 11z &= -1 \\ -y + 8z &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -1 - 2y + 3z \\ y &= 8z - 13 \\ 7(8z - 13) - 11z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= -1 - 2y + 3z \\ y \quad &= 8z - 13 \\ 45z &= 90 \end{aligned}$$

- tak toto je sústava v trojuholníkom tvare a z nej je hneď vidieť naše riešenie

$$z = 2, y = 3, x = -1$$

$$P = \{[-1,3,2]\}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x+3y \quad &= 7 \\ x+2y+2z &= 7 \\ x+5y+\ \ z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y+2z &= 7 \quad \big|.(-1)\ \big|.(-2) \\ x+5y+\ \ z &= 2 \\ 2x+3y \quad &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y+2z &= 7 \\ 3y+\ \ z &= 2 \\ -y-4z &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y+2z &= 7 \\ -y-4z &= 7 \quad \big|.(3)\ \big|.(-1) \\ 3y+\ \ z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y+2z &= 7 \\ y+4z &= 7 \\ -13z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 2 \\ y &= -1 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$P = \{[5,-1,2]\}$$

Pr.

Riešte v R^3:

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 4 \\ 2x+3y+4z &= 5 \quad \big|.(-1) \\ 3x+4y+5z &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 4 \\ 2x+3y+4z &= 5 \\ x+\ \ y+\ \ z &= 1 \quad \big|.(-1)\ \big|.(-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ y+2z &= 3 \\ y+2z &= 3 \end{aligned}$$

keďže sú dve rovnice rovnaké, môžeme písať len jednu z nich

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ y+2z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1-y-z \\ y &= 3-2z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= z-2 \\ y &= 3-2z \end{aligned}$$

máme parametrické riešenie sústavy

$$P = \{[z-2, 3-2z, z]; z \in R\}$$

- **<u>lineárna rovnica s</u>** n **<u>neznámymi</u>**

<u>Def.</u>

Lineárna rovnica s n neznámymi je každá rovnica tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in R.$$

- obor pravdivosti lineárnej rovnice s tromi neznámymi je množina obsahujúca **nekonečne veľa usporiadaných n-tíc**

- **<u>matice</u>**
  - matica je vlastne tabuľka čísel, jej typ závisí od počtu riadkov a stĺpcov

<u>Def.</u>

Matica typu $m \times n$ je usporiadaná $m.n$-tica reálnych čísel, ktorú píšeme v tvare tabuľky s m riadkami a n stĺpcami.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \qquad A_{m\times n} = (a_{ij}); i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$$

Def.

Dve matice $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ rovnakého typu $m\times n$ sa rovnajú, ak platí: $\forall i,j: a_{ij}=b_{ij}$.

- označujeme $A=B$

Pr.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-9 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ -6 & -8 & 9\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$A\neq B, A=C, A\neq D, B\neq C, B\neq D, C\neq D$$

Def.

Súčtom matíc $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ rovnakého typu $m\times n$ je matica $C=(a_{ij}+b_{ij})$, ktorá je tiež typu $m\times n$.

- označujeme $C=A+B$

Pr.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-9 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 7\\ 12 & -4\end{pmatrix}$$

Veta

$\forall$ matice A,B,C typu $m\times n$:

1. komutatívnosť: $A+B=B+A$
2. asociatívnosť: $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $\exists$ neutrálny prvok: je to nulová matica typu $m\times n$ … $O_{m\times n}$
4. $\forall A=(a_{ij})\ \exists -A=(-a_{ij})$ opačná matica k A

Def.

Súčin matice $A=(a_{ij})$ typu $m\times n$ a matice $B=(b_{ij})$ typu $n\times p$ je matica $C=(c_{ij})$ typu $m\times p$, kde $c_{ij}=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+a_{i3}.b_{3j}+\cdots+a_{in}.b_{nj}$.

- označujeme $C=A.B$

$$A_{m\times n}.B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

$$i\underbrace{\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\end{pmatrix}}_{m\times n}^{A}.\underbrace{\begin{pmatrix}\cdots & b_{1j} & \cdots\\ \cdots & b_{2j} & \cdots\\ \cdots & b_{3j} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \cdots & b_{pj} & \cdots\end{pmatrix}}_{n\times p}^{B\ j}=i\underbrace{\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots\\ & & \vdots & & \\ & & c_{ij} & & \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}}_{m\times p}^{C\ j}$$

Pr.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\\1&1\end{pmatrix} \qquad A.B=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}}.\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix}3&2\\2&1\\1&1\end{pmatrix}}=\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}10&7\\16&11\end{pmatrix}}$$

Def.

Súčinom čísla $c \in R$ a matice $A=(a_{ij})$ je matica $c.A=(c.a_{ij})$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}=(a_{ij}) \Rightarrow c.A=\begin{pmatrix}ca_{11}&ca_{12}&\cdots&ca_{1n}\\ca_{21}&ca_{22}&\cdots&ca_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ca_{m1}&ca_{m2}&\dots&ca_{mn}\end{pmatrix}=(ca_{ij})$$

- **hodnosť matice**
  - každý riadok (stĺpec) matice môžeme považovať za vektor $\Rightarrow$ **riadkový (stĺpcový) vektor**

Def.

Hodnosť matice je počet jej lineárne nezávislých riadkových (stĺpcových) vektorov.

- označujeme $h(A)=a; a \in N_0$

- aby sme zistili hodnosť matice tak ju upravujeme na **trojuholníkový tvar** tým, že využívame **elementárne riadkové operácie** (ERO)
  (je to taký tvar matice, v ktorej pod hlavnou diagonálou sú samé nuly)

Veta

ERO sú:
1. výmena riadkov matice
2. vynásobenie ľubovoľného riadku nenulovým číslom
3. pričítanie nenulového násobku ľubovoľného riadku k inému riadku

Pr.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{pmatrix}\begin{matrix}|.(-2)\ |.(-5)\ |.(-7)\\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&-14&-26&12\\0&-14&-26&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\|.(-1)\\|.(-\frac{1}{2})\\|.(-\frac{1}{2})\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&7&13&-6\\0&7&13&-6\\0&7&13&-4\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&7&13&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&7&13&-6\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad h(A)=3$$

- **štvorcové matice**

Def.

Štvorcová matica stupňa n je matica typu $n \times n$.

- každé dve štvorcové matice rovnakého stupňa možno sčítať aj násobiť
- pre sčítanie platia vlastnosti uvedené pri maticiach a pre **násobenie** platí:
  1. nieje komutatívne $A.B \neq B.A$
  2. asociatívnosť $(A.B).C = A.(B.C)$

3. $\exists$ neutrálny prvok a nazýva jednotková matica stupňa n pre maticu typu $n \times n$

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Def.**

Ak pre maticu A typu $n \times n$ existuje matica A^{-1} a platí, že $A.A^{-1} = J_n$, tak matica A^{-1} sa nazýva inverzná matica k matici A a matica a je regulárna. Keď A^{-1} neexistuje, tak matica A je singulárna.

Pr.

Nájdite inverznú maticu:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -2 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- existujú dva postupy a aj si ich ukážeme

1. postup

- vytvoríme maticu tvaru $(A \mid J_n)$ a pomocou ERO ju upravíme tak, aby na ľavej strane vznikla matica J_n a matica, ktorá vznikne na pravej strane bude A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & -4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. postup

- využijeme pri tomto postupe determinant matice (povieme si o nich neskôr a čitateľ si môže postup overiť)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{d(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- kde $d(A)$ je determinant matice A a prvky A_{ij} sú algebraické doplnky prvkov a_{ij}

$$d(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ determinant matice $n\times n$

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- tu použijeme determinant $(n-1)\times(n-1)$, ktorý vznikne z $d(A)$ tak, že vynecháme i-ty riadok a j-ty stĺpec

- takže: $d(A)=1$

$$A_{11}=(-1)^2.\begin{vmatrix} -7 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\,,\ A_{21}=(-1)^3.\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0\,,\ A_{31}=(-1)^4.\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}=3$$

$$A_{12}=(-1)^3.\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\,,\ A_{22}=(-1)^4.\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\,,\ A_{32}=(-1)^5.\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{13}=(-1)^4.\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\,,\ A_{23}=(-1)^5.\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2\,,\ A_{33}=(-1)^6.\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}=2$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- ukázali sme si oba postupy, i keď je druhý rýchlejší, častejšie sa vo vyučovaní používa prvý postup, pretože je ľahšie vysvetliteľný

- **<u>sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi</u>**

<u>Def.</u>

Sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi je ich konjunkcia, ktorú píšeme v tvare:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned} \qquad (*)$$

<u>Def.</u>

Obor pravdivosti sústavy je prienik oborov pravdivosti jednotlivých rovníc.

$$P=P_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_m$$

<u>Def.</u>

Sústava $(*)$ sa nazýva homogénna, ak platí: $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$

> homogénna sústava má vždy aspoň jedno riešenie, toto riešenie sa nazýva nulové $[0,0,\ldots,0]$

- zo sústavy (∗) môžeme vytvoriť **maticu sústavy**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Veta

1. Ak sústava (∗) je homogénna a hodnosť matice $h(A) = m$, tak sústav má iba nulové riešenie
2. Ak sústava (∗) je homogénna a hodnosť matice $h(A) < m$, tak sústav má nekonečne veľa riešení, ktoré tvoria vektorový priestor dimenzie $n - h(A)$ (máme parametrické riešenie stupňa $n - h(A)$).

Pr.

Riešte:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 \quad + 3x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 2 < 3 = n$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_2 - x_3 = -1{,}5x_3$$

$$x_2 = -\frac{x_3}{2}$$

$$P = \left\{\left[-\tfrac{3}{2}x_3, -\tfrac{1}{2}x_3, x_3\right]; x_3 \in R\right\}$$

Def.

Sústava (∗) sa nazýva nehomogénna, ak aspoň jedno z $b_1, b_2, \cdots, b_m$ je rôzne od nuly.

> nehomogénna sústava nemusí mať vždy riešenie

- zo sústavy (∗) môžeme vytvoriť **maticu sústavy**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a **rozšírenú maticu sústavy**:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- je zrejmé, že ak nastane v nejakom i-tom riadku rozšírenej matice takýto prípad: $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0 \wedge b_i \neq 0$, tak sústava nebude mať riešenie; keďže pre takúto kombináciu neexistujú $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (o tom hovorí nasledujúca veta)

<u>Veta</u> (Frobéniova)

Nehomogénna sústav m lineárnych rovníc s n neznámymi má riešenie práve vtedy, keď platí: $h(A) = h(A')$.

<u>Veta</u>

1. Ak sústava (*) je nehomogénna a hodnosť matice $h(A) = h(A') = m$, tak sústav má práve jedno riešenie
2. Ak sústava (*) je nehomogénna a hodnosť matice $h(A) = h(A') < m$, tak sústav má nekonečne veľa riešení, ktoré tvoria vektorový priestor dimenzie $n - h(A)$ (máme parametrické riešenie stupňa $n - h(A)$).

<u>Pr.</u>

Riešte:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$h(A) = 2 \neq h(A') = 3 \Rightarrow P = \theta$$

$$P = \theta$$

- danú sústavu sme vyriešili dosadzovacou metódou a potom pomocou Gaussovej eliminačnej metódy (tú si vysvetlíme po tomto príklade) a využitím Frobéniovej vety

b)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 3x + 4y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad h(A) = h(A') = 2 < 3$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ -y - 2z &= -3 \end{aligned}$$

$$y = 3 - 2z$$

$$x = 4 - 2y - 3z = 4 - 2.(3 - 2z) - 3z = 4 - 6 + 4z - 3z = -2 + z$$

$$P = \{[-2 + z,\ 3 - 2z,\ z]; z \in R\}$$

- zhrnieme si možnosti riešenia sústavy m lineárnych rovníc s n neznámymi, môžme ich riešiť viacerými metódami: **dosadzovacou**, **sčítacou**, **grafickou** (postupy sú uvedené v odseku o lineárnej rovnici s dvoma neznámymi);
  ďalej **Gaussovou eliminačnou metódou** (postupujeme tak, že zo sústavy ak je homogénna (nehomogénna) vytvoríme maticu sústavy (rozšírenú maticu sústavy), potom získanú maticu upravíme pomocou ERO na trojuholníkový, prípadne lichobežníkový tvar. Maticu prepíšeme späť do sústavy a hneď vidíme riešenie, ako je tomu v predchádzajúcom príklade. *Tento postup je presne taký istý ako keď by sme sústavu upravovali na trojuholníkový tvar ako je ukázané pri sústave troch lineárnych rovníc s troma neznámymi, len vďaka novým poznatkom o maticiach sústavy je prehľadnejší*)

- ďalšou možnosťou je riešenie pomocou **determinantov**, tým je venovaná nasledujúca časť

- **determinanty**

- determinant (určovateľ) je číslo, ktoré sa podľa istých pravidiel vypočíta zo štvorcovej matice

- zoberme si sústavu dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \quad \Big|\, .a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \quad \Big|\, .(-a_{12}) \\ \hline a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 &= b_1a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 &= b_2a_{12} \\ \hline x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) &= b_1a_{22} - b_2a_{12} \end{aligned}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$

$0x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$

$b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0$

$0x_1 = 0$

$x_1 \in R$ nek. veľa riešení

$b_1a_{22} - b_2a_{12} \neq 0$

$P = \theta$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ > **determinant matice sústavy**

$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$ $\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$

Veta (Cramerova)

Ak sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi má determinant $D \neq 0$, tak má jediné riešenie $[x_1, x_2]$; $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}$.

Pr.

Riešte v $R \times R$:

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$ $\quad D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - (-3).1 = 7$

$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 5.2 - (-3).6 = 28$ $\qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - 5.1 = 7$

$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{28}{7} = 4$ $\qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{7}{7} = 1$

$P = \{[4,1]\}$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 3x_1 + 9x_2 &= 25 \\ &\vdots \\ 0x_1 + 0x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 25 \end{array}\right) \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1.9 - 3.3 = 0$$

$$P = \theta$$

- pre sústavu troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi to bude vyzerať podobne

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \quad \Big|.(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \quad \Big|.(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \quad \Big|.(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \end{aligned}$$

- po úprave dostaneme:

$$\underbrace{\left[(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33})\right]}_{D}.x_1 = D_1$$

$$D.x_1 = D$$

$D = 0$: ∞, θ

$D \neq 0$: $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, x_3 = \dfrac{D_3}{D}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

> determinant matice sústavy

Pr.

Riešte v R^3:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ -x + y + 2z &= 5 \\ 2x - y + z &= 13 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 13 \end{array}\right)$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+4+1) - (2-2-1) = 7 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} ´6 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 13 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 21$$

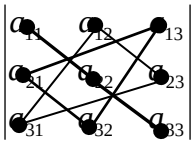
$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 13 & 1 \end{vmatrix} = -14 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 13 \end{vmatrix} = 35$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3, x_2 = \frac{D_2}{D} = -2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 5 \qquad P = \{[3,-2,5]\}$$

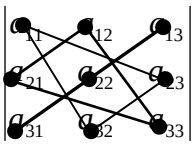
<u>Veta</u> (Cramerova)

Ak má sústava troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi determinant $D \neq 0$, tak má jediné riešenie $[x_1, x_2, x_3]$; $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$.

- výpočet determinantu 3. stupňa sa nazýva **sarussovo pravidlo**



-spravíme súčin spojených členov a priradíme im znamienko „+“



-spravíme súčin spojených členov a priradíme im znamienko „-“

- a dostaneme výsledok:

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

- Cramerovu vetu môžeme aj zovšeobecniť:

<u>Veta</u>

Ak sústava n lineárnych rocníc s n neznámymi má determinant $D \neq 0$, taj má jediné riešenie $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$; $x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1,2,\ldots,n$.

<u>Def.</u>

Inverziou v permutácii množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ nazývame situáciu, keď je väčšie číslo pred menším.

<u>Pr.</u>

Majme člen $a_{14}a_{52}a_{31}a_{23}a_{45}$, keďže násobenie je komutatívne, tak ho môžeme preusporiadať. $a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52}$ tu sú prvé indexy usporiadané vzostupne, tak si budeme všímať poradie druhých indexov: $4,3,1,5,2$, tu hneď vidieť, že inverzií je 6 (pred 2 je 3, 4, 5 to sú 3; pred 5 nieje žiadne väčšie, čiže 0; pred 1 je 3 a 4 to máme ďalšie 2 a na koniec pred 3 je 4 to je 1; z toho 3+0+2+1 je 6 inverzií).

- vďaka tomuto poznatku si môžeme definovať determinant všeobecne, čiže determinant n-tého stupňa

<u>Def.</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{df}{=} \sum (-1)^p . a_{1i_1} . a_{2i_2} . a_{3i_3} . \cdots . a_{ni_n}$$

, kde p je počet inverzií druhých indexov.

<u>Veta</u> (vlastnosti determinantov)

1. ak v matici vymeníme dva riadky, determinant zmení znamienko
2. ak v matici sú dva riadky rovnaké, $D = 0$
3. ak v matici vynásobíme jeden riadok číslom $c \in R; c \neq 0$, tak $D' = c.D$
4. ak k ľubovoľnému riadku pripočítame lineárnu kombináciu ostatných, determinant sa nezmení

5. ak matica $A = (a_{ij})$ je štvorcová matica stupňa n, tak determinant matice $|A|$ môžeme rozvinúť podľa i-teho riadku takto: $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}.a_{ij}.|A_{ij}|$, kde A_{ij} je algebraický doplnok prvku a_{ij} v matici A. Tento algebraický doplnok je vlastne matica stupňa $n-1$, ktorá vznikne tak, že v matici A vynecháme i-ty riadok a j-ty stĺpec (a index i je konštantný, lebo rozvíjame determinant podľa i-teho riadku).

(maticu môžeme rozvinúť aj podľa stĺpca, podobne ako podľa riadku, len index j je konštantný)

- pomocou týchto vlastností môžeme vypočítať aj determinanty vyšších stupňov ako stupňa tretieho, oveľa rýchlejšie ako univerzálnym postupom, ktorým sčítavame (odčítavame) súčiny prvkov

<u>Pr.</u>

Vypočítajte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- ako už bolo spomenuté pri výpočte využijeme vlastnosti determinantov, v tomto príklade si ukážeme postup, pri ktorom determinant upravíme tak, aby matica bola v trojuholníkovom tvare

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}.(-2).2.2.(-12) = 48$$

- tento postup využíva vlastnosti 1.-4., teraz si ukážeme postup, ktorý je založená na vlastnosti 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.1.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.1.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+4}.3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [(1+3+3)-(1+9+1)] - [(1+9+1)-(3+3+1)] +$$

$$+ [(3+1+3)-(9+1+1)] - 3.[(3+3+3)-(27+1+1)] = -4-4-4-3.(-20) = 48$$

- ako vidno, determinant sme rozvinuli podľa 1. riadku

- ďalej môžeme mať **sústavy nelineárnych rovníc** a **sústavy s parametrami**

- **<u>sústava nelineárnych rovníc</u>**

  - je to sústava, v ktorej aspoň jedna rovnica nieje lineárna
  - pri jej riešení <u>používame</u> **sčítaciu** a **dosadzovaciu metódu**
    (**pozor !** matice ani determinanty <u>nemôžme</u> použiť)

<u>Pr.</u>

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 14 \\ x \ - y &= 2 \\ \hline x^2 - y - 14 &= 0 \\ x &= y + 2 \\ \hline (x-4).(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 4 \vee x = -3$

$x = 4 \ldots y = 2 \ldots [4,2]$

$x = -3 \ldots y = -5 \ldots [-3,-5]$

$P = \{[4,2];[-3,-5]\}$

- **<u>sústava rovníc s parametrom</u>**

  - je to sústava, v ktorej sú rovnice s parametrom (*tento pojem je vysvetlený v nasledujúcej kapitole*)
  - môžme použiť všetky metódy riešenia

<u>Pr.</u>

a)
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ px - 8y &= 2p \\ \hline -6x + 8y &= -12 \\ px - 8y &= 2p \\ \hline px - 6x &= 2p - 12 \end{aligned}$$

$x.(p-6) = 2.(p-6) \quad \Big| .\frac{1}{p-6}$

$p - 6 = 0$ $\qquad$ $p - 6 \neq 0$

$p = 6$ $\qquad$ $p \neq 6$

$3x - 4y = 6$ $\qquad$ $x = 2$

$6x - 8y = 12$ $\qquad$ $y = 0$

$3x - 4y = 6$

$y = \frac{3x-6}{4}$

$p = 6 \ldots P_6 = \{[x, \frac{3x-6}{4}]; x \in R\}$

$p \neq 6 \ldots P = \{[2,0]\}$

b)
$$\begin{aligned} x - y - az &= -1 \\ ax + y - z &= 1 \\ x + ay - z &= 1 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (-1 - a^3 + 1) - (-a - a + a) = -a^3 + a =$$

$$= a.(1-a).(1+a)$$

- máme dve možnosti: 1. $D = 0 \ldots$ 0 alebo nekonečne veľa riešení (sústava je singulárna)
  2. $D \neq 0 \ldots$ 1 riešenie, použijeme Cramerovu vetu (je regulárna)

1. $D = 0$ $\qquad$ $a.(1-a).(1+a) = 0$

$a = 0 \vee a = 1 \vee a = -1$

$a = 0 \ldots$
$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ y - z &= 1 \\ x - z &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y &= -1 \\ y - z &= 1 \\ -x + z &= -1 \\ \hline 0x + 0y + 0z &= -1 \end{aligned} \qquad P_0 = \theta$$

$a=1\ldots$

$$\begin{aligned} x-y-z&=-1\\ x+y-z&=1\\ x+y-z&=1\\ \hline x-y-z&=-1\\ x+y-z&=1\\ \hline \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-y-z&=-1\\ -x-y+z&=-1\\ \hline -2y&=-2\\ y&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-z&=0\\ x+z&=0\\ \hline x&=z\\ P_1&=\{[x,1,x];x\in R\} \end{aligned}$$

$a=-1\ldots$

$$\begin{aligned} x-y+z&=-1\\ -x+y-z&=1\\ x-y-z&=1\\ \hline x-y+z&=-1\\ x-y-z&=1\\ \hline \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x+y-z&=1\\ x-y-z&=1\\ \hline -2z&=2\\ z&=-1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-y&=0\\ x&=y\\ P_{-1}&=\{[x,x,-1];x\in R\} \end{aligned}$$

2. $D\neq 0$

$$D=a.(1-a).(1+a)$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-1&-1&-a\\1&1&-1\\1&a&-1\end{vmatrix}=(1-a^2+1)-(-a+a+1)=1-a^2=(1-a).(1+a)$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-1&-a\\a&1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=(-1-a^2+1)-(-a-1+a)=-a^2+1=(1-a).(1+a)$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\a&1&1\\1&a&1\end{vmatrix}=(1-a^2-1)-(-1+a-a)=1-a^2=(1-a).(1+a)$$

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{a}\qquad y=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{a}\qquad z=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{a}\qquad P=\{[\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{a}];a\in R-\{0,\pm1\}\}$$

$a=0\ldots P_0=\theta$

$a=1\ldots P_1=\{[x,1,x];x\in R\}$

$a=-1\ldots P_{-1}=\{[x,x,-1];x\in R\}$

$a\neq 0\wedge a\neq\pm1\ldots P=\{[\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{a}]\}$

Cvičenia

1. Zostrojte graf oboru pravdivosti:

a) $2x+2y+5=0$ b) $x+3y-1=0$ c) $4x+4y+6=0$ d) $2y+3=0$ e) $x-2=0$

2. Zostrojte graf oboru pravdivosti:

a) $4x+y+2\leq 0$ b) $3x+y<5$ c) $y>3x$

3. Riešte v R^2:

a) $\begin{aligned}(x-1)(y+4)&=(x+3)(y-1)\\(x-2)(y+2)&=x.(y-2)\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}(x-y)^2-(x+y)^2&=2x(1-2y)-y\\(x-y)(x+y)-2y(x-1)&=(x-y)^2+4x-2y^2\end{aligned}$

4. Riešte v R^2:

a) $\begin{aligned}x+3y&=8\\2x-5y&\le 5\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}4x-y&\le 8\\x+2y&\le 11\\2x+y&>7\end{aligned}$

c) $\begin{aligned}2x-5y&\le 7\\2x+3y&\ge 4\\x+2y&\le 9\end{aligned}$

5. Riešte v R^3:

a) $\begin{aligned}x+y+z&=6\\-x+y+2z&=5\\2x-y+z&=13\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}x+y+z&=3\\x+2y+3z&=4\\x+3y+5z&=7\end{aligned}$

c) $\begin{aligned}x-y-z&=5\\-x+y-z&=1\\-x-y+z&=15\end{aligned}$

d) $\begin{aligned}3x+y-4z&=12\\x-2y+z&=12\\x+5y-6z&=-12\end{aligned}$

6. Vynásobte matice:

a) $A=\begin{pmatrix}1&-3&0&4\\2&-2&1&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\-3&-1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-3&4&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&3&-2&6\\2&-2&-1&5\\3&4&2&-1\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

7. Zistite hodnosť matice:

a) $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\1&-1&0&2\\1&0&2&-1\\-1&1&0&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix}$

8. Riešte v R^2:

a) $\begin{aligned}x+2y&=14\\x^2+4y^2&=100\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}x^2+y^2&=100\\xy&=48\end{aligned}$

c) $\begin{aligned}\frac{3}{x}-\frac{4}{y}&=1\\\frac{2}{x}-\frac{5}{y}&=\frac{31}{12}\end{aligned}$

9. Riešte v R^3:

a) $\begin{aligned}xy+xz&=7\\xy+yz&=15\\yz+xz&=16\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}x^2+xy-xz&=2\\y^2+xy-yz&=3\\z^2-yz-xz&=4\end{aligned}$

Neriešené úlohy

1. Riešte Gaussovou eliminačnou metódou:

a) $\begin{aligned} x+y+z&=6\\ -x+y+2z&=5\\ 2x-y+z&=13 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x+3y+z+t&=2\\ x+y-z-t&=-1\\ x-y+2z+t&=3\\ 3x+5y+z+2t&=0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y+z+t&=5\\ x+z+t&=0\\ x+y+t&=-8\\ x+y+z&=4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x-2y+3z-t&=0\\ 3x-y+z+t&=1\\ x+8y-13z+7t&=2 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x_1+2x_2+8x_3&=9\\ 2x_1+x_2+7x_3&=6\\ 3x_1+x_2+9x_3&=7\\ 2x_1-x_2+x_3&=-2 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=5\\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4&=11\\ x_1+3x_2+5x_3+3x_4&=17\\ 2x_1+3x_2+4x_3+3x_4&=6 \end{aligned}$

2. Riešte pomocou determinantov:

a) $\begin{aligned} 2x-y+z&=5\\ 3x+2y-3z&=0\\ x+y+5z&=25 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x-y+3z&=9\\ 3x-5y+z&=-4\\ 4x-7y+z&=5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x-3y+5z&=1\\ 4x-2y+z&=7\\ 3x+y-z&=6 \end{aligned}$

3. Riešte sústavy s parametrami:

a) $\begin{aligned} px+y&=p\\ x+py&=1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} bx+y&=b\\ x+y&=4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} px+y&=p\\ (p+2)x+py&=4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x-4y&=6\\ px-8y&=2p \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x-y-pz&=-1\\ px+y-z&=1\\ x+py-z&=1 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x+py&=p\\ x-z&=p\\ x+y&=1 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x+y+z&=p\\ x-py&=p\\ x+pz&=p \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 3x-y+3z&=a\\ -2x+3y-z&=b\\ -x-2y+3z&=c \end{aligned}$

4. Je daná sústava rovníc $x+y-7=0 \wedge ax+2y+b=0$**. Nájdite také** $a,b\in R$**, aby sústava mala:**

a) práve jedno riešenie
b) žiadne riešenie
c) nekonečne veľa riešení

5. Pre ktoré $a\in R$ **sa súčet koreňov sústavy,** $ax-2y=3 \wedge 2x+3y=4$**, rovná 5?**

6. Pre ktoré $a\in R$ **je jeden koreň sústavy,** $2x+5y=21 \wedge 3x-2y=a$**, o 5 väčší ako druhý?**

7. Pre ktoré hodnoty parametra $a\in R$ **má sústava,** $(a+1)x-ay=4 \wedge 3x-5y=a$**, riešenie spĺňajúce podmienku** $x-y<2$**?**

8. Nájdite všetky hodnoty parametra $c\in R$**, pre ktoré nemá riešenie sústava:**

$$\begin{aligned} -4x+cy&=1+c\\ (6+c)x+2y&=3+c \end{aligned}$$

9. Riešte sústavy:

a) $\begin{aligned} x(y+z)&=5 \\ y(x+z)&=10 \\ z(x+y)&=13 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x(y+z-x)&=2 \\ y(x+z-y)&=3 \\ z(x+y-z)&=4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x+y+2z&=30 \\ 2x+3y+z&=30 \\ x+2y+3z&=30 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x(y+z)&=1 \\ y(x+z)&=1 \\ z(x+y)&=p,\ p\in R \end{aligned}$

10. Riešte graficky:

a) $\begin{aligned} 4x-y&\le 8 \\ x+2y&\le 11 \\ 2x+y&>7 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x+3y&\ge 7 \\ x-y&\le 11 \\ 2y&\le 3-5x \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x-5y&\le 7 \\ 2x+3y&\ge 4 \\ x+2y&<9 \end{aligned}$

11. Riešte v R^2:

a) $\begin{aligned} x-y&=4 \\ 2x^2-3y^2-5x-2y&=26 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}&=2 \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}&=7 \end{aligned}$

12. Riešte v R^2:

a) $\begin{aligned} 3x+ay&=a \\ x-y&=1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} mx+y&=m \\ x+my&=1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} bx+y&=b \\ x+y&=4 \end{aligned}$

6. ROVNICE A NEROVNICE

1. Operácie a vzťahy v množine R, výrokové formy

2. Rovnica s jednou neznámou
- pojem rovnice, úprava rovnice, dôsledkové a ekvivalentné úpravy
- konkrétne typy úprav, skúška správnosti

3. Nerovnica s jednou neznámou
- pojem nerovnice, úprava nerovnice, dôsledkové a ekvivalentné úpravy
- konkrétne typy úprav, skúška správnosti

4. Druhy rovníc a nerovníc
- algebrické rovnice a nerovnice
  - lineárna
  - kvadratická
  - kubická rovnica
- nealgebrické rovnice a nerovnice
  - v súčinovom a podielovom tvare
  - s neznámou v absolútnej hodnote
  - s neznámou v menovateli
  - rovnice s neznámou v odmocnenci

5. Rovnice a nerovnice s parametrom
- pojem rovnice a nerovnice s parametrom
- myšlienka riešenia

6. Riešenie rovníc substitúciou

.....

- **<u>operácie a vzťahy v množine R</u>**

<u>Veta</u>

$\forall a,b,c \in R:$

1.	$a+b \in R$	$a.b \in R$	$a-b \in R$	$a:b \in R; b \neq 0$	(U)
2.	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$	*	*	(K)
3.	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).c=a.(b.c)$	*	*	(A)
4.	$a+0=0+a=a$	$a.1=1.a=a$	*	*	(N)
5.	$a.(b+c)=ab+ac$	$a.(b-c)=ab-ac$	*		(D)

U…Veta o **uzavretosti** oboru R
K… Veta o **komutatívnosti**
A… Veta o **asociatívnosti**
N… Veta o **neutrálnosti 0** resp. **1** vzhľadom na sčítanie resp. násobenie
D… Veta o **distributívnosti** násobenia vzhľadom na sčítanie resp. násobenie

- v množine R (reálnych čísel) sú definované **dva vzťahy**:

rovnosť … $=$
menší (väčší) … $<$ $(>)$

<u>Veta</u>

$\forall a,b \in R: a<b \vee a=b \vee a>b$

Veta

$\forall a,b \in R:$

1. $a = a$ * (R)
2. $a = b \Rightarrow b = a$ * (S)
3. $(a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c$ $(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$ (T)

R… Veta o **reflexívnosti**
S… Veta o **symetrickosti**
T… Veta o **tranzitívnosti**

Veta

$\forall a,b,c \in R:$

1. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
2. $a = b \Rightarrow ac = bc$
3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
4. a) $(a < b \wedge 0 < c) \Rightarrow ac < bc$
   b) $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$
5. $a = b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$
6. $0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

- pomocou týchto vlastností sa dajú dokazovať rôzne tvrdenia

Pr.

Dokážte, že platí:

$\forall a,b \in R: a = b \Rightarrow a^2 = b^2$

- vychádzajme z predpokladu $a = b$

$a = b \wedge a = b$ (prvú rovnosť môžeme vynásobiť a a vzťah sa nezmení, tak isto druhú b)

$a^2 = ab \wedge ab = b^2$

- z vety o tranzitívnosti je zrejmé $a^2 = b^2$

- výrokové formy

Def.

Premenná je symbol, ktorým označujeme ľubovoľný prvok istej množiny.

Výroková premenná - symbol, za ktorý dosádzame výroky (zvyčajne A, B, C,…)
Číselná premenná - symbol, za ktorý dosádzame čísla (zvyčajne a, b, c,…)

- v matematike sa používajú tri druhy zápisov s číselnými premennými:
  1. **výrazy** napr.: $7x - 5$
  2. **kvantifikované výroky** napr.: $\forall x \in R: 7x - 5 \geq 2$
  3. **výrokové formy** napr.: $\exists x \in R: 7x - 5 \geq 2$ alebo $\forall x \in R: 7x = 2$

- výrokové premenné sa používajú na zápis výroku do výrokovej formuly napr.: $(A \wedge B) \Leftrightarrow C$

Def.

Výroková forma s jednou premennou je zápis obsahujúci číselnú premennú, ktorý nieje výrok, ale po dosadení za premennú z neho vznikne výrok. Buď pravdivý alebo nepravdivý.

$A(x) \ldots 2x - 3 < 7$ $A(1) \ldots 2.1 - 3 < 7 \ldots p$ ale $A(6) \ldots 2.6 - 3 < 7 \ldots n$

- každej výrokovej forme priraďujeme <u>tri množiny</u>:

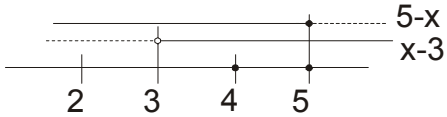
1. O - **obor premennej** - je to množina všetkých prvkov, ktoré chceme za premennú dosádzať
2. D - **definičný obor** - je to množina všetkých prvkov, pre ktoré z výrokovej formy vznikne výrok ktorý má zmysel
3. P - **obor pravdivosti** - je to množina všetkých prvkov, pre ktoré z výrokovej formy vznikne pravdivý výrok

<u>Pr.</u>

Určite O, D, P:

$$V(x)\ldots \frac{5-x}{x-3} \geq 0; x \in N$$

- hneď vidno, že $O = N$
- zlomok má zmysel v každom $x \in N$ okrem 3, keďže nulou nemožno deliť, z toho máme $D = N - \{3\}$
- pomocou metódy nulových bodov, o ktorej si povieme v tejto kapitole, ľahko určíme P



$P = \{4,5\}$

- <u>rovnica s jednou neznámou</u>

- **neznáma** - premenná v rovnici alebo nerovnici

<u>Def.</u>

Rovnica s jednou neznámou $x \in R$ je každá výroková forma tvaru $l(x) = p(x)$, kde $l(x), p(x)$ sú výrazy.

<u>Def.</u>

Riešiť rovnicu znamená určovať jej obor pravdivosti P, podľa možnosti vymenovaním prvkov. Prvky P sa nazývajú **korene rovnice**.

<u>Pr.</u>

$2x + 3 = 5 \qquad 2x = 2 \qquad x = 1 \qquad P = \{1\}$

<u>Def.</u>

Upraviť rovnicu znamená nahradiť ju inou.

<u>Pr.</u>

1. - majme rovnicu $2x + 3 = 5$ vieme, že $P_1 = \{1\}$
   - ak ju upravíme takto $4x + 6 = 11$, tak $P_2 = \{\frac{5}{4}\}$
   - je zrejmé, že $P_1 \neq P_2$, to znamená, že pri riešení rovnice nemôžeme rovnicu upravovať len tak, ale musíme dodržiavať určité pravidlá
2. - zoberme si rovnicu $x - 1 = 0$, jej obor pravdivosti je $P_1 = \{1\}$
   - ak ju upravíme takto $x = 1$, tak obor pravdivosti sa nezmení a je tiež $P_2 = \{1\}$
   - vidíme, že $P_1 = P_2$, to znamená, že takúto úpravu môžeme použiť (tento typ úpravy, pri ktorom sa obor pravdivosti nezmení budeme nazývať **ekvivalentná úprava rovnice**)

3. - ak tú istú rovnicu $x-1=0$, jej obor pravdivosti je $P_1=\{1\}$ upravíme inak, napríklad takto $x(x-1)=0$, tak $P_2=\{0,1\}$
   - vidíme, že $P_1 \subset P_2$, to znamená, že takúto úpravu môžeme použiť, ale pribudnú nám niektoré korene a s využitím skúšky správnosti ich vylúčime (tento typ úpravy, pri ktorom sa obor pravdivosti rozšíri budeme nazývať **dôsledková úprava rovnice**)
4. - poslednou možnosťou je $P_1 \supset P_2$, to znamená, že takouto úpravou niektoré korene stratíme a tu nám nepomôže ani skúška správnosti, takže tieto úpravy <u>nepoužívame</u>
   napr.: $x^2=x \ldots P_1=\{0,1\}$, ale po úprave $x=1 \ldots P_2=\{1\}$

<u>Def.</u>

Ekvivalentná úprava rovnice $l_1(x)=p_1(x) \ldots P_1$ je jej nahradenie rovnicou $l_2(x)=p_2(x) \ldots P_2$ a platí $P_1=P_2$. (EUR)

<u>Def.</u>

Dôsledková (implikačná) úprava rovnice $l_1(x)=p_1(x) \ldots P_1$ je jej nahradenie rovnicou $l_2(x)=p_2(x) \ldots P_2$ a platí $P_1 \subset P_2$. (DUR)

<u>Zoznam úprav</u>

EUR1 … výmena strán rovnice
EUR2 … nahradenie ľubovoľnej strany rovnice výrazom, ktorý sa mu v definičnom obore rovnice rovná
EUR3 … pripočítanie rovnakého výrazu k obom stranám rovnice
DUR4a … vynásobenie oboch strán rovnice, tým istým výrazom, definovaným v definičnom obore rovnice
EUR4b … vynásobenie oboch strán rovnice, tým istým nenulovým výrazom, definovaným v definičnom obore rovnice
DUR5a … umocnenie oboch strán rovnice
EUR5b … umocnenie oboch strán rovnice, ak sú nezáporné
EUR6 … odmocnenie oboch strán rovnice, ak sú nezáporné

<u>Def.</u>

Skúška správnosti je spätné dosadenie získaných koreňov do pôvodnej rovnice a overenie pravdivosti vzniknutého výroku.
- využíva sa pri dôsledkových úpravách

<u>Pr.</u>

Riešte v R:

a)

$x^2-4=(x+1)^2$ … EUR2

$x^2-4=x^2+2x+1 \quad |-x^2$ … EUR3

$-4=2x+1$ … EUR1

$2x+1=-4 \quad |-1$ … EUR3

$2x=-5 \quad |\cdot\frac{1}{2}$ … EUR4b

$x=-\frac{5}{2}$

$P=\{-\frac{5}{2}\}$

b)

$\sqrt{x^2+3}=x-1 \quad |^2$ … DUR5a

$x^2+3=(x-1)^2$ … EUR2

$x^2+3=x^2-2x+1 \quad |-x^2$ … EUR3

$3=-2x+1 \quad |+2x-3$ … EUR3

$2x=-2 \quad |\cdot\frac{1}{2}$ … EUR4b

$x=-1$

SKÚŠKA:

$l(-1)=\sqrt{(-1)^2+3}=2$

$p(-1)=-1-1=-2$

$l(-1)\neq p(-1) \Rightarrow -1\notin P \quad P=\theta$

- <u>nerovnica s jednou neznámou</u>

<u>Def.</u>

Nerovnica s jednou neznámou $x \in R$ je každá výroková forma tvaru $l(x)\ N\ p(x)$, kde $l(x), p(x)$ sú výrazy a N je niektorý zo znakov $<, >, \leq, \geq$.

<u>Def.</u>

Riešiť nerovnicu znamená určovať jej obor pravdivosti.

<u>Def.</u>

Upraviť nerovnicu znamená nahradiť ju inou.

- keďže obor pravdivosti nerovnice je spravidla nekonečná množina, pri riešení nerovníc sa vyhýbame dôsledkovým úpravám a robíme iba ekvivalentné úpravy

<u>Zoznam úprav</u>

EUN1 … výmena strán nerovnice a otočenie znaku nerovnosti
EUN2 … nahradenie ľubovoľnej strany nerovnice výrazom, ktorý sa mu v definičnom obore rovnice rovná
EUN3 … pripočítanie rovnakého výrazu, definovaného v definičnom obore nerovnice, k obom stranám nerovnice
EUN4a … vynásobenie oboch strán nerovnice výrazom, ktorý je v definičnom obore nerovnice kladný
EUN4b … vynásobenie oboch strán nerovnice výrazom, ktorý je v definičnom obore nerovnice záporný a otočenie znaku nerovnosti
(*nerovnice nebudeme násobiť výrazom, ktorý môže nadobúdať kladné aj záporné hodnoty*)
EUN5 … umocnenie oboch strán nerovnice, ak sú nezáporné
EUN6 … odmocnenie oboch strán nerovnice, ak sú nezáporné

<u>Pr.</u>

Riešte v R:

$3x - 1 \leq 3(2 - x) + 7(x - 1)$ … EUN2

$3x - 1 \leq 6 - 3x + 7x - 7$ … EUN2

$3x - 1 \leq 4x - 1 \ \big|\, - 3x + 1$ … EUN3

$0 \leq x$

$P = R_0^+$

- <u>lineárna rovnica a nerovnica</u>

$3x - 2 = 2 - x$ … lineárna $\qquad (x-1)^2 = x^2 + 4$ … lineárna

$(x-1)^2 = 2x^2 + 1$ … nie je lineárna

- majme rovnicu v tvare $l(x) = p(x)$, ak ju upravíme na tvar $l(x) - p(x) = 0$, budeme hovoriť, že rovnica je v **anulovanom tvare**

<u>Def.</u>

Lineárna rovnica s jednou neznámou $x \in R$ je každá rovnica tvaru $l(x) = p(x)$, kde $l(x) - p(x)$ je mnohočlen najviac 1. stupňa (lineárny dvojčlen).

- každú lineárnu rovnicu možno ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar $ax + b = 0; a, b \in R$, tento tvar sa nazýva **základný tvar lineárnej rovnice**

<u>Pr.</u>

a) $2x = -6 \quad P = \{-3\}$ b) $2x = 0 \quad P = \{0\}$ c) $0x = -6 \quad P = \theta$ d) $0x = 0 \quad P = R$

Def.

Lineárna nerovnica s jednou neznámou $x \in R$ je každá nerovnica tvaru $l(x)\ N\ p(x)$, kde $l(x) - p(x)$ je mnohočlen najviac 1. stupňa (lineárny dvojčlen) a N je niektorý zo znakov $<, >, \leq, \geq$.

Pr.

a) $2x + 6 < 0$, $2x < -6$, $x < -3$, $P = (-\infty, -3)$

b) $2x \geq 0$, $2x \geq 0$, $x \geq 0$, $P = R_0^+$

c) $0x + 0 \leq 0$, $0x \leq 0$, $P = R$

d) $0x + 0 > 0$, $0x > 0$, $P = \theta$

e) $0x + 1 < 0$, $0x < -1$, $P = \theta$

f) $0x + 2 \geq 0$, $0x \geq -2$, $P = R$

- metóda nulových bodov

- používame ju hlavne pri riešení nerovníc (v súčinovom, podielovom tvare; kvadratických nerovníc)
- pri tejto metóde upravíme nerovnicu na tvar, z ktorého vieme jednoducho určiť kde sú jednotlivé výrazy nerovnice kladné a kde záporné a potom podľa znamienkových pravidiel určíme kde je celá nerovnica kladná resp. záporná (vlastnosť, že nulový bod patrí do intervalu, značíme plným krúžkom a ak nepatrí, tak prázdnym krúžkom)

Pr.

Ukážeme si pár príkladov nerovníc, ktoré budeme riešiť metódou nulových bodov (*ak čitateľ nepozná niektoré typy nerovníc, dočíta sa u nich ďalej v tejto kapitole*)

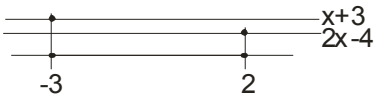
$(2x - 4)(x + 3) \leq 0$

- ako vidno, tak z tejto nerovnice ľahko určíme, že nulový bod výrazu $2x - 4$ bude 2 a výrazu $x + 3$ bude -3
- tieto hodnoty dostaneme jednoduchým výpočtom:

$2x - 4 = 0$, $2x = 4$, $x = 2$

$x + 3 = 0$, $x = -3$

- zistili sme nulové body jednotlivých výrazov, tak si na číselnej osi znázorníme naše hodnoty:



- obor R sa nám rozpadol na tri intervaly, aby bola nerovnica na niektorom z nich záporná, tak jeden výraz musí byť na tom intervale záporný a druhý kladný, ako z obrázku vyplýva, tak takýto interval je jedine $\langle -3, 2 \rangle$

A máme riešenie našej nerovnice $(2x - 4)(x + 3) \leq 0$ je to interval $\langle -3, 2 \rangle$

$P = \langle -3, 2 \rangle$

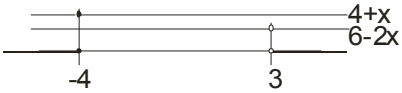
Pr.

Riešte v R:

a) $\dfrac{(4 + x)}{(6 - 2x)} \leq 0$

$4 + x = 0$, $x = -4$

$6 - 2x = 0$, $2x = 6$, $x = 3$



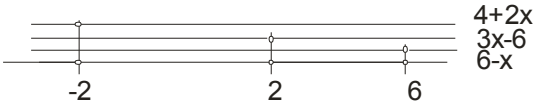
$P = (-\infty, -4\rangle \cup (3, \infty)$

b) $(6-x)(4+2x)(3x-6)>0$

- metóda nulových bodov je hlavne výhodná pri nerovniciach, kde viac výrazov (je oveľa rýchlejším riešením, ako keby sme používali, pravidlá pre riešenie nerovníc, ktoré sú uvedené ďalej; museli by sme vyriešiť viacero kombinácii napr. prvý výraz kladný a ostatné dva záporné, atď.)

$6-x=0 \qquad 4+2x=0 \qquad 3x-6=0$

$x=6 \qquad x=-2 \qquad x=2$



$P=(-\infty,-2)\cup(2,6)$

- <u>kvadratická rovnica a nerovnica</u>

<u>Def.</u>

Kvadratická rovnica s jednou neznámou $x\in R$ je každá rovnica tvaru $l(x)=p(x)$, kde $l(x)-p(x)$ je mnohočlen 2. stupňa (kvadratický trojčlen).

- každú kvadratickú rovnicu možno ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar $ax^2+bx+c=0$; $a,b,c\in R, a\neq 0$, tento tvar sa nazýva **anulovaný (základný) tvar kvadratickej rovnice**

<u>Pr.</u>

Riešte v R: (rovnice budeme dopĺňať, tak aby sme mohli použiť vzorec pre $(a+b)^2$)

a) $x^2+4x-5=0$

$x^2+2.2x+4-4-5=0$

$(x+2)^2-3^2=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x-1=0 \vee x+5=0$

$x=1 \qquad x=-5$

$P=\{-5,1\}$

b) $x^2+4x=(2x+1)^2$

$x^2+4x=4x^2+4x+1$

$3x^2+1=0$

$3x^2=-1$

$x^2=-\frac{1}{3}$

$P=\theta$

- skúsme upraviť kvadratickú rovnicu v základnom tvare ekvivalentnými úpravami:

$ax^2+bx+c=0 \;\big|\; .4a$

$4a^2x^2+4abx+4ac=0$

$(2ax)^2+2(2ax)b+b^2-b^2+4ac=0$

$(2ax+b)^2=b^2-4ac$

- označme $D=b^2-4ac$; tento výraz, vzniknutý z kvadratickej rovnice, budeme nazývať **diskriminat kvadratickej rovnice** $ax^2+bx+c=0$

$(2ax+b)^2=D$

$D<0$	$D=0$	$D>0$
$P=\theta$	$(2ax+b)^2=0$	$(2ax+b)^2-D=0$
	$2ax+b=0$	$(2ax+b)^2-\sqrt{D}^2=0$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$\left(2ax + b + \sqrt{D}\right)\left(2ax + b - \sqrt{D}\right) = 0$$

$$2ax + b + \sqrt{D} = 0 \ldots \ x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$2ax + b - \sqrt{D} = 0 \ldots \ x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Veta

Pre každú kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in R, a \neq 0$ s diskriminantom $D = b^2 - 4ac$ platí:

1. $D > 0 \ldots P = \left\{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\right\}$
2. $D = 0 \ldots P = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$ (dvojnásobný koreň)
3. $D < 0 \ldots P = \theta$

Pr.

Riešte v R:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac 25 - 4.2.(-3) =$

$= 25 + 24 = 49 > 0$

$\sqrt{D} = 7$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm 7}{4}$

$x_1 = \frac{1}{2}$ $\quad x_2 = -3$

$P = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$

b) $(x-4)(4x-3) + 3 = 0$

$4x^2 - 16x - 3x + 12 + 3 = 0$

$4x^2 - 19x + 15 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 361 - 4.4.15 = 121$

$\sqrt{D} = 11$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{19 \pm 11}{8}$

$x_1 = \frac{15}{4}$ $\quad x_2 = 1$

$P = \left\{1, \frac{15}{4}\right\}$

- ďalej poďme skúmať **vzťahy medzi koreňmi a koeficientmi kvadratickej rovnice**; zoberme si napr. rovnicu $x^2 - 6x + 5 = 0$, pomocou diskriminantu zistíme, že $x_1 = 1$ a $x_2 = 5$
  - teraz upravme rovnicu pomocou dopĺňania na rozložiteľný kvadratický trojčlen:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 2^2 = (x-1)(x-5)$$

  - vidíme, že keď sme rovnicu rozložili na súčin dvoch lineárnych dvojčlenov, tak sa v nich nachádzajú korene rovnice, to nás inšpiruje k nasledovnému tvrdeniu:

Veta

Kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in R, a \neq 0$ má koreň x_1 práve vtedy, keď $ax^2 + bx + c = (x - x_1).q(x)$, kde $q(x) = a(x + x_1) + b$

Dôkaz

1. $ax^2 + bx + c = 0$ má koreň $x_1 \Rightarrow ax^2 + bx + c = (x - x_1).q(x)$

   $ax^2 + bx + c = 0$ má koreň x_1

   $a{x_1}^2 + bx_1 + c = 0$ platí

$$ax^2+bx+c=ax^2+bx+c-0=ax^2+bx+c-\left(ax_1^{\ 2}+bx_1+c\right)=$$
$$=a\left(x^2-x_1^{\ 2}\right)+b\left(x-x_1\right)+\left(c-c\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x+x_1\right)+b\left(x-x_1\right)=$$
$$=\left(x-x_1\right)\left[a\left(x+x_1\right)+b\right]=\left(x-x_1\right).q\left(x\right)$$

2. $ax^2+bx+c=\left(x-x_1\right).q\left(x\right) \Rightarrow x_1$ je koreň $ax^2+bx+c=0$

$$ax^2+bx+c=\left(x-x_1\right).q\left(x\right)$$
$$ax_1^{\ 2}+bx_1+c=\left(x_1-x_1\right).q\left(x\right)=0$$

x_1 je koreň

$ax^2+bx+c=0$ má koreň $x_1 \Leftrightarrow ax^2+bx+c=\left(x-x_1\right).q\left(x\right)$ platí

Veta

Ak číslo x_1 je koreňom rovnice $ax^2+bx+c=0; a,b,c\in R, a\neq 0$, tak lineárny dvojčlen $x-x_1$ sa nazýva koreňový činiteľ.

- majme rovnicu $ax^2+bx+c=0$ ak x_1 je koreň, tak $ax^2+bx+c=\left(x-x_1\right).q\left(x\right)$ a ak x_2 je koreň, tak $ax^2+bx+c=\left(x-x_1\right).q\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).a$

Veta

Kvadratická rovnica $ax^2+bx+c=0$ má korene x_1, x_2 práve vtedy, keď
$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

- ak by mala len koreň x_1, tak je to dvojnásobný koreň a platí $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_1\right)$

Pr.

Rozložte na súčin:

$$2x^2-3x+1=0$$
$$D=b^2-4ac=1$$
$$\sqrt{D}=1$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{3\pm 1}{4}$$
$$x_1=1 \qquad x_2=\tfrac{1}{2}$$

$$2x^2-3x+1=2\left(x-1\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)$$

Pr.

Určite rovnicu, ktorej korene sú:

$x_1=2, x_2=-7$

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=0$$
$$\left(x-2\right)\left(x+7\right)=0$$
$$x^2+5x-14=0$$

Pr.

Zjednodušte:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$$

$$x^2+x-6=0 \quad D=25 \quad \sqrt{D}=5 \quad x_1=2 \quad x_2=-3$$
$$x^2+4x+3=0 \quad D=4 \quad \sqrt{D}=2 \quad x_1=-1 \quad x_2=-3$$

$$\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}=\frac{\left(x-2\right)\left(x+3\right)}{\left(x+1\right)\left(x+3\right)}=\frac{x-2}{x+1} \qquad -3\neq x\neq -1$$

- zoberme si rovnicu $ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in R, a \neq 0$ a upravme ju takto:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Big| .\frac{1}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

Def.

Hovoríme, že kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ je **v normovanom tvare**, ak ju upravíme na tvar $x^2 + px + q = 0$.

- pre vzťah koeficientov normovanej kvadratickej rovnice a jej koreňov platia Viètove vzorce:

Veta

Čísla x_1, x_2 sú koreňmi normovanej kvadratickej rovnice $x^2 + px + q = 0$ práve vtedy, keď platí:

$x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 x_2 = q$

Dôkaz

Majme rovnicu $x^2 + px + q = 0$ a jej korene x_1, x_2, potom platí:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + px + q = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2$$

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

- vieme, že dve rovnice sa rovnajú, ak majú rovnaké koeficienty, to znamená:

$$p = -(x_1 + x_2) \wedge q = x_1 x_2$$

$$-p = x_1 + x_2$$

Pr.

Rovnica $x^2 + px - 35 = 0$ má $x_1 = 7$, určite x_2 a p:

$$q = x_1 x_2 \qquad x_2 = \frac{q}{x_1} = \frac{-35}{7} = -5$$

$$-p = x_1 + x_2 = 7 - 5 = 2 \qquad p = -2$$

Pr.

Rovnica $x^2 - 13x + q = 0$ má $x_1 = 10$, určite x_2 a q:

$$-p = x_1 + x_2 \quad x_2 = -p - x_1 = 13 - 10 = 3$$

$$q = x_1 x_2 = 10.3 = 30$$

Pr.

Je daná rovnica $x^2 - 15x + 11 = 0$, bez určenie jej koreňov, napíšte rovnicu, ktorej korene sú o 3 väčšie od koreňov danej rovnice.

$$-p = x_1 + x_2 = 15 \qquad q = x_1 x_2 = 11 \qquad x_1' = x_1 + 3 \qquad x_2' = x_2 + 3$$

$$x^2 + p'x + q' = 0$$

$$-p = x_1' + x_2' = x_1 + 3 + x_2 + 3 = 15 + 6 = 21$$

$$q = x_1' x_2' = (x_1 + 3)(x_2 + 3) = x_1 x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 9 = x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 =$$

$$= 11 + 3.15 + 9 = 65$$

$$x^2 - 21 + 65 = 0$$

Def.

Kvadratická nerovnica s jednou neznámou $x \in R$ je každá nerovnica tvaru $l(x)\ N\ p(x)$, kde $l(x) - p(x)$ je mnohočlen 2. stupňa (kvadratický trojčlen).

- každú kvadratickú nerovnicu možno ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar $ax^2 + bx + c\ N\ 0$; $a, b, c \in R, a \neq 0$, tento tvar sa nazýva **anulovaný (základný) tvar kvadratickej nerovnice**

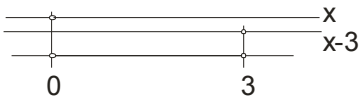
Pr.

Riešte v R:

a) $x^2 - 3x < 0$

$x(x-3) < 0$

$x = 0 \quad x = 3$

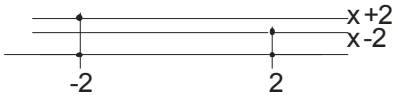


$P = (0, 3)$

b) $x^2 - 4 \geq 0$

$(x-2)(x+2) < 0$

$x = 2 \quad x = -2$



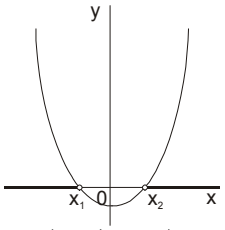
$P = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

- kvadratickú nerovnicu môžeme riešiť aj tak, že si nakreslíme graf príslušnej kvadratickej funkcie

$ax^2 + bx + c > 0$

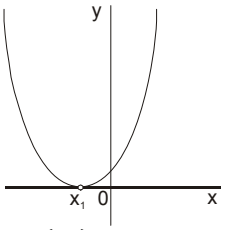
$f : y = ax^2 + bx + c$

$a > 0$, $D > 0$



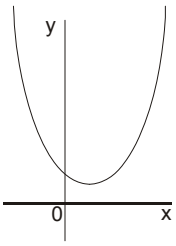
$P = (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

$a > 0$, $D = 0$



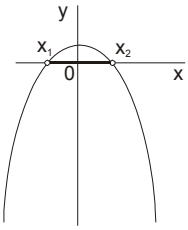
$P = R - \{x_1\}$

$a > 0$, $D < 0$



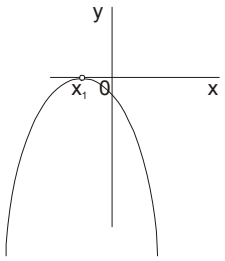
$P = R$

$a < 0$, $D > 0$



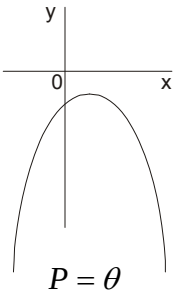
$P = (x_1, x_2)$

$a < 0$, $D = 0$



$P = \theta$

$a < 0$, $D < 0$



$P = \theta$

Pr.

a) $2x^2 - 3x - 20 \leq 0$

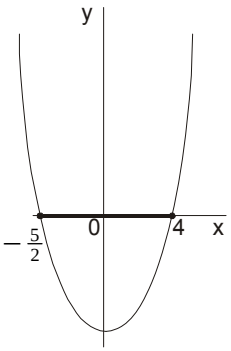
$2x^2 - 3x - 20 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 9 - 4.2.(-20) = 169$

$\sqrt{D} = 13$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3 \pm 13}{4}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -\frac{5}{2}$



$P = \langle -\frac{5}{2}, 4 \rangle$

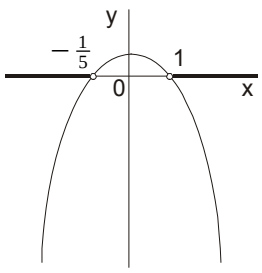
b) $-5x^2+4x+1<0$

$-5x^2+4x+1=0$

$D=36 \qquad \sqrt{D}=6$

$x_{1,2}=\dfrac{-4\pm 6}{-10}$

$x_1=1 \qquad x_2=-\frac{1}{5}$



$P=\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)\cup(1,\infty)$

- <u>kubická rovnica</u>

<u>Def.</u>

Kubická rovnica s jednou neznámou $x\in R$ je každá rovnica tvaru $l(x)=p(x)$, kde $l(x)-p(x)$ je mnohočlen 3. stupňa (kubický štvorčlen).

- každú kubickú rovnicu možno ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar $ax^3+bx^2+cx+d=0; a,b,c,d\in R, a\neq 0$, tento tvar sa nazýva **anulovaný (základný) tvar kubickej rovnice**

Veta

Číslo x_1 je koreňom kubickej rovnice $ax^3+bx^2+cx+d=0$ práve vtedy, keď $ax^3+bx^2+cx+d=(x-x_1).q(x)$. ($(x-x_1)$ je koreňový činiteľ)

<u>Pr.</u>

Riešte v R:

a) $x^3-7x^2+14x-8=0$ - na začiatok nájdeme jeden koreň dosádzaním za x čísla $1,-1,2,-2,3,-3,\dots$ a potom delíme mnohočleny

$x_1=1\dots 1^3-7.1^2+14.1-8=0\ \dots\ 0=0\ \dots\ x_1$ je koreň

$x^3-7x^2+14x-8=(x-1).q(x)$

$(x^3-7x^2+14x-8):(x-1)=x^2-6x+8$

$\mp x^3\pm x^2$

$\theta\ -6x^2+14x-8$

$\pm 6x^2\mp 6x$

$\theta\quad 8x-8$

$\mp 8x\pm 8$

$\theta\quad\theta$

$x^3-7x^2+14x-8=(x-1)(x^2-6x+8)=(x-1)(x-2)(x-4)$

$P=\{1,2,4\}$

b) $x^3+3x^2+3x+2=0$

$x_1=-2$

$x^3+3x^2+3x+2=(x+2).q(x)$

$(x^3+3x^2+3x+2):(x+2)=x^2+x+1$

- keďže x^2+x+1 sa v R už nedá viac rozložiť, tak $P=\{-2\}$

- na rozdiel od kvadratickej rovnice **kubická rovnica má vždy aspoň jeden koreň**; to znamená, že kubický štvorčlen možno rozložiť

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(ax^2 + ex + f)$$

> potom môžu nastať tieto prípady:

1. $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(ax^2 + ex + f)$ a $ax^2 + ex + f$ sa už nedá rozložiť, to znamená, že kubická rovnica má **jeden jednoduchý koreň**
2. $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)^2$, kubická rovnica má **jeden jednoduchý koreň** a **jeden dvojnásobný koreň**
3. $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)^3$, kubická rovnica má **jeden trojnásobný koreň**
4. $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, kubická rovnica má **tri jednoduché korene**

Def.

Hovoríme, že kubická rovnica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ je **v normovanom tvare**, ak ju upravíme na tvar $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

- pre vzťah koeficientov normovanej kvadratickej rovnice a jej koreňov platia Viètove vzorce:

Veta

Čísla x_1, x_2, x_3 sú koreňmi normovanej kvadratickej rovnice $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ práve vtedy, keď platí: $x_1 + x_2 + x_3 = -p \wedge x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \wedge -r = x_1x_2x_3$

Pr.

Nájdite rovnicu, ktorej korene sú dvakrát menšie ako korene rovnice $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \qquad x^3 + p'x^2 + q'x + r' = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p = 3 \qquad x_1' = \tfrac{x_1}{2}, x_2' = \tfrac{x_2}{2}, x_3' = \tfrac{x_3}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q = 0$$

$$-r = x_1x_2x_3 = -1$$

$$-p' = x_1' + x_2' + x_3' \qquad q' = x_1'x_2' + x_1'x_3' + x_2'x_3' \qquad -r = x_1'x_2'x_3'$$

$$-p' = \tfrac{x_1}{2} + \tfrac{x_2}{2} + \tfrac{x_3}{2} \qquad q' = \tfrac{x_1x_2}{4} + \tfrac{x_1x_3}{4} + \tfrac{x_2x_3}{4} \qquad -r' = \tfrac{x_1x_2x_3}{8}$$

$$-2p' = x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad 4q' = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \qquad -8r' = x_1x_2x_3 = -1$$

$$p' = -\tfrac{3}{2} \qquad q' = 0 \qquad r' = \tfrac{1}{8}$$

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{8} = 0$$

- <u>rovnice a nerovnice v súčinovom a podielovom tvare</u>

Def.

Rovnica (nerovnica) s jednou neznámou $x \in R$ v súčinovom tvare je každá rovnica (nerovnica) tvaru $a(x).b(x).\cdots = 0$ ($a(x).b(x).\cdots N\ 0$, kde N je niektorý zo znakov $<, >, \leq, \geq$).

Def.

Rovnica (nerovnica) s jednou neznámou $x \in R$ v podielovom tvare je každá rovnica (nerovnica) tvaru $\frac{a(x)}{b(x)} = 0$ ($\frac{a(x)}{b(x)}\ N\ 0$, kde N je niektorý zo znakov $<, >, \leq, \geq$).

Veta

$\forall x, y \in R:$

1. $xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
2. $\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y \neq 0)$
3. $xy > 0 \Leftrightarrow [(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]$
4. $xy \geq 0 \Leftrightarrow [(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)]$
5. $xy < 0 \Leftrightarrow [(x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)]$
6. $xy \leq 0 \Leftrightarrow [(x \leq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \geq 0 \wedge y \leq 0)]$
7. $\frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow [(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]$
8. $\frac{x}{y} \geq 0 \Leftrightarrow [(x \geq 0 \wedge y > 0) \vee (x \leq 0 \wedge y < 0)]$
9. $\frac{x}{y} < 0 \Leftrightarrow [(x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)]$
10. $\frac{x}{y} \leq 0 \Leftrightarrow [(x \leq 0 \wedge y > 0) \vee (x \geq 0 \wedge y < 0)]$

Pr.

Riešte v R:

a) $(x+2)(x-3) = 0$

$x + 2 = 0 \vee x - 3 = 0$

$x = -2 \qquad x = 3$

$P = \{-2, 3\}$

b) $x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0$

$x = 0 \vee x + 4 = 0$

$x = 0 \qquad x = -4$

$P = \{-4, 0\}$

c) $\frac{2x-4}{x+2} = 0$

$2x - 4 = 0 \wedge x + 2 \neq 0$

$x = 2 \qquad x \neq -2$

$P = \{2\}$

- pri riešení nerovníc používame predchádzajúcu vetu alebo metódu nulových bodov

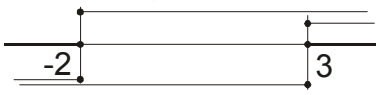
Pr.

Riešte v R:

a) $(x+2)(x-3) \geq 0$

1. $(x + 2 \geq 0 \wedge x - 3 \geq 0) \vee (x + 2 \leq 0 \wedge x - 3 \leq 0)$

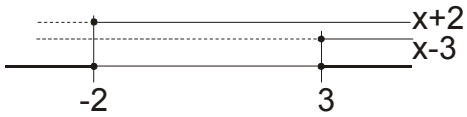
$(x \geq -2 \wedge x \geq 3) \vee (x \leq -2 \wedge x \leq 3)$



$P = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 3, \infty)$

2. $x + 2 = 0 \vee x - 3 = 0$

$x = -2 \qquad x = 3$



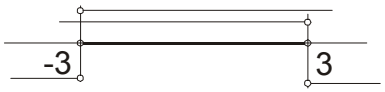
$P = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 3, \infty)$

b) $x^2 - 9 < 0$

$(x-3)(x+3) < 0$

1. $(x - 3 < 0 \wedge x + 3 > 0) \vee (x - 3 > 0 \wedge x + 3 < 0)$

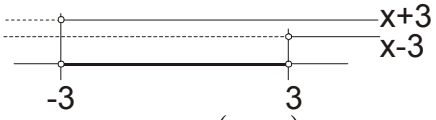
$(x < 3 \wedge x > -3) \vee (x > 3 \wedge x < -3)$



$P = (-3, 3)$

2. $x-3=0 \vee x+3=0$

$x=3 \qquad x=-3$



$P=(-3,3)$

- <u>rovnice a nerovnice s neznámou v absolútnej hodnote</u>

- na začiatok si zopakujme poznatky o absolútnej hodnote:

- **<u>absolútna hodnota reálneho čísla</u>**

<u>Def.</u>

$\forall a \in R$:

1. $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$
2. $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

<u>Veta</u>

$\forall a,b \in R$:

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a.b| = |a|.|b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
5. $|a+b| \leq |a| + |b|$

geometrický význam $|a|$ je taký, že abs. hodnota udáva vzdialenosť čísla a od 0 na číselnej osi; podobne $|a-b|$ udáva vzdialenosť a od b na číselnej osi

<u>Def.</u>

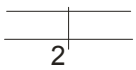
Rovnica (nerovnica) s jednou neznámou $x \in R$ v absolútnej hodnote je každá rovnica (nerovnica) tvaru $l(x) = p(x)$ ($a(x)\ N\ b(x)$, kde N je niektorý zo znakov $<,>,\leq,\geq$), v ktorej sa aspoň jeden výraz, obsahujúci neznámu x, je v absolútnej hodnote.

- spôsob riešenia si ukážeme na nasledujúcom príklade

<u>Pr.</u>

Riešte v R:

a) $|x-2|+3=2x$ - ako prvé si musíme určiť nulový bod výrazu $x-2$, hneď vidíme, že nulovým bodom je 2



- máme dva intervaly:

1. $(-\infty,2\rangle \ldots -x+2+3=2x$ (na tomto intervale je výraz $x-2$ záporný, tak môžeme $|x-2|$ nahradiť výrazom $-(x-2)$, čiže $-x+2$)

$5 = 3x$

$x = \frac{5}{3}$ (keďže $\frac{5}{3} \in (-\infty, 2\rangle$, tak je koreň rovnice)

2. $\langle 2, \infty) \ldots\ x - 2 + 3 = 2x$ (na tomto intervale je výraz $x - 2$ kladný, tak môžeme $|x-2|$ nahradiť výrazom $(x-2)$)

$x = 1$ (vidíme, že $1 \notin \langle 2, \infty)$, to znamená, že nie je koreň)

$P = P_1 \cup P_2 = \{\frac{5}{3}\} \cup \theta = \{\frac{5}{3}\}$

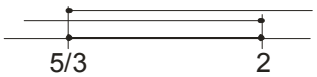
b) $|x-2| + 3 \leq 2x$ - tak ako pri rovnici si musíme určiť nulový bod, už vieme, že je to 2

1. $(-\infty, 2\rangle \ldots\ -x + 2 + 3 \leq 2x$ (na tomto intervale je výraz $x - 2$ záporný, tak môžeme $|x-2|$ nahradiť výrazom $-(x-2)$, čiže $-x+2$)

$5 \leq 3x$

$x \geq \frac{5}{3}$

(teraz si nakreslíme obrázok, kde znázorníme interval, na ktorom pracujeme a podmienku pre x a spravíme prienik)

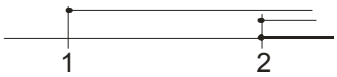


$P_1 = \langle \frac{5}{3}, 2\rangle$

2. $\langle 2, \infty) \ldots\ x - 2 + 3 \leq 2x$ (na tomto intervale je výraz $x - 2$ kladný, tak môžeme $|x-2|$ nahradiť výrazom $(x-2)$)

$x \geq 1$

(teraz si nakreslíme obrázok, kde znázorníme interval, na ktorom pracujeme a podmienku pre x a spravíme prienik)



$P_2 = \langle 2, \infty)$

$P = P_1 \cup P_2 = \langle \frac{5}{3}, \infty)$

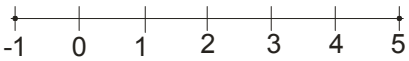
- nasledujúci príklad je ľahko riešiteľný pomocou geometrickej interpretácie

<u>Pr.</u>

Riešte v R:

a) $|x-2| = 3$ - táto rovnica sa dá interpretovať takto: „Aké číslo (čísla sú na číselnej osi vzdialené od 2 o 3

- nakreslíme si číselnú os a vidíme riešenie



$P = \{-1, 5\}$

b) $|x+3| = 1$ - pri tomto type si môžeme rovnicu upraviť na tvar:

$|x-(-3)| = 1$ a máme ten istý prípad ako je v a)

$P = \{-4, -2\}$

- tak isto postupujeme aj pri nerovniciach tohto typu, len s tým rozdielom, že riešením bude interval

Pr.

Riešte v R:

a) $|x-1| \leq 3$ - postupujeme ako keby to bola rovnica, tým určíme hraničné body, v tomto prípade to budú -2 a 4
- keďže výraz v absolútnej hodnote má byť menší ako číslo, to znamená, že riešením je interval medzi hraničnými hodnotami a v tomto prípade bude uzatvorený, pretože je v príklade neostrá nerovnosť

$P = \langle -2, 4 \rangle$

b) $|x-2| > 3$ - tu budú hraničné hodnoty -1 a 5, nakoľko je tu ostrá nerovnosť, tak tieto hodnoty do riešenia patriť nebudú
- výraz v absolútnej hodnote má byť väčší, to znamená, že riešením bude zjednotenie dvoch intervalov

$P = (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$

(ak by sme mali takýto príklad: $|x| \ X \ c$, kde X môže byť jeden zo znakov $=, <, >, \leq, \geq$, tak rovnicu nahradíme rovnicou $|x-0| \ X \ c$)

- <u>rovnice a nerovnice s neznámou v menovateli</u>

Pr.

Riešte v R:

$$\frac{x-1}{x+3} = x$$ sú možné dva postupy

1. $\frac{x-1}{x+3} = x \ \Big| .(x+3)$ - dôsledková úprava musíme robiť skúšku správnosti

$x - 1 = x^2 + 3x$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$

$l(-1) = -1$

$p(-1) = -1$

$P = \{-1\}$

2. rovnicu anulujeme a dáme na spoločného menovateľa

$$\frac{x-1}{x+3} - x = 0$$

$$\frac{x-1-x^2-3x}{x+3} = 0$$

$$-\frac{x^2+2x+1}{x+3} = 0$$

- rovnica v podielovom tvare je rovná nule, len ak čitateľ je rovný nule a menovateľ je rôzny od nuly

$x + 3 \neq 0 \ldots x \neq -3$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$

$P = \{-1\}$

Pr.

Riešte v R:

$$\frac{x-5}{x+3} > 3$$

- riešime tak, že nerovnicu anulujeme, dáme na spoločného menovateľa a riešime metódou nulových bodov

$$\frac{x-5}{x+3} - 3 > 0$$

$$\frac{x-5-3x-9}{x+3} > 0$$

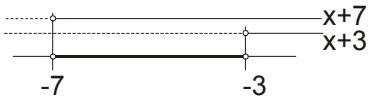
$$\frac{2x-14}{x+3} > 0$$

$$\frac{-2(x+7)}{x+3} > 0$$

$$\frac{x+7}{x+3} < 0$$

$x+7=0$ $\quad$ $x+3=0$

$x=-7$ $\quad$ $x=-3$



$$P = (-7, -3)$$

- <u>rovnice s neznámou v odmocnenci</u>

- pri tomto type rovnice nemáme inú možnosť ako rovnicu umocniť a nakoniec urobiť skúšku správnosti

Pr.

$$\sqrt{3x+2} = \sqrt{x+4} \;\Big|^2$$

$$3x+2 = x+4$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$l(1) = \sqrt{5}$$

$$p(1) = \sqrt{5}$$

$$P = \{1\}$$

- <u>rovnice a nerovnice s parametrom</u>

<u>Def.</u>

Rovnica (nerovnica) s neznámou $x \in R$ a parametrom $p \in R$ je zápis množiny všetkých rovníc, ktoré získame po dosadení za parameter.

<u>Def.</u>

Riešiť rovnicu (nerovnicu) s parametrom znamená určiť, pre každú hodnotu parametra, obor pravdivosti.

- počas riešenia sa nám príklad rozčleňuje na časti, v ktorých riešenie závisí od rôznych hodnôt parametra, základným pravidlom je, že výpočet členíme vtedy, keď rovnicu násobíme výrazom, v ktorom sa vyskytuje parameter a tento výraz môže byť rovný aj nule

- na záver uvádzame, pre ktoré hodnoty parametra má rovnica riešenie, pretože pri rôznych voľbách parametra môže byť rôzny výsledok rovnice

> najprehľadnejšie je spraviť jednoduchú tabuľku

Pr.

Riešte v R rovnicu s neznámou $x \in R$ a parametrom $p \in R$:

$$x + px + p^2 = 1$$

$$x(p+1) = 1 - p^2$$ (členy obsahujúce x necháme na jednej strane)

$$x(p+1) = (1-p)(p+1) \quad \Big| \cdot \frac{1}{p+1}$$

$p+1=0$	$p+1 \neq 0$
$p=-1$	$p \neq -1$
$x - x + 1 = 1$	$x = 1 - p$
$0x = 0$	
$x \in R$	

- na záver riešenia spravíme tabuľku

$p = -1 \ldots P_{-1} = R$

$p \neq -1 \ldots P_p = \{1 - p\}$

Pr.

Riešte v R rovnicu s neznámou $x \in R$ a parametrom $p \in R - \{0\}$:

$$2x - p = \frac{2x-1}{p} \quad \Big| \cdot p$$

$$p(2x - p) = 2x - 1$$

$$2px - p^2 = 2x - 1$$

$$2px - 2x = p^2 - 1$$

$$2x(p-1) = (p-1)(p+1) \quad \Big| \frac{1}{p-1}$$

$p-1=0$	$p-1 \neq 0$
$p=1$	$p \neq 1$
$2x - 1 = 2x - 1$	$2x = p + 1$
$0x = 0$	$x = \frac{p+1}{2}$
$x \in R$	

$p = 1 \ldots P_1 = R$

$p \neq 1 \ldots P_p = \left\{ \frac{p+1}{2} \right\}$

Pr.

Riešte nerovnicu s neznámou $x \in R$ a parametrom $c \in R$:

a)

$$cx - c - x - 1 < 0$$ (členy obsahujúce x necháme na jednej strane)

$$cx - x < c + 1$$

$$x(c-1) < c + 1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{c-1}$$

$c-1<0$	$c-1=0$	$c-1>0$
$c<1$	$c=1$	$c>1$
$x > \frac{c+1}{c-1}$	$x - 1 - x - 1 < 0$	$x < \frac{c+1}{c-1}$

$0x < 2$

$x \in R$

$c < 1 \ldots P_c = \left(\frac{c+1}{c-1}, \infty\right)$

$c = 1 \ldots P_1 = R$

$c > 1 \ldots P_c = \left(-\infty, \frac{c+1}{c-1}\right)$

b)

$c^2x - c - x - 1 < 0$

$c^2x - x < c + 1$

$x(c^2 - 1) < c + 1$

$x(c-1)(c+1) < c + 1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{c+1}$

$c + 1 < 0$

$c < -1$

$x(c-1) > 1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{c-1}$

$c - 1 < 0$

$c < 1$

$c \in (-\infty, -1)$

$x < \frac{1}{c-1}$

$c - 1 = 0$

$c = 1$

θ

$c - 1 > 0$

$c > 1$

θ

$c + 1 = 0$

$c = -1$

$x + 1 + x - 1 < 0$

$0x < 0$

$P_{-1} = \theta$

$c + 1 > 0$

$c > -1$

$x(c-1) < 1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{c-1}$

$c - 1 < 0$

$c < 1$

$c \in (-1, 1)$

$x > \frac{1}{c-1}$

$c - 1 = 0$

$c = 1$

$x - 1 - x - 1 < 0$

$0x < 2$

$x \in R$

$c - 1 > 0$

$c > 1$

$c \in (1, \infty)$

$x < \frac{1}{c-1}$

$c \in (-\infty, -1) \ldots P_c = \left(-\infty, \frac{1}{c-1}\right)$

$c = -1 \ldots P_{-1} = \theta$

$c \in (-1, 1) \ldots P_c = \left(\frac{1}{c-1}, \infty\right)$

$c = 1 \ldots P_1 = R$

$c > 1 \ldots P_c = \left(-\infty, \frac{1}{c-1}\right)$

- <u>riešenie rovníc substitúciou</u>

- substitúciu využívame pri viacerých druhoch rovníc, je to výhodná metóda, keď nevieme rýchlo vypočítať nejakú rovnicu
- princíp tejto metódy spočíva v tom, že si zložitú rovnicu nahradíme jednoduchšou

<u>Pr.</u>

Riešte v R bikvadratickú rovnicu:

$x^4 - 9x^2 + 14 = 0$ - označme $x^2 = y$ a máme rovnicu $y^2 - 9y + 14 = 0$

- dostali sme kvadratickú rovnicu, ktorú vieme vďaka Viètovým vzorcom rozložiť spamäti

$y^2 - 9y + 14 = (y-7)(y-2) \ldots y = 7 \vee y = 2 \ldots x^2 = 7 \vee x^2 = 2 \ldots x = \pm\sqrt{7} \vee x = \pm\sqrt{2}$

$P = \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{7}\}$

Cvičenia

1. Riešte v R:

a) $2(3x-5)<x$ b) $2x-3(x+4)<5x+6$ c) $\frac{2x-4}{5}-\frac{x-1}{4}\geq x+3$

2. Určite rovnicu, ktorej korene sú:

a) $x_1=0, x_2=5$ b) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{3}$ c) $x_1=2+\sqrt{3}, x_2=2-\sqrt{3}$

3. Riešte v R:

a) $-3x^2+9x\leq 0$ b) $-4x^2+12<0$ c) $-4x^2-12<0$

4. Riešte v R:

a) $4x^2-12x+9\leq 0$ b) $-x^2+x+2>0$

5. Riešte v R:

a) $\frac{x-2}{3-x}\leq 0$ b) $(2+x)(6-2x)\leq 0$

6. Riešte v R:

a) $2|x|=|x-4|+3$ b) $|x-2|=2|x+1|$ c) $|2x-1|=x+6$ d) $|x+1|+|2x-1|=3$
e) $|x-6|=2|x|+3$

7. Riešte v R:

a) $|x+1|-|x-1|\geq x$ b) $|x|<3$ c) $|x|+5>0$ d) $|x|+4<1$ e) $|x+2|\leq 10$
f) $|x-1|\geq 0$

8. Riešte v R:

a) $\frac{x-a}{1-a}=\frac{x+a}{1+a}; a\neq\pm 1$ b) $\frac{x+a}{a}=ax-1; a\neq 0$ c) $\sqrt{x^2+m}=m-x$

Neriešené úlohy

1. Riešte v R:

a) $(6-x).(4+2x).(2x-7)\geq 0$ b) $\frac{(12-4x).(x^2-16)}{x^2.(x+2)}<0$ c) $\frac{(x-1)^2.(2-x)}{x^3.(x+1)}\geq 0$

d) $\frac{(x+2).(x^2-6x+9)}{x^2-4}<0$ e) $\frac{(x+2).(x^2+4)}{x^3+8}\geq 0$ f) $\frac{(9-3x).(x^2-16)}{x.(x-2)}\leq 0$

2. Riešte v R:

a) $\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\geq 1$ b) $\frac{x^3+3x-10}{x-1}<10$ c) $\frac{4}{x-4}-\frac{4}{x+4}\leq 0$ d) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x-2}>0$

e) $\frac{2x-3}{x+1}<\frac{x-1}{x+4}$ f) $\frac{1+x^3}{x^2-4}<x$ g) $\frac{x}{x-2}-\frac{3}{x+1}\leq 1$ h) $\frac{x}{x-2}<\frac{x}{x+1}+1$

i) $\frac{x}{2x+3}<1$ j) $\frac{x-9}{x-1}+\frac{3}{x-2}<0$ k) $\frac{8x-2}{x^2+4}>2$ l) $\frac{x-3}{x+5}<x$

3. Riešte v R:

a) $|x+1|-2.|3-x|\geq x$ b) $|x-3|-|3-x|=x$ c) $2.|x|+|2-x|\leq 2-|x-2|$ d) $|x+1|>5$

e) $|x+2|=|x+6|$ f) $|2-3x|-|5-2x|=0$ g) $|x+1|=x+3$ h) $|x-1|<|x+2|+3$

i) $\frac{2x}{|x-3|}\leq |x|$ j) $\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|\geq 3$ k) $|x|<x^2-2$ l) $x|x|<4|x|-4$

m) $|x^2-2x-3|<x+1$ n) $|x^2-5x+4|=x(x-1)$ o) $|8-6x+x^2|>2-x^2$

4. Riešte v R:

a) $\sqrt{x\sqrt{x}-x}+\sqrt{x}=x$ b) $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2-8}}=x+1$ c) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$

d) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$ e) $3\sqrt{x+5}+5=x$ f) $\sqrt{x+27}=2+\sqrt{x-5}$

g) $\sqrt{-x-\sqrt{1-x}}=1$ i) $\frac{x+\sqrt{x+2}}{x-\sqrt{x-2}}=3$ j) $\sqrt{x^2+49}-3\sqrt[4]{x^2+49}=10$

5. Riešte v R:

a) $\sqrt{5-x}\geq x+1$ b) $\sqrt{x^2-27}\leq x-3$ c) $x-2<\sqrt{7-2x}$ d) $x-3\geq x^2+3$

6. Riešte v R:

a) $\left|1-\sqrt{4-x^2}\right|=1-\sqrt{4-x^2}$ b) $\sqrt{(x^2-x+1)^2}=-(x^2-x+1)$ c) $\left|\frac{1+x}{x}\right|>\sqrt{x+3}$

7. Riešte v R:

a) $\sqrt{x^2+4}=a-x$ b) $\frac{a^2-1}{x}=a-\frac{1}{a}$ c) $\frac{a+x}{ax}=\frac{1}{a}+\frac{a}{a+x}$

d) $\sqrt{x^2+ax+a^2}=a-x$ e) $(ax+1)(x+a)=a$ f) $ax+\frac{4a}{x}=a^2$

g) $\sqrt{a+\sqrt{x^2+a^2}}=x$ h) $\sqrt{a-\sqrt{x^2-a^2}}=x$ i) $|x-a|=|x+a|$

j) $|x-1|\leq|x-a|$ k) $a^2x-x<1+a$ l) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$

m) $\frac{2-a}{a}=\frac{2}{x-1}+3a$ n) $a(x-1)+x(a-1)=a-x$ o) $x-\frac{2}{a^2}=\frac{1}{a^2}(4x+1)$

p) $\frac{a}{x}-1=\frac{4}{ax}-\frac{2}{a}$ q) $|x-a|=2a$ r) $(x+3)(a+x)>0$ s) $|x+b|\leq 2b$

t) $|x-2|\leq p$

8. Nájdite rovnicu, ktorej korene sú o dva menšie ako korene rovnice $x^3-3x^2+1=0$

7. ALGEBRICKÉ ROVNICE

(VZĽADOM NA OBOR KOMPLEXNÝCH ČÍSEL)

1. Algebrická rovnica
- pojem algebrickej rovnice v obore C

2. Kvadratická rovnica
- veta o riešení kvadratickej rovnice v C a R

3. Algebrické rovnice vyšších stupňov
- základná veta algebry
- veta o koreňoch a koreňových činiteľoch
- veta o počte koreňov
- existencia resp. neexistencia vzorcov - Abel, Galois

4. Špeciálne typy algebrických rovníc
- binomická rovnica
- trinomická rovnica

.....

Def.

Algebrická rovnica n-tého stupňa je každá rovnica tvaru $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0;$ $a_0, a_1, \ldots, a_n \in C, a_n \neq 0$.

- rovnica tvaru $a_1 x + a_0 = 0; a_0, a_1 \in C,\ a_1 \neq 0$ sa nazýva lineárna rovnica

- kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ sme v obore R nevedeli vždy riešiť, išlo o prípad, kde $D < 0$ > pre obor C platí nasledujúca veta:

Veta

Pre každú kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in R, a \neq 0$ v obore C platí:

1. $D = 0 \ldots P = \left\{ -\dfrac{b}{2a} \right\}$
2. $D \neq 0 \ldots P = \left\{ -\dfrac{b \pm \sqrt{D}}{2a} \right\}$

Dôkaz

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \Big|.4a$$
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$
$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

A) pre obor R

$$(2ax + b)^2 = D$$

$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$P = \theta$	$(2ax + b)^2 = 0$	$(2ax + b)^2 - D = 0$
	$2ax + b = 0$	$(2ax + b)^2 - \sqrt{D}^2 = 0$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$\left(2ax + b + \sqrt{D}\right)\left(2ax + b - \sqrt{D}\right) = 0$$

$$2ax + b + \sqrt{D} = 0 \ldots \ x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$2ax + b - \sqrt{D} = 0 \ldots \ x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

B) pre obor C

$$(2ax + b)^2 = D$$

$D = 0$	$D \neq 0$
$(2ax + b)^2 = 0$	$(2ax + b)^2 = D$
$2ax + b = 0$	$2ax + b = \pm\sqrt{D}$
$x = -\frac{b}{2a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

- v C takisto platia Viètove vzorce pre normovanú rovnicu $x^2 + px + q = 0$:

$$-p = x_1 + x_2 \ \wedge \ q = x_1 x_2$$

Pr.

Riešte v C:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$D = -36 \qquad \sqrt{D} = \sqrt{-36} = \sqrt{-1.36} = \sqrt{-1}.\sqrt{36} = 6i$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

$$P = \{2 - 3i, 2 + 3i\}$$

- keďže v obore C platí vzťah $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$, tak vieme riešiť aj príklady, v ktorých máme rozložiť výraz obsahujúci x^2 na súčin lineárnych dvojčlenov, čo v obore R nebolo vždy možné

napr.: $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

> to isté by sme dostali aj keby sme výraz upravovali:

$$x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$$

- **algebrické rovnice vyšších stupňov**

- touto témou sa zaoberali viacerí matematici a v roku 1799 Gauss vyslovil **základnú vetu algebry**

Veta

Každá algebrická rovnica má v obore komplexných čísel aspoň jeden koreň.

Veta

Číslo $c \in C$ je koreňom algebrickej rovnice $f(x) = 0$ práve vtedy, keď $f(x) = (x - c).q(x)$

Dôkaz

1. c je koreň $\Rightarrow$ $f(x) = (x - c).q(x)$

$f(c) = 0$

$f(x) = f(x) - 0 = f(x) - f(c) =$

$$= \left(a_n x^n + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) - \left(a_n c^n + \cdots + a_3 c^3 + a_2 c^2 + a_1 c + a_0\right) =$$
$$= a_1(x-c) + a_2\left(x^2 - c^2\right) + a_3\left(x^3 - c^3\right) + \cdots + a_n\left(x^n - c^n\right) = a_1(x-c) +$$
$$+ a_2(x-c)(x+c) + a_3(x-c)\left(x^2 + xc + c^2\right) + \cdots + a_n(x-c)(\ldots) = (x-c).q(x)$$

2. $f(x) = (x-c).q(x) \Rightarrow c$ je koreň

$$f(x) = (x-c).q(x)$$
$$f(c) = (c-c).q(x) = 0$$
$$f(c) = 0 \ldots c \text{ je koreň}$$

- predchádzajúce dve vety nás privádzajú k nasledovnému tvrdeniu:

Veta

Každá algebrická rovnica n-tého stupňa má v obore komplexných čísel práve n koreňov (nemusia byť rôzne).

Dôkaz

Zoberme si rovnicu $f(x) = 0$ a nech je n-tého stupňa. Keďže každá rovnica má v obore C koreň, označme si ho c_1, to potom znamená, že $f(x) = (x - c_1).q_{n-1}(x) = 0$ kde $q_{n-1}(x)$ je mnohočlen stupňa $n-1$.

$$(x - c_1).q_{n-1}(x) = 0$$
$$x = c_1 \vee q_{n-1}(x) = 0$$

- teraz máme rovnicu $q_{n-1}(x) = 0$ stupňa $n-1$, aj tá má v C koreň c_2

$$q_{n-1}(x) = (x - c_2).q_{n-2}(x) = 0$$
$$(x - c_2).q_{n-2}(x) = 0$$
$$x = c_2 \vee q_{n-2}(x) = 0$$
$$\ddots$$
$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2).\cdots.(x - c_n) = 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)(x - c_2).\cdots.(x - c_n)$$

- matematici hľadali univerzálne vzorce pre výpočet koreňov a v roku 1826 Abel tvrdil, že pre $n > 4$ neexistujú, tak ako v roku 1831 Galois: „Existujú rovnice stupňa 5 a viac, ktorých korene nie je možné vyjadriť, pomocou koeficientov, konečným počtom operácií“

Pr.

Napíšte algebrickú rovnicu, ktorá má dvojnásobný koreň 2 a jednoduchý koreň i:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$
$$-p = x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 2 + i = 4 + i$$
$$p = -4 - i$$
$$q = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 4 + 2i + 2i = 4 + 4i$$
$$-r = x_1 x_2 x_3 = 2.2.i = 4i$$
$$r = -4i$$
$$x^3 + (-4 - i)x^2 + (4 + 4i)x - 4i = 0$$

- <u>binomická rovnica</u>

<u>Def.</u>

Binomická rovnica je každá rovnica tvaru $ax^n + b = 0; a, b \in C, a \neq 0$.

$$ax^n = -b$$

$$x^n = -\frac{b}{a}$$

$b = 0$ $\qquad$ $b \neq 0$

$x^n = 0$ $\qquad$ $x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

$x = 0$

<u>Pr.</u>

Riešte v C:

$$8x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = \tfrac{1}{8}$$

$$\left|\tfrac{1}{8}\right| = \tfrac{1}{8} \quad \cos\alpha = 1 \qquad \sin\alpha = 0 \qquad \alpha = 0°$$

$$\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}(\cos 0° + i\sin 0°)$$

$$x_k = \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}}\left(\cos\frac{0° + k.360°}{3} + i\sin\frac{0° + k.360°}{3}\right)$$

$$x_0 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}}\left(\cos\frac{0° + 0.360°}{3} + i\sin\frac{0° + 0.360°}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(\cos 0° + i\sin 0°) = \tfrac{1}{2}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}}\left(\cos\frac{0° + 1.360°}{3} + i\sin\frac{0° + 1.360°}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(\cos 180° + i\sin 180°) = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}}\left(\cos\frac{0° + 2.360°}{3} + i\sin\frac{0° + 2.360°}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(\cos 240° + i\sin 240°) = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{\sqrt{3}}{4}i$$

- <u>trinomická rovnica</u>

<u>Def.</u>

Trinomická rovnica je každá rovnica tvaru $ax^p + bx^q + c = 0; a, b, c \in C; a, b \neq 0$.

<u>Pr.</u>

Vykonajte úplnú diskusiu riešenia rovnice v C:

$$mx^2 + (2m - 1)x + m = 0; m \in R, x \in C$$

$m = 0$ $\qquad$ $m \neq 0$

$-x = 0$ $\qquad$ $D = (2m - 1)^2 - 4m^2 = -4m + 1$

$x = 0$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$-4m + 1 > 0$	$1 = 4m$	$-4m + 1 < 0$
$0 \neq m < \frac{1}{4}$	$m = \frac{1}{4}$	$m > \frac{1}{4}$

$\sqrt{D} = \sqrt{1-4m}$ $\quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m-1}{2m}$ $\quad \sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ $\quad x = 1$ $\quad \sqrt{D} = i\sqrt{4m-1}$

$x_{1,2} = \frac{-2m+1\pm\sqrt{1-4m}}{2m}$ $\quad x_{1,2} = \frac{-2m+1\pm i\sqrt{4m-1}}{2m}$

$$m = 0 \ldots P_0 = \{0\}$$
$$m = \tfrac{1}{4} \ldots P_{\frac{1}{4}} = \{1\}$$
$$0 \neq m < \tfrac{1}{4} \ldots P_m = \left\{\frac{-2m+1\pm\sqrt{1-4m}}{2m}\right\}$$
$$m > \tfrac{1}{4} \ldots P_m = \left\{\frac{-2m+1\pm i\sqrt{4m-1}}{2m}\right\}$$

Neriešené úlohy

1. Bez riešenia rovnice $x^2 - 2x - 15 = 0$ nájdite rovnicu, ktorej korene sú:
a) o 3 menšie ako korene pôvodnej rovnice
b) prevrátené čísla ku koreňom pôvodnej rovnice
c) druhé mocniny koreňov pôvodnej rovnice
d) tretie mocniny koreňov pôvodnej rovnice

2. Rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ má korene x_1, x_2; určite:

a) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ b) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ c) $x_1^2 + x_2^2$ d) $x_1^3 + x_2^3$

3. Pre korene rovnice $x^2 - 2rx - 7r^2 = 0$ platí $x_1^2 + x_2^2 = 18$, určite hodnotu parametra $r \in R$

4. Rovnica $x^2 + px + q = 0$ má korene x_1, x_2, rovnica $x^2 - px + pq = 0$ má korene $x_1 + 1, x_2 + 1$, určite p, q.

5. Rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ nemá reálne korene a platí $a - b + c < 0$, určite znamienko čísla c.

6. V rovnici $x^2 - ax + a - 1 = 0$ určite parameter a e R tak, aby súčet druhých mocnín koreňov bol najmenší.

7. Pre ktoré $a \in R$ sú oba korene rovnice $(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ reálne a väčšie ako $\frac{1}{2}$?

8. Pre ktoré $a \in R$ má rovnica $x^2 - (2a-1)x + a^2 - 4 = 0$ dva rôzne reálne korene? Pre ktoré $a \in R$ je súčet týchto koreňov menší ako ich súčin?

9. Pre ktoré $a \in R$ má rovnica $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ dva korene x_1, x_2 spĺňajúce podmienku $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$?

10. Je daná rovnica $x^2 - (2^a - 1)x + 3(2^{a-2} - 4^{a-1}) = 0$ s neznámou $x \in R$ a parametrom $a \in R$. Pre aké hodnoty parametra má rovnica dva rôzne reálne korene s opačnými znamienkami?

11. Riešte v C:

a) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ b) $2x^3 - 3x^2 + 4x + 9 = 0$ c) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0$
d) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$ e) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$

f) $x^6 + x^5 - 2x^4 - x^2 - x + 2 = 0$ g) $x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0$ h) $x^3 + 5x^2 + 9x + 5 = 0$

12. Nájdite rovnicu, ktorej korene sú druhými mocninami koreňov rovnice $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$.

13. Koreňmi rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ súčísla x_1, x_2, x_3 a rovnice $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ sú čísla x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3. Vyjadrite A, B, C pomocou a, b, c.

14. Nájdite všetky reálne čísla a, b, c také, že rovnica $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ má korene a, b, c.

15. Riešte rovnicu $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$ ak viete, že má dva dvojnásobné korene.

16. Riešte rovnicu $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = 0$ ak viete, že jeden jej koreň je opačné číslo k druhému koreňu.

17. Riešte v C:

a) $2ix^4 + i + \sqrt{3} = 0$ b) $3ix^3 - 24 = 0$ c) $x^4 + 1 = 0$ d) $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$

e) $x^2 - 4x + 13 = 0$ f) $x^2 - 4ix + 12 = 0$

18. Určite $m \in R$ tak, aby rovnica $x^2 - 2(2m-3)x + (4m-3) = 0$ mala:

a) dva rôzne reálne korene b) dvojnásobný koreň c) imaginárne korene.

19. Vykonajte úplnú diskusiu riešenia rovníc:

a) $x^2 - 2(2m-3)x + (4m-3) = 0, m \in R$ b) $(m-2)x^2 - (3m-6)x + 6m = 0, m \in R$

8. POSTUPNOSTI

1. Základné pojmy
- definícia postupnosti
- spôsoby určenia postupnosti

2. Vlastnosti
- monotónne postupnosti
- ohraničené postupnosti
- súvislosť monotónnosti a ohraničenosti

3. Aritmetická postupnosť
- definícia. vzorce, odkiaľ je názov

4. Geometrická postupnosť
- definícia, vzorce, odkiaľ je názov

5. Finančná matematika
- úrokový počet
- rentový počet
- umorovací počet

.....

- **postupnosť**

a) $2,3,4,5,6,7,\ldots$ b) $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$ c) $1,2,4,7,11,16,22,29,\ldots$

- členy postupnosti môžeme očíslovať: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$

- postupnosť môžeme chápať ako funkciu, v ktorej je definičným oborom množina N alebo jej podmnožina

napr.: $f: y = 2x+1; x \in N$ môžeme zapísať takto $3,5,7,9,11,\ldots$; keďže $1 \to 3, 2 \to 5, 3 \to 7,$ $4 \to 9, 5 \to 11, \ldots$ $([1,3],[2,5],[3,7],[4,9],[5,11],\ldots)$

Def.

Postupnosť je funkcia, ktorej definičný obor je množina N (nekonečná postupnosť) alebo jej podmnožina typu $\{1,2,...,k\}$ (konečná postupnosť)

- postupnosť môžeme určiť tromi spôsobmi:
1. **vzorcom pre n-tý člen**
2. **rekurentným vzorcom**
3. **lineárnymi rekurentnými vzorcami druhého rádu s konštantnými koeficientami**

1. **vzorec pre n-tý člen**

- postupnosť máme určenú predpisom, napr.: $a: y = 2n+3, n \in N$ a označenie $a_n = 2n+3$ nazývame vzorec pre n-tý člen, môžeme ho zapísať aj takto $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}; a_n = 2n+3$ alebo $\{2n+3\}_{n=1}^{\infty}$

Pr.

Napíšte pár členov postupnosti a utvorte záver:

a) $\left\{\frac{1}{3} + (-1)^{3n+2}\frac{1}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $a_n = \frac{1}{3} + (-1)^{3n+2}\frac{1}{3}$

$a_1 = 0, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = 0, a_4 = \frac{2}{3}, a_5 = 0, \ldots$

$0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, \ldots$

b) $\left\{2 + (-1)^n 5\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = 2 + (-1)^n 5$

$a_1 = -3, a_2 = 7, a_3 = -3, a_4 = 7, a_5 = -3, \ldots$

$-3, 7, -3, 7, -3, \ldots$

Pr.

Zistite, či čísla 1256 a 1266 sú členmi postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}; a_n = 3n + 2$.

$1256 = 3n + 2$ $\quad 1266 = 3n + 2$

$1254 = 3n$ $\quad 1264 = 3n$

$n = 418$ $\quad 3 \nmid 1264$

Pr.

Vyjadrite vzorcom pre n-tý člen:

a) $2,4,6,8,10,\ldots \quad a_n = 2n$

b) $1,3,5,7,9,\ldots \quad a_n = 2n - 1$

c) $5,7,9,11,13,\ldots \quad a_n = 2n + 3$

d) $8,10,12,14,\ldots \quad a_n = 2n + 6$

e) $2,4,8,16,32,\ldots \quad a_n = 2^n$

f) $1,2,4,8,16,\ldots \quad a_n = 2^{n-1}$

g) $3,6,9,12,15,\ldots \quad a_n = 3n$

h) $2,2,2,2,2,\ldots \quad a_n = 2$

i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots \quad a_n = \frac{n}{n+1}$

j) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots \quad a_n = \frac{1}{2^n}$

k) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \ldots \quad a_n = \frac{n}{2^n}$

l) $-1,1,-1,1,-1,\ldots \quad a_n = (-1)^n$

m) $1,-1,1,-1,1,\ldots \quad a_n = (-1)^{n+1}$

n) $1,8,27,64,125,\ldots \quad a_n = n^3$

o) $1,0,-1,0,1,\ldots \quad a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

p) $-1,4,-9,16,\ldots \quad a_n = n^2(-1)^n$

2. **rekurentný vzorec**

- pri tomto type vzorca je istý člen vyjadrený pomocou predchádzajúcich
- rekurentný vzorec sám postupnosť neurčuje, je potrebné, aby sme spolu so vzorcom poznali vhodný počet členov danej postupnosti

napr.: fibonachiho postupnosť $1,1,2,3,4,8,13,\ldots$ môžeme rekurentne určiť nasledovne $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ alebo $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ a zadáme $a_1 = 1, a_2 = 1$, čo nám postačuje na zostrojenie danej postupnosti (ak by sme nezadali dva prvky ale iba jeden, tak by sme postupnosť nevedeli zostrojiť)

Pr.

Určite prvý člen postupnosti ak viete, že platí:

$a_{n+1} = a_n - 3 \quad a_4 = 7$

$a_4 = 7 = a_{3+1} = a_3 - 3$

$a_3 = 10 = a_{2+1} = a_2 - 3$

$a_2 = 13 = a_{1+1} = a_1 - 3$

$a_1 = 16$

Pr.

Určite postupnosť rekurentným vzorcom:

a) $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$

- určíme si a_n a a_{n+1} a potom tieto členy môžeme odčítať, sčítať, násobiť alebo deliť a zo vzniknutej rovnice vyjadríme a_{n+1}

$$a_n = n+1$$
$$a_{n+1} = n+2$$
$$a_{n+1} - a_n = n+2-n-1 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + 1$$

b) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$
$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$
$$a_{n+1}.a_n = \frac{n+1}{n+2}.\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+2}$$
$$a_{n+1} = \frac{n}{a_n(n+2)}$$

c) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_n = 2^n$$
$$a_{n+1} = 2^{n+1}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$
$$a_{n+1} = 2a_n$$

Pr.

Určite vzorcom pre n-tý člen:

a) $a_{n+1} = 3a_n \qquad a_1 = 1$

- pri riešení takéhoto typu príkladu postupujeme tak, že si určíme pár prvých členov postupnosti, vyslovíme hypotézu vzorca pre n-tý člen a tú následne dokážeme matematickou indukciou

$$a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 27, \ldots$$
$$a_n = 3^{n-1}$$

1. $n = 1 \ldots a_1 = 3^{1-1} = 3^0 = 1$ platí
2. $\forall k \in N : a_k = 3^{k-1} \Rightarrow a_{k+1} = 3^k$

$$a_{k+1} = 3a_k = 3.3^{k-1} = 3^{k-1+1} = 3^k$$

$$\forall n \in N : a_n = 3^{n-1}$$

b) $a_{n+1} = \frac{n}{n+2}.a_n \qquad a_1 = \frac{1}{2}$

$$a_2 = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{2}{4}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}, a_4 = \frac{3}{5}.\frac{1}{12} = \frac{1}{20}, a_5 = \frac{4}{6}.\frac{1}{20} = \frac{1}{30}, \ldots$$
$$a_1 = \frac{1}{1.2}, a_2 = \frac{1}{2.3}, a_3 = \frac{1}{3.4}, a_4 = \frac{1}{4.5}, a_5 = \frac{1}{5.6}, \ldots$$
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. $n = 1 \ldots a_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ platí
2. $\forall k \in N : a_k = \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$a_{k+1} = \frac{k}{k+2}.a_k = \frac{k}{k+2}.\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\forall n \in N : a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Pr.

Postupnosť má rekurentný vzorec $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Dokážte:

a) $a_{n+3} = -a_n$

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$
$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1}$$
$$a_{n+3} + a_{n+2} = a_{n+2} - a_n$$
$$a_{n+3} = -a_n$$

b) $a_{n+6} = a_n$

$$a_{n+6} = a_{n+5} - a_{n+4} = a_{n+4} - a_{n+3} - a_{n+4} = -a_{n+3} = a_n$$

Pr.

Dokážte, že ak platí $a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - 2)$, tak $a_n = 2.3^{1-n} - 1$.

1. $n = 1 \ldots a_1 = 2.3^0 - 1 = 2 - 1 = 1$ platí
2. $\forall k \in N : a_k = 2.3^{1-k} - 1 \Rightarrow a_{k+1} = 2.3^{-k} - 1$

$$a_{k+1} = \tfrac{1}{3}(a_k - 2) = \tfrac{1}{3}\left(2.3^{1-k} - 1 - 2\right) = \tfrac{1}{3}\left(2.3.3^{-k} - 3\right) = 2.3^{-k} - 1$$

$$\forall n \in N : a_n = 2.3^{1-n} - 1$$

3. **lineárny rekurentný vzorec druhého rádu s konštantnými koeficientami**

- pomocou tohto zápisu sa dá rýchlo z rekurentného vzorca utvoriť vzorec pre n-tý člen

$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ určíme si ho charakteristickou rovnicou

$$x^2 = \alpha x + \beta$$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
p, q	p	?
$a_n = Ap^{n-1} + Bq^{n-1}$	$a_n = Ap^{n-1} + Bnp^{n-1}$	

Dôkaz

$$p^2 = \alpha p + \beta \wedge q^2 = \alpha q + \beta$$
$$\alpha a_{n+1} + \beta a_n = \alpha\left(Ap^n + Bq^n\right) + \beta\left(Ap^{n-1} + Bp^{n-1}\right) =$$
$$= Ap^{n-1}(\alpha p + \beta) + Bq^{n-1}(\alpha q + \beta) = Ap^{n+1} + Bq^{n+1} = a_{n+2}$$

čiže platí $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$

Pr.

Určite vzorcom pre n-tý člen:

$$a_1 = 3, a_2 = 4, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$
$$x^2 = x + 6$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$
$$x = 3 \quad x = -2$$
$$p = 3 \quad q = -2$$

$$a_n = A3^{n-1} + B(-2)^{n-1}$$

$$a_1 = 3 = A3^0 + B(-2)^0$$

$$a_2 = 4 = A3^1 + B(-2)^1$$

$$3 = A + B$$

$$4 = 3A - 2B$$

$$6 = 2A + 2B$$

$$4 = 3A - 2B$$

$$10 = 5A$$

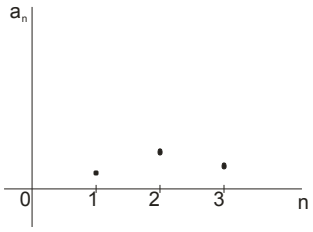
$$A = 2$$

$$B = 1$$

$$a_n = 2.3^{n-1} + (-2)^{n-1}$$

- **graf postupnosti**

- grafom postupnosti sú body

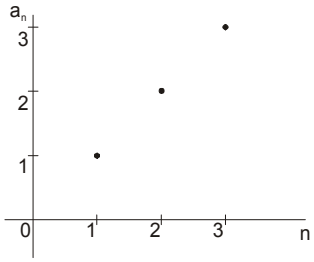


Pr.

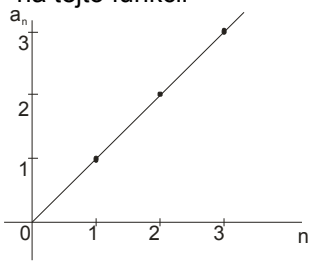
Nakreslite grafy postupností a zistite na grafoch akých funkcií ležia:

a) $\{n\}_{n=1}^{\infty}$

- hneď vidíme, že $a_n = n$ a môžeme kresliť graf

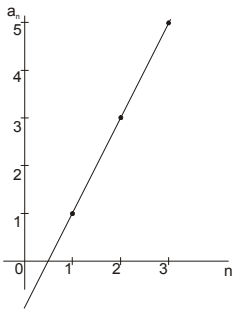


- ak si zoberieme funkciu $y = x$, tak body budú ležať na tejto funkcii



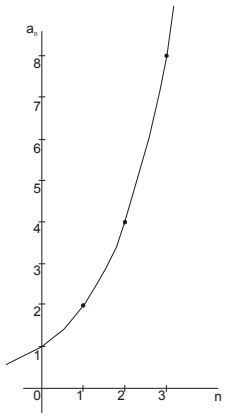
b) $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$

$a_n = 2n - 1$ a $y = 2x - 1$



c) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$

$a_n = 2^n$ a $y = 2^n$



- **<u>monotónne postupnosti</u>**

- postupnosť je funkcia, tak môže byť monotónna

<u>Def.</u>

Ak pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

1. $\forall n \in N : a_n < a_{n+1}$, tak postupnosť je rastúca
2. $\forall n \in N : a_n > a_{n+1}$, tak postupnosť je klesajúca
3. $\forall n \in N : a_n \geq a_{n+1}$, tak postupnosť je nerastúca
4. $\forall n \in N : a_n \leq a_{n+1}$, tak postupnosť je neklesajúca
5. $\forall n \in N : a_n = a_{n+1}$, tak postupnosť je konštantná (stacionárna)

<u>Pr.</u>

Zistite monotónnosť:

a) $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_n = \frac{2n}{n+1}, a_{n+1} = \frac{2n+2}{n+2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{(2n+2)(n+1)-2n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n^2+2n+2n+2-2n^2-4n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$

- rozdiel $a_{n+1} - a_n$ je vždy kladný, čiže z nerovnosti $a_{n+1} - a_n > 0$ máme $a_{n+1} > a_n$ a z definície je postupnosť rastúca

b) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}, t \in R$

$$a_n = t^n, a_{n+1} = t^{n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = t^{n+1} - t^n = t^n(t-1)$$

$t = 0$	$t = 1$	$t > 1$	$0 < t < 1$	$t < 0$
$a_n = 0^n = 0$	$a_n = 1^n = 1$			
stacionárna	stacionárna	rastúca	klesajúca	nie je monotónna

<u>Pr.</u>

Zistite monotónnosť:

a) $\{7n - n^2\}_{n=1}^{\infty}$

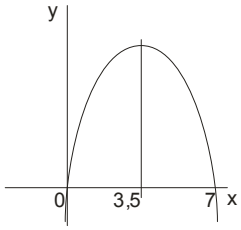
- môžeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcom príklade:

$$a_n = 7n - n^2, a_{n+1} = 7(n+1) - (n+1)^2$$

$$a_{n+1} - a_n = 6 - 2n$$

- vidíme, že na množine $\{1,2,3\}$ je rastúca a na množine $\{4,5,\ldots\}$ je klesajúca

- monotónnosť takejto postupnosti môžeme určiť aj graficky, zoberieme si funkciu $y = 7x - x^2$, nakreslíme si jej graf a určíme tak monotónnosť (využijeme poznatok, že x-ová súradnica vrcholu paraboly je $\frac{-b}{2a}$):



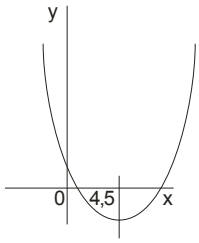
b) $\{n^2 - 9n + 1\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_n = n^2 - 9n + 1, a_{n+1} = (n+1)^2 - 9(n+1) + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 9(n+1) + 1 - n^2 - 9n + 1 = 2n - 8$$

- na množine $\{1,2,3,4\}$ je klesajúca a na množine $\{5,6,\ldots\}$ je rastúca

$$y = x^2 - 9x + 1$$

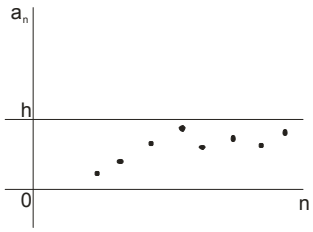


- <u>ohraničené postupnosti</u>

- vieme, že postupnosť chápeme ako funkciu, čiže postupnosť môže byť ohraničená

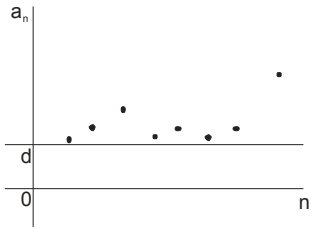
<u>Def.</u>

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená, ak platí: $\exists\, h \in R\ \forall\, n \in N : a_n \le h$.



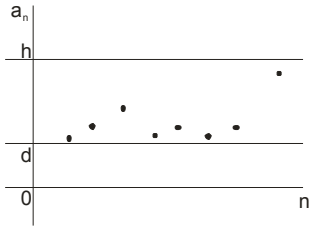
<u>Def.</u>

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená, ak platí: $\exists\, d \in R\ \forall\, n \in N : a_n \ge d$.



Def.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, ak je ohraničená zhora a je ohraničená aj zdola.



- túto definíciu môžeme zapísať aj takto: Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, ak platí:
$(\exists\, h \in R\ \forall n \in N : a_n \le h) \wedge (\exists\, d \in R\ \forall n \in N : a_n \ge d)$.

Pr.

Skúmajte ohraničenosť:

a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

- je zrejmé, že $d = 0$ a nakoľko čitateľ je vždy menší ako menovateľ, tak $h = 1$ a platí: $d = 0 < a_n = \frac{n}{n+1} < 1 = h$

b) $\left\{\frac{3n^2+6}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

- tu tak isto bude $d = 0$, h nevieme jednoznačne určiť bez úpravy výrazu $\frac{3n^2+6}{n^2}$

$\frac{3n^2+6}{n^2} = 3 + \frac{6}{n^2}$ > odtiaľto vidíme, že pri $n = 1$ bude $a_1 = 9$ a ostatné členy budú menšie, teda $h = 9$ a platí:
$d = 0 < a_n = \frac{3n^2+6}{n^2} \le 9 = h$

- je zrejmé, ohraničenosť postupnosti súvisí s monotónnosťou, napr.: postupnosť je rastúca, tak je zdola ohraničená; ...

- aritmetická postupnosť

Def.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť ak platí: $\exists\, d \in R\ \forall n \in N : a_{n+1} = a_n + d$.

$1, 2, 3, 4, \ldots \qquad d = 1$

$1, 1, 1, \ldots \qquad d = 0$ - d nazývame **diferencia** ($d = a_{n+1} - a_n$)

$1, 4, 7, 10, \ldots \qquad d = 3$

Veta (vzorec pre n-tý člen)

$\forall\, n \in N : a_n = a_1 + (n-1)d$

Dôkaz

1. $n = 1 \ldots a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1$ platí
2. $\forall k \in N : a_k = a_1 + (k-1)d \Rightarrow a_{k+1} = a_1 + kd$

$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd$

$\forall\, n \in N : a_n = a_1 + (n-1)d$ platí

- tento vzorec pre n-tý člen sa dá jednoducho odvodiť takto:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + nd - 2d + d = a_1 + (n-1)d$$

Veta

$\forall r, s \in N : a_r = a_s + (r-s)d$

Dôkaz

$$\begin{aligned} a_r &= a_1 + (r-1)d \\ a_s &= a_1 + (s-1)d \\ \hline a_r - a_s &= (r-s)d \\ a_r &= a_s + (r-s)d \end{aligned}$$

Pr.

Zistite súčet prvých sto prirodzených čísel

- takýto príklad sa na prvý pohľad zdá zdĺhavý a preto nás bude zaujímať, či nie je nejaký vzorec pre urýchlenie výpočtu $1+2+3+\cdots+100 = x$
- ak si členy zapíšeme za sebou $1, 2, 3, 4, \ldots, 100$, tak vidíme, že tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou 1, ale vzorec pre súčet členov aritmetickej postupnosti nevieme, tak vyskúšajme takýto zápis:

$$\begin{aligned} s_{100} &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \\ s_{100} &= 100 + 99 + 98 + \cdots + 1 \\ \hline 2s_{100} &= \underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101}_{100} \\ 2s_{100} &= 100.101 \\ s_{100} &= \tfrac{100.101}{2} = 5050 = \tfrac{100.(1+100)}{2} \end{aligned}$$

- stadiaľto dostávame vzorec pre súčet členov aritmetickej postupnosti:

$$s_n = \tfrac{n(a_1+a_n)}{2}$$

Veta

Pre súčet s_n prvých n členov aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí: $s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

Dôkaz

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ s_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 \\ \hline 2s_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1) \\ 2s_n &= n(a_1 + a_n) \\ s_n &= \tfrac{n(a_1+a_n)}{2} \end{aligned}$$

- otázne je prečo sa postupnosť, s takýmito vlastnosťami, nazýva aritmetická

> odpoveď je jednoduchá: **každý člen** (okrem a_1) **aritmetickej postupnosti je aritmetický priemer dvoch susedných členov**

Pr.

Zistite, či je postupnosť aritmetická:

a) $\{3n-1\}_{n=1}^{\infty}$

$2,5,8,11,\ldots \qquad d=3$ > diferencia je rovnaká, je aritmetická

b) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$a_1=2, a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{4}{3}$

$d=a_2-a_1=\frac{1}{2}$ > diferencia nie je rovnaká, takže nie je aritmetická

$d=a_3-a_2=-\frac{1}{6}\neq\frac{1}{2}$

Pr.

V aritmetickej postupnosti platí:

a) $a_1=3, a_8=17$ určite d a a_5

$a_n=a_1+(n-1)d \qquad a_5=a_1+4d$

$17=3+7d \qquad a_5=3+8=11$

$14=7d$

$d=2$

b) $a_6=16, a_8=64$ určite a_{10}

$a_7=\frac{a_6+a_8}{2}=40 \qquad d=a_8-a_7=24$

$a_{10}=a_8+2d=16+2.24=112$

Pr.

Môžu dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoriť aritmetickú postupnosť?

$a,\ b,\ c \qquad c^2=a^2+b^2$

$b-d, b, b+d \qquad (b+d)^2=(b-d)^2+b^2$

$b^2+2bd+d^2=b^2-2bd+d^2+b^2$

$4bd=b^2 \qquad b=4d, a=3d, c=5d$

Áno môžu ak platí: $a=3d, b=4d, c=5d$

Pr.

Zistite, či existuje konvexný mnohouholník, ktorého vnútorné uhly tvoria aritmetickú postupnosť, najmenší je 126° a každý nasledujúci je o 4° väčší ako predchádzajúci.

$a_1=126°, a_n=126°+(n-1)4°=122°+4°n$

$s_n=s_n$

$180°n-360°=\frac{n(126°+122°+4°n)}{2}$

$360°n-720°=248°n+4°n^2$

$4°n^2-112°n+720°=0$

$n^2-28°n+180°=0$

$(n-10)(n-18)=0$

- vyhovuje iba $n=10$, bude to konvexný desaťuholník

- <u>geometrická postupnosť</u>

<u>Def.</u>

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť ak platí: $\exists\, q \in R\ \forall n \in N : a_{n+1} = a_n.q$.

$1, 2, 4, 8, 16, \ldots \quad q = 2$

$8, -8, 8, -8, \ldots \quad q = -1$ - q nazývame **kvocient** ($q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$)

$1, a^2, a^4, a^8, \ldots \quad q = a^2$

<u>Veta</u> (vzorec pre n -tý člen)

$\forall\ n \in N : a_n = a_1 q^{n-1}$

Dôkaz

1. $n = 1 \ldots a_1 = a_1 q^{1-1} = a_1$ platí
2. $\forall k \in N : a_k = a_1 q^{k-1} \Rightarrow a_{k+1} = a_1 q^k$

$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^{k-1} q = a_1 q^k$

$\forall\ n \in N : a_n = a_1 q^{n-1}$ platí

<u>Veta</u>

$\forall r, s \in N : a_r = a_s q^{r-s}$

Dôkaz

$a_r = a_1 q^{r-1}$ $\quad \frac{a_r}{a_s} = \frac{a_1 q^{r-1}}{a_1 q^{s-1}}$ $\quad \frac{a_r}{a_s} = q^{r-s}$

$\underline{a_s = a_1 q^{s-1}}$ $\quad \frac{a_r}{a_s} = \frac{q^r}{q^s}$ $\quad a_r = a_s q^{r-s}$

<u>Veta</u>

Pre súčet s_n prvých n členov geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

1. $q = 1 \ldots s_n = n a_1$
2. $q \neq 1 \ldots s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Dôkaz

1. $n = 1 \ldots s_1 = a_1 \frac{q-1}{q-1} = a_1$ platí
2. $\forall k \in N : s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} \Rightarrow s_{k+1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$

$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_1 q^k = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$

- alebo

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$qs_n = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \cdots + a_n q$

$\underline{qs_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_n q}$

$qs_n - s_n = a_n q - a_1$

$s_n (q - 1) = a_1 (q^n - 1)$

$s_n = a_1 . \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$

Pr.

V geometrickej postupnosti poznáme a_2 a a_5. Určite a_{11}.

$$a_5 = a_2 q^3 \qquad q = \sqrt[3]{\frac{a_5}{a_2}}$$

$$a_{11} = a_5 q^6 = a_5 \left(\frac{a_5}{a_2}\right)^2 = \frac{a_5^{\,3}}{a_2^{\,2}}$$

Pr.

V postupnosti $\left\{\frac{3^{n-1}}{2^{n-8}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ určite súčet prvých päť členov.

$$a_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-8}}, a_{n+1} = \frac{3^n}{2^{n-7}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^n}{2^{n-7}}}{\frac{3^{n-1}}{2^{n-8}}} = \frac{3^n.2^{n-8}}{3^{n-1}.2^{n-7}} = \frac{3}{2} = q$$

$$a_1 = 128$$

$$s_5 = a_1.\frac{q^5-1}{q-1} = 128.\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5-1}{\frac{3}{2}-1} = 1688$$

Pr.

Tri čísla tvoriace aritmetickú postupnosť majú súčet 30. Ak od prvého odčítame 5, od druhého 4 a tretie ponecháme, vznikne geometrická postupnosť. Určite členy oboch postupností.

AP	GP
a_1, a_2, a_3	b_1, b_2, b_3
$a_1 + a_2 + a_3 = 30$	$a_1 - 5, a_2 - 4, a_3$
$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 30$	$5 - d, 6, 10 + d$
$3a_1 + 3d = 30$	$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}$
$a_1 + d = 10$	$\frac{6}{5-d} = \frac{10+d}{6}$
$a_2 = 10$	$36 = (10+d)(5-d)$
$10 - d, 10, 10 + d$	$d^2 + 5d - 14 = 0$
	$(d+7)(d-2) = 0$
	$d = -7 \vee d = 2$

d	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
-7	17	10	3	12	6	3
2	8	10	12	3	6	12

Pr.

Dokážte, že: $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n}} = \underbrace{33\ldots3}_{n}$

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n} = \left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{2n-1}\right) - 2\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{10^{2n}-1}{9} - 2\frac{10^n-1}{9} = \frac{10^{2n}-1-2.10^n+2}{9} = \frac{10^{2n}-2.10^n+1}{9} = \frac{\left(10^n-1\right)^2}{9} = \left(\frac{99\ldots9}{3}\right)^2 = \left(\underbrace{33\ldots3}_{n}\right)^2$$

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n}} = \underbrace{33\ldots3}_{n}$$

- finančná matematika

- aplikovaná matematická disciplína, je základom rôznych ekonomických činností
- jej základné časti sú: 1. **úrokový počet**
  2. **rentový počet**
  3. **umorovací počet**

1. úrokový počet

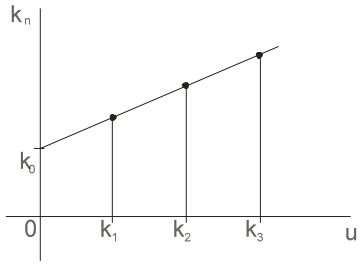
- **veriteľ** - osoba vlastniaca a poskytujúca finančné prostriedky na dočasné užívanie
- **dlžník** - osoba, ktorá si požičia finančné prostriedky
- **istina** - (začiatočný kapitál) finančné prostriedky, ktoré požičal veriteľ dlžníkovi na dočasné užívanie
- **úrok** - poplatok, ktorý platí dlžník veriteľovi za právo používať finančné prostriedky
  a) **percentová úroková miera** - počet percent z istiny (napr.: $p = 8\%$)
  b) **úroková sadzba** - je to koeficient vypočítaný podľa vzťahu: $i = \frac{p}{100}$
- **úroková perióda** - obdobie, za ktoré sa určuje úrok (napr.: ročná … per annum/p.a.)
- **úrokovanie** - výpočet úrokov

A. jednoduché polehotné úrokovanie

- úrok je splatný na konci úrokovej periódy, úrok sa vždy počíta zo začiatočného kapitálu
- máme začiatočný kapitál k_0, po prvej perióde to bude k_1, to vypočítame nasledovne: $k_1 = k_0 + u = k_0 + \frac{p}{100}k_0 = k_0 + ik_0 = k_0(1+i)$, potom k_2, atď.

$$k_2 = k_1 + u = k_1 + \frac{p}{100}k_0 = k_1 + ik_0 = k_0 + ik_0 + ik_0 = k_0(1+2i)$$
$$k_3 = k_2 + u = k_0(1+3i)$$
$$\vdots$$
$$k_n = k_{n-1} + u = k_0 + nik_0 = k_0(1+ni)$$

- platí všeobecný vzorec: $k_n = k_0(1+ni)$
- $u = ik_0 = d$ môžeme chápať ako diferenciu aritmetickej postupnosti



Pr.

Banka poskytuje p.a. 11%. Pán X si na začiatku roka uložil 5000 Sk. Aký bode kapitál po:
a) 6 rokoch b) 8 mesiacoch c) 7,5 roku pri jednoduchom polehotnom úrokovaní?

a) $k_6 = k_0(1+6i) = 5000(1+6.0{,}11) = 8300$

b) $n = \frac{8}{12}$ $k_{\frac{8}{12}} = k_0\left(1+\frac{8}{12}i\right) = 5000\left(1+\frac{8}{12}.0{,}11\right) = 5366,\overline{6}$

c) $k_{7,5} = k_0(1+7{,}5i) = 5000(1+7{,}5.0{,}11) = 9125$

Pr.

Podnikateľ si chce kúpiť 22.8. auto za 440 000 Sk. Koľko musí vložiť do banky 17.3. pri p.a. 9%, aby získal potrebné peniaze?

- je to 159 dní, čiže: $440000 = k_0\left(1+\frac{159}{365}.0{,}09\right)$ $k_0 \doteq 423400{,}4$

B. **zložené polehotné úrokovanie**

- úrok sa na konci úrokovej periódy pripočíta ku kapitálu a takto vzniknutá suma sa úrokuje

$$k_0, p$$

$$k_1 = k_0 + u = k_0 + ik_0 = k_0(1+i)$$

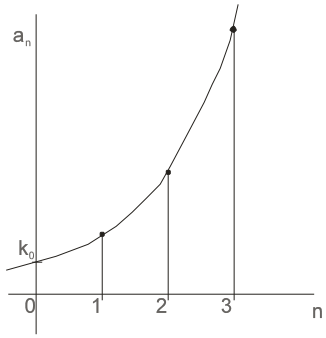
$$k_2 = k_1 + u = k_1 + ik_1 = k_1(1+i) = k_0(1+i)^2$$

$$k_3 = k_2 + u = k_2 + ik_2 = k_2(1+i) = k_0(1+i)^3$$

$$\vdots$$

$$k_n = k_{n-1} + u = k_0(1+i)^n$$

- platí všeobecný vzorec: $k_n = k_0(1+i)^n$
- $1+i = q$ môžeme chápať ako kvocient geometrickej postupnosti

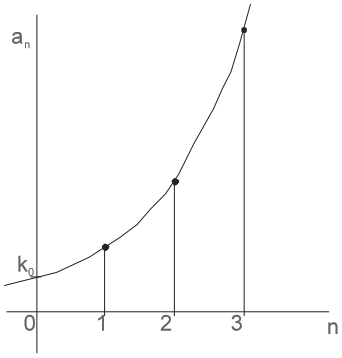


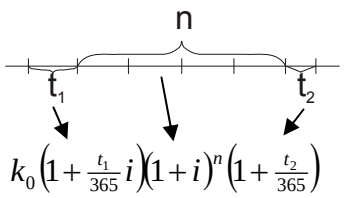
Pr.

Pán X vložil do banky 10 000 Sk pri p.a. 8%. Aký bude stav jeho účtu po 10 rokoch pri zloženom polehotnom úrokovaní?

$$k_{10} = 10000(1+0{,}08)^{10} = 21589{,}25$$

C. **zmiešané úrokovanie**





Pr.

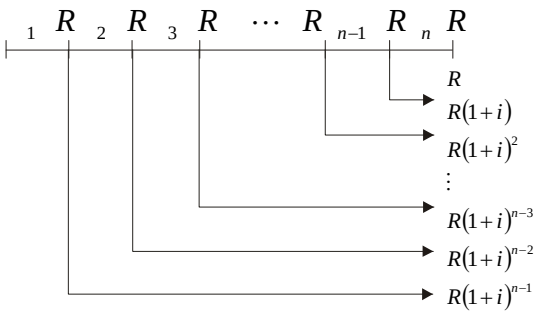
Na akú hodnotu vzrastie 10 000 Sk na p.a. 9% za obdobie 20.5.1998 – 25.8.2002?

$$t_1 = 225, t_2 = 237$$

$$k = 10000\left(1+\tfrac{225}{365}0{,}09\right)(1+0{,}09)^3\left(1+\tfrac{237}{365}0{,}09\right) = 14467{,}54$$

2. **rentový počet**

- **finančná renta** - (dôchodok/anuita) postupnosť splátok v rovnako veľkých intervaloch (používa sa aj pri sporení, splácaní, podpore v nezamestnanosti)



$$k_n = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-1}$$

$$q = 1+i \qquad k_n = R.\frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1}$$

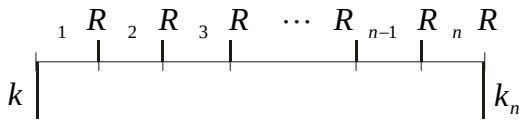
- **hodnota renty**: $k_n = R.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

$\boxed{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$ > polehotný sporiteľ

<u>Pr.</u>

Rodičia chcú svojmu 10-ročnému dieťaťu založiť viazaný vklad, ktorý mu v 18-tich rokoch zaručí vyplatenie 50 000 Sk. Akú sumu musia vkladať koncom každého roku pri p.a. 10%?

$$k_8 = 50000 \qquad 50000 = R\frac{(1+0{,}1)^8 - 1}{0{,}1} \qquad R = 4372{,}2$$

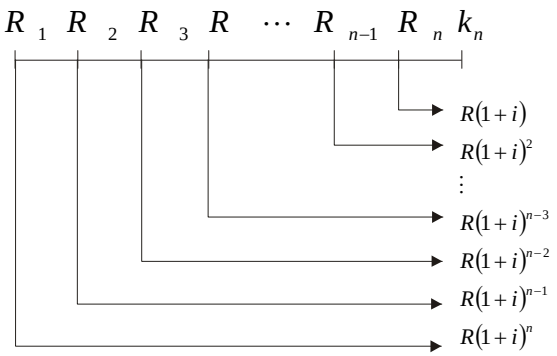


$$k_n = k_n$$

$$k(1+i)^n = R.\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad k = R.\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = R.\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

- **hodnota renty**: $k = R.\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$

$\boxed{\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}}$ > **polehotný zásobiteľ**



$$k_n = R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n$$

$$q = 1+i \qquad k_n = R(1+i).\frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1}$$

- **hodnota renty**: $k_n = R(1+i).\frac{(1+i)^n-1}{i}$

$\boxed{(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}}$ > **predlehotný sporiteľ**

Pr.

Pán X ukladá na začiatku každého roku na účet 10 000 Sk pri p.a. 7%. Akú sumu bude mať na účte po 10 rokoch?

$$k_{10} = 10000.(1+0{,}07).\frac{(1+0{,}07)^{10}-1}{0{,}07} \doteq 147836$$

Pr.

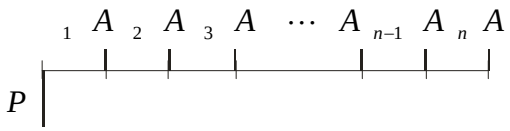
Akú sumu musí uložiť pán x na začiatku desiatich po sebe idúcich rokoch pri p.a. 10%, aby počnúc 11. rokom dostával 100 000 Sk po 10 rokov?

$$k(1+i)^{19} = R\frac{(1+i)^{10}-1}{i} \qquad k.1{,}1^{19} = 1000000(1{,}1^{10}-1)$$

$$k \doteq 260589{,}63$$

3. **umorovací počet**

- zaoberá sa splácaním úverov, pôžičiek a hypoték
- **umorovanie** – splácanie úrokovanej pôžičky



A - konštantné splátky (anuity)

$$P(1+i)^n = A\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$A = P\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$$

- **hodnota anuity**: $A = P\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$

$\boxed{\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}}$ > **polehotný umorovateľ**

Pr.

Obec si požičala 1 000 000 Sk na p.a. 8%. Pôžičku musí splatiť za 20 rokov konštantnými splátkami. Aká bude ich veľkosť?

$$A = 1000000.\frac{0{,}08}{1-\frac{1}{1{,}08^{20}}} \doteq 101852{,}2$$

Pr.

Pán X kúpil dom za 500 000 Sk, na ktoré dostal pôžičku pri p.a. 4%. Spláca A=50 000 Sk. Za koľko rokov splatí pôžičku?

$$50000 = \frac{0{,}04}{1-\frac{1}{1{,}04^n}}.500000 \qquad 0{,}1 = \frac{0{,}04}{1-\frac{1}{1{,}04^n}}$$

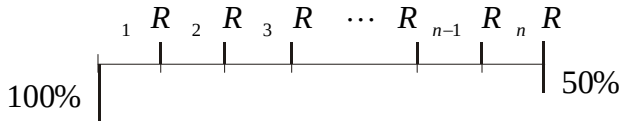
$$0{,}4 = 1-\frac{1}{1{,}04^n} \qquad 0{,}6 = \frac{1}{1{,}04^n} \qquad 1{,}04^n = \frac{1}{0{,}6}$$

$$\log 1{,}04^n = \log\frac{1}{0{,}6} \qquad n\log 1{,}04^n = \log\frac{1}{0{,}6}$$

$$n = 13{,}02$$

Pr. (dôležitý)

Stroj stráca opotrebovaním každý rok 7% svojej hodnoty, za aký čas klesne hodnota stroja na polovicu?



$$k_1 = k_0 - ik_0 = k_0(1-i)$$
$$k_2 = k_1 - ik_1 = k_1(1-i) = k_0(1-i)^2$$
$$k_3 = k_2 - ik_2 = k_2(1-i) = k_0(1-i)^3$$
$$\vdots$$
$$k_n = k_{n-1} - ik_{n-1} = k_{n-1}(1-i) = k_0(1-i)^n$$

$$\boxed{k_n = k_0(1-i)^n}$$

$$k_0 = 1, k_n = \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2} = 1.(1-0{,}07)^n$$
$$\tfrac{1}{2} = 0{,}93^n$$
$$\log\tfrac{1}{2} = n\log 0{,}93$$
$$n = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}93} \doteq 9{,}55$$

Cvičenia

1. Určite prvý a ôsmi člen postupnosti:

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad a_5 = 10, a_6 = 9$

2. Určite vzorcom pre n -tý člen:

a) $a_{n+1} = 2 - a_n \quad a_1 = 3$ b) $a_{n+2} = \frac{1}{2}(3a_{n+1} - a_n) \quad a_1 = 2, a_2 = 1$

3. Zistite monotónnosť:

a) $\left\{\frac{3n^2+6}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{2^n - 1\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\{tn\}_{n=1}^{\infty}, t \in R$

4. V aritmetickej postupnosti platí:

a) $a_1 + a_7 = 42, a_{10} - a_3 = 21$ určite a_1 a d b) poznáme a_5 a a_{13} vyjadrite a_1 a d

5. Na streche lichobežníkového tvaru sú škridle uložené tak, že na vrchu ich je 85 a v každom ďalšom rade ich je o jednu viac ako v predchádzajúcom. Koľkými škridlami je pokrytá strecha ak v rade pri odkvape ich je 100?

6. Medzi čísla 2 a 486 vložte štyri čísla, tak aby tvorili geometrickú postupnosť. Určite ich súčet.

7. Ak ku číslam 2, 7, 17 pripočítame to isté číslo, tak vzniknú prvé tri členy geometrickej postupnosti. Vypočítajte to číslo.

Neriešené úlohy

1. Určite rekurentný vzorec postupnosti:

$\{n(n-1)\}_{n=1}^{\infty}$

2. Nasledujúce postupnosti určite vzorcom pre n-tý člen:

a) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{n}{n+2}.a_n$ b) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

c) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{2}(3a_{n+1} - a_n)$ d) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n+2}{n}.\frac{1}{a_n}$

3. Zistite monotónnosť:

a) $\left\{\frac{3n^2+6}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\{n^2 - 6n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\{7n - n^2\}_{n=1}^{\infty}$

4. Určite všetky $t \in R$, pre ktoré sú nasledujúce postupnosti rastúce, resp. klesajúce:

a) $\{tn\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{\frac{tn}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$

5. V aritmetickej postupnosti poznáme a_5, a_{13}. Vyjadrite pomocou nich a_1 a d.

6. Určite a_1 a d v aritmetickej postupnosti, v ktorej platí:

a) $\begin{aligned} a_1 + a_5 &= 24 \\ a_2 a_3 &= 60 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} a_2 + a_4 &= 24 \\ a_3 : a_7 &= 3:8 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 4 \\ a_1^2 + a_2^2 &= 10 \end{aligned}$

7. Medzi čísla $\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}$ vložte tri čísla tak, aby s danými tvorili aritmetickú postupnosť.

8. Súčet troch čísel tvoriacich aritmetickú postupnosť je a, súčet ich druhých mocnín je b. Určite tie čísla.

9. Súčet štyroch čísel tvoriacich aritmetickú postupnosť je 1, súčet ich druhých mocnín je 0,3. Určite ich.

10. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky, ktorých dĺžky strán tvoria aritmetickú postupnosť.

11. Strany pravouhlého trojuholníka tvoria aritmetickú postupnosť. Určite ich dĺžku, ak polomer vpísanej kružnice je 7.

12. V geometrickej postupnosti poznáme a_5, a_{13}. Vyjadrite pomocou nich a_{11}.

13. Medzi čísla a^8 a b^8, kde $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$, vložte 7 čísel tak, aby vznikla geometrická postupnosť.

14. Medzi čísla 5 a 640 vložte toľko čísel, aby vznikla geometrická postupnosť a aby súčet vložených čísel bol 630. Určite vložené čísla.

15. Súčet prvých troch členov geometrickej postupnosti je 21, súčet ich druhých mocnín je 189. Určite ich.

16. V geometrickej postupnosti určite a_1, ak:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$$
$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 240$$

17. V geometrickej postupnosti určite a_1 a q, ak:

a) $\begin{aligned} a_1 + a_4 &= 18 \\ a_2 + a_3 &= 12 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 4 \\ a_2 - a_4 &= -24 \end{aligned}$

18. Vynálezca šachu žiadal od perzského šacha odmenu: na 1. pole šachovnice 1 zrnko pšenice, na 2. pole 2 zrnká a na každé ďalšie vždy dvojnásobok predošlého počtu. Koľko zŕn pšenice požadoval?

19. Ak k číslam 2, 7, 17 pripočítame to isté číslo, vznikne geometrická postupnosť. Určite to číslo.

20. Prvé tri členy aritmetickej postupnosti majú súčet 21. Ak prostredný zmenšíme o 1 a posledný zväčšíme o 6, vznikne geometrická postupnosť. Určite členy oboch postupností.

21. Povrch kvádra je 78 cm^2, súčet jeho rozmerov je 13 cm. Určite objem kvádra, ak jeho rozmery tvoria geometrickú postupnosť.

22. Dokážte, že číslo $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9$ je štvorec.

23. Riešte v R rovnicu: $1 + 7 + 13 + \cdots + x = 280$.

24. Určite súčet prvých 100 prirodzených čísel, ktorých zvyšok po delení piatimi je dva.

25. Nájdite všetky štvorice x, y, z, u nenulových reálnych čísel, ak viete, že x, y, z sú po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti, y, z, u sú po sebe idúce členy geometrickej postupnosti a platí $\mathrm{x} + \mathrm{u} = 37, \mathrm{y} + \mathrm{z} = 36$.

26. Čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 majú tú vlastnosť, že prvé tri tvoria geometrickú postupnosť a posledné štyri aritmetickú postupnosť. Určite ich, ak platí: $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 6$, $a_2 a_5 = 18$.

27. Ak trojciferné číslo N delíme jeho ciferným súčtom, dostaneme podiel 26. Ak napíšeme číslice čísla N v opačnom poradí, dostaneme číslo M, ktoré je o 396 väčšie ako N. Určite číslo N ak jeho číslice tvoria tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti.

9. LIMITA POSTUPNOSTI A NEKONEČNÉ RADY

1. Limita postupnosti
- definícia limity, konvergentná a divergentná postupnosť
- súvis konvergencie a ohraničenosti
- počet limít
- vety o limitách

2. Nekonečný rad
- pojem nekonečného radu, súčet radu
- konvergentný a divergentný rad
- nutná podmienka konvergencie
- operácie s nekonečnými radmi

3. Nekonečný geometrický rad
- definícia a súčet

4. Rady s nezápornými členmi
- porovnávacie kritérium

.....

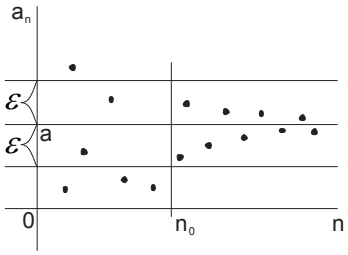
- **limita postupnosti**
  - limita je hranica
  - limitu postupnosti je číslo, ku ktorému sa približujú členy postupnosti, keď $n \to \infty$

Def.

Okolie bodu a nazývame každý interval $O(a) = (a - r, a + r); r \in R$, kde r je polomer okolia.

Def.

$a \in R$ je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in R\ \forall n \in N, n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$.



Pr.

Vypočítajte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$

- zvoľme si pár členov:

$a_{100} = 1{,}01 \qquad a_{1000} = 1{,}001 \qquad a_{100000} = 1{,}0001$

- vidno, že si zvyšujúcom n sa členy postupnosti blížia k 1
- predpokladajme, že limita bude 1 a vychádzajme z definície

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in R\ \forall n \in N, n > n_0 : \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \qquad \left|\frac{n+1-n}{n}\right| < \varepsilon \qquad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad 1 < \varepsilon n \qquad n_0 = \frac{1}{\varepsilon} < n$

> náš predpoklad bol správny, čiže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ a napr.: $\varepsilon = 0{,}01$ a $n_0 = 100$

Potom napr.: $a_{101} = 1{,}\overline{0099} \to |a_{101} - 1| = 0{,}\overline{0099} < 0{,}01$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1}$

$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \ldots$ predpokladajme limitu 2

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in R\ \forall n \in N, n > n_0 : \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon \qquad \left| \frac{2n-2n-2}{n+1} \right| < \varepsilon \qquad \left| \frac{-2}{n+1} \right| < \varepsilon$

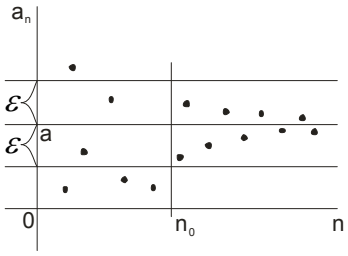
$\frac{2}{n+1} < \varepsilon \qquad 2 < \varepsilon(n+1) \qquad \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n \qquad n_0 = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} < n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ a napr.: $\varepsilon = 0{,}01$ a $n_0 = 199$

Potom napr.: $a_{200} \doteq 1{,}99 \to |a_{200} - 2| \doteq 0{,}0099 < 0{,}01$

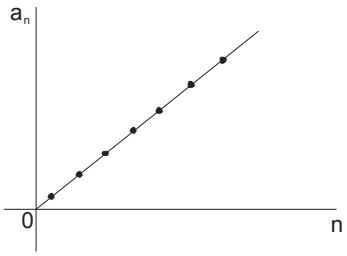
Def.

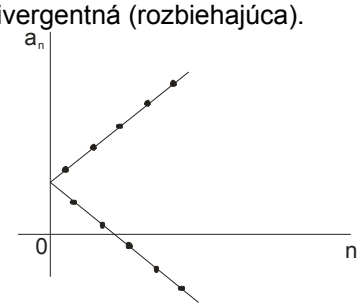
Postupnosť, ktorá má vlastnú limitu $a \in R$ (číslo rôzne od $\pm\infty$) sa nazýva konvergentná (zbiehajúca).



Def.

Postupnosť, ktorá nemá vlastnú limitu sa nazýva divergentná (rozbiehajúca).





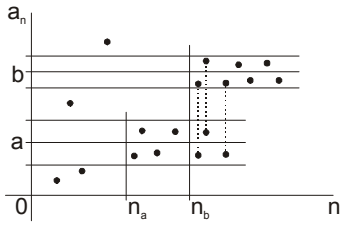
- členy idú do nekonečna

Veta

Postupnosť má najviac jednu limitu.

Dôkaz

- budeme dokazovať sporom: Existuje postupnosť, ktorá má aspoň dve rôzne limity.



- keďže takáto postupnosť má dve rôzne limity, označme si ich a a b
- a je limita, to znamená, že existujú $\varepsilon > 0$ a n_a také, že platí: $\forall n \in N, n > n_a : |a_n - a| < \varepsilon$ a tak isto δ a n_b, pre ktoré platí $\forall n \in N, n > n_b : |a_n - b| < \delta$

> z definície vyplýva, že ε, δ si môžeme zvoliť ľubovoľné, tak si zvoľme také, aby boli okolia $O(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ a $O(b) = (b - \delta, b + \delta)$ disjunktné

> platí $a \neq b$, teda aj $n_a \neq n_b$, nech teda $n_a < n_b$

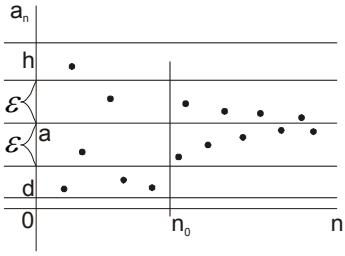
> takže všetky $a_n, n > n_a$ padnú do $O(a)$ a všetky $a_n, n > n_b$ do $O(b)$, ale mali by byť aj v $O(a)$

> z poznatku, že postupnosť je funkcia a funkcia nemôže mať pre jedno x dve rôzne y je tvrdenie, že postupnosť má dve rôzne limity, nepravdivé, čiže veta je pravdivá a tým je dôkaz skončený

Veta

Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

Dôkaz

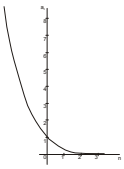


- keďže postupnosť je konvergentná, to znamená, že má limitu a a existuje $O(a)$, čiže aj $\varepsilon > 0$ a n_0
- je zrejmé, že členy $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tvoria konečnú množinu a tá je ohraničená a členy $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ patria do okolia $O(a)$, takže tvoria nekonečnú ohraničenú množinu
- potom pre celú postupnosť bude platiť:
  a) $h = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a + \varepsilon\}$
  b) $d = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a - \varepsilon\}$

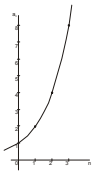
- opačné tvrdenie, že každá ohraničená postupnosť je konvergentná nie je správne, existujú ohraničené postupnosti, ktoré sú divergentné napr.: $a_n = (-1)^n, n \in N$

Veta

1. Majme postupnosť $\{c\}_{n=1}^{\infty}, c \in R$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$
2. Majme postupnosť $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
3. Majme postupnosť $\{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
4. Majme postupnosť $\{\frac{1}{n^k}\}_{n=1}^{\infty}, k \in N$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
5. Majme postupnosť $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}, q \in R$, potom platí:
   a) $q < -1$ … postupnosť je divergentná (napr.: $q = -2 \ldots -2, 4, -8, 16, \ldots$)
   b) $q = -1$ … postupnosť je divergentná
   c) $q \in (-1,1) \ldots \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$



   d) $q = 1 \ldots \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$
   e) $q > 1 \ldots \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$



Dôkaz

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in R\ \forall n \in N, n > n_0 : \left| q^n - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| q^n - 0 \right| < \varepsilon \qquad |q|^n < \varepsilon \qquad \log|q|^n < \log\varepsilon$$

$$n \log|q| < \log\varepsilon \qquad n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|} = n_0$$

Veta

Nech postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné, nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ a nech $c \in R$. Potom sú konvergentné aj postupnosti $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}; \{c.a_n\}_{n=1}^{\infty}; \{a_n.b_n\}_{n=1}^{\infty}$; $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}, b_n \neq 0, b \neq 0$ a platí:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(c.a_n) = c.\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ca$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n.\lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0$

Pr.

Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(5.\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 5.\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 5.0 = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^2-3n}{5n^2+6} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7-3.\frac{1}{n}}{5+6.\frac{1}{n^2}} = \frac{7}{5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n-7}{2n^2-30n} = \frac{3}{2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5-n^4}{n^6-n^5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{0-0}{1-0} = 0$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-5}{10n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-5.\frac{1}{n}}{10.\frac{1}{n}+4.\frac{1}{n^2}} = \infty$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$

h*) **pozor!** postupujme inak: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + 2.\frac{1}{n^2} + 3.\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 0$; vidíme, že vlastnosť 1., z predchádzajúcej vety, sa nedá použiť na nekonečne veľa členov

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+(2n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n(2n-1+1)}{2}}{\frac{n(2n+1)}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{2n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{n}} = 1$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3.2^n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n} + 3\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty} 3 == \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 0 + 3 = 3$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+2^{n+1}}{3^n-2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2.\frac{2^n}{3^n}}{1-\frac{1}{2}.\frac{2^n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2.\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1+0}{1-0} = 1$

- vidíme, že keď máme limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, tak sú tri možnosti:

1. v čitateli aj menovateli je rovnaký stupeň n, tak daná limita je vlastná je rovná podielu koeficientov pri najvyššom stupni n
2. v menovateli je stupeň n vyšší, tak limita bude vlastná a rovná 0
3. v čitateli je stupeň n vyšší, tak limita bude nevlastná a rovná ∞

Pr.

Zistite, pre ktoré $a \in R$ sú postupnosti konvergentné:

a) $\left\{\frac{a+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a+1}{n} = \lim_{n\to\infty}(a+1).\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}(a+1).\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = (a+1).\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$$
$$= (a+1).0 = 0; a \in R$$

b) $\left\{\left(\frac{a-1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} q^n \qquad |q| < 1 \to \left|\frac{a-1}{2}\right| < 1$$
$$\frac{|a-1|}{2} < 1 \qquad |a-1| < 2 \qquad a \in (-1,3) \ldots \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-1}{2}\right)^n = 0$$

Veta

Ak je postupnosť ohraničená a monotónna, tak je konvergentná.
(dôkaz je triviálny, ponecháva sa na čitateľa)

Def.

Reálne čísla sú limity monotónnych ohraničených postupností racionálnych čísel.

- skúmajme postupnosť $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_1 = 2; a_2 = 2{,}25; a_3 = 2{,}\overline{370}; a_4 = 2{,}44140625; a_5 = 2{,}44832; \ldots$$

> vidíme, že je rastúca a bude zhora ohraničená 3 a zdola napr.: 1,9; teda z predchádzajúcej vety vyplýva, že postupnosť konverguje:

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

- e je iracionálne číslo, nazýva sa Eulerove číslo a platí

$$e = 2{,}71828182845904523536028747135 27$$

- číslo e môžeme vypočítať s ľubovoľnou presnosťou takto:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$ (nekonečný rad)

- **nekonečný rad**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$ - je to pokyn sčítať nekonečne veľa čísel

Def.

Nekonečný rad je každý zápis tvaru $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in R$.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots = ?$$
$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = ?$$
$$0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

> pri niektorých nekonečných radoch vieme určiť súčet hneď a pri iných nie, preto nás bude zaujímať, či existuje vzorec pre súčet nekonečného radu

- skúmajme takýto nekonečný rad: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

1. skúsme použiť asociatívny zákon: $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$
2. teraz použijeme distributívny zákon: $1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1$

- vidíme, že pre nekonečne veľa čísel nie je možné takto uvažovať

- nemôžme vopred predpokladať, že súčet nejaké nekonečného radu existuje, pretože by tak isto mohol vzniknúť rozpor napr.:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = s$$

> upravme si tento rad takto: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots)$

> potom platí: $1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = s$, všimnime si nekonečný rad v zátvorke, je to ten pôvodný a rovná sa s, teda $1 - s = s$ a potom $s = \frac{1}{2}$, takže súčet je racionálne číslo, ale to nie je možné > predpoklad, že existuje súčet bol zlý

- zistili sme, že nekonečný rad nemusíme vedieť sčítať, nepomôžu nám ani rôzne kombinácie uzátvorkovania, to znamená, že pri sčítaní nekonečného radu musíme použiť inú metódu

> každému nekonečnému radu môžeme priradiť **postupnosť čiastočných súčtov**

> majme nekonečný rad $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, priraďme mu postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$
$$\vdots$$

- ak postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastnú limitu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, tak súčet radu je jej rovný

<u>Def.</u>

Nekonečný rad sa nazýva konvergentný, ak postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu, ktorá je súčtom nekonečného radu. V opačnom prípade je nekonečný rad divergentný

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s}$$

<u>Pr.</u>

Zistite, či je nekonečný rad konvergentný, ak áno, určite jeho súčet:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$

$$0 + 0 + 0 + \cdots$$
$$s_1 = 0,\ s_2 = 0 + 0 = 0,\ s_3 = 0 + 0 + 0 = 0, \ldots, s_n = \overbrace{0 + 0 + \cdots + 0}^{n} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = s$$

konvergentný, $s = 0$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$$
$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 + 2 = 3, \ldots,\ s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2} = \tfrac{1}{2}\left(n^2 + n\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\left(n^2 + n\right)\right] = \tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(n^2 + n\right) = \infty$$

divergentný

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2}^n$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} + \cdots$$
$$s_1 = \tfrac{1}{2},\ s_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}, \ldots,\ s_n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1 - 0 = 1 = s$$

konvergentný, $s = 1$

- ak sa členy radu zväčšujú, rad je divergentný

Veta (nutná podmienka konvergencie)

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (členy nek. radu tvoria postupnosť s limitou 0).

- taktiež platí, že ak $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tak nekonečný rad diverguje; ale neplatí obrátené tvrdenie: ak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak nekonečný rad konverguje

Veta

Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné a nech $c \in R$. Potom sú konvergentné aj rady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n), \sum_{n=1}^{\infty} c.a_n$ a platí:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c.\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Dôkaz

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots = (a_1 + a_2 + \cdots) \pm (b_1 + b_2 + \cdots) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = ca_1 + ca_2 + \cdots = c(a_1 + a_2 + \cdots) = c.\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- táto operácia sa dá dokázať aj takto:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$t_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = cs_n$$
$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = c.\lim_{n\to\infty} s_n \ldots \sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c.\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- **nekonečný geometrický rad**

Def.

Nekonečný rad sa nazýva geometrický, ak jeho členy tvoria geometrickú postupnosť.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1.q^{n-1} = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \cdots}$$

- ďalej nás bude zaujímať súčet nekonečného geometrického radu, skúmajme pár radov:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ > členy sa zmenšujú, môže mať súčet

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 4 + 8 + \cdots$ > členy idú do nekonečna, nemá súčet

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ > môže mať súčet

Veta

Ak nekonečný geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_1.q^{n-1}$ má kvocient taký, že platí $|q|<1$, tak je konvergentný a jeho súčet je $s=\frac{a_1}{1-q}$.

Dôkaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1.q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots \qquad s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q, \ldots, s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n-1}{q-1} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_1}{q-1}\left(q^n-1\right)\right] = \frac{a_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}\left(q^n-1\right) = \frac{a_1}{q-1}\left[\underbrace{\overbrace{\lim_{n\to\infty} q^n}^{|q|<1} - \lim_{n\to\infty} 1}_{-1}\right] = \frac{a_1}{1-q} = s$$

Pr.

Zistite konvergenciu a určite súčet:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots \qquad q = \frac{1}{3} \ldots |q| = \frac{1}{3} < 1 \ldots \; s = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

konvergentný $s = \frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \cdots \qquad q = \frac{3}{2} \ldots |q| = \frac{3}{2} > 1$$

divergentný

Pr.

Určite obor konvergencie a súčet:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots \qquad q = \frac{1}{x}$$

$$|q| < 1 \qquad \left|\frac{1}{x}\right| < 1 \qquad \frac{1}{|x|} < 1 \qquad 1 < |x|$$

$$K = R - (-1,1) \qquad s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots \qquad q = \frac{x}{2}$$

$$|q| < 1 \qquad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \qquad \frac{|x|}{2} < 1 \qquad |x| < 2$$

$$K = (-2,2) \qquad s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2-x}$$

Pr.

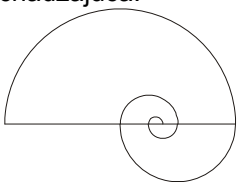
Zapíšte periodické číslo $0,\overline{13}$ v tvare $\frac{p}{q}; p,q \in; ZD(p,q) = 1$

$$0,131313\ldots = \frac{13}{100} + \frac{13}{10000} + \frac{13}{1000000} + \cdots \qquad q = \frac{1}{100}$$

$$0,\overline{13} = \frac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{13}{99}$$

Pr.

Vypočítajte dĺžku špirály, vzniknutej z polkružníc, pričom každá má dvakrát menší polomer ako predchádzajúca.



$l_1 = \pi a$

$l_2 = \frac{\pi a}{2}$

$l_3 = \frac{\pi a}{4}$

$\vdots$

$l = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots = \pi a + \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi a}{4} + \cdots$

$q = \frac{1}{2} \qquad |q| = \frac{1}{2} < 1$

$s = \frac{\pi a}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi a$

- **<u>rady s nezápornými členmi</u>**

- sú to nekonečné rady, ktorých členy sú kladné čísla

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ zostrojme postupnosť čiastočných súčtov:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2 \geq s_1$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq s_2$

$\vdots$

$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots$ - bude to neklesajúca postupnosť a ak je **zhora ohraničená**, tak **rad konverguje**

Pr.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

$$s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

je zhora ohraničený, tak je konvergentný

- harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ je divergentný (jeho členy klesajú „pomaly“)

- člen medzi členmi x a y vypočítame takto: $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ (napr.: $\frac{1}{3} = \frac{2}{2+4}$)

> ale rad vzniknutý z neho: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots, k > 1$ bude **konvergentný** a rad

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots, k < 1$ je **divergentný**

<u>Veta</u> (porovnávacie kritérium / PK)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú také rady, že platí: $\forall n \in N : 0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí, že ak konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôkaz

$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$s_n \leq t_n$

Ak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť, teda $\exists\, k \geq 0\, \forall n \in N : t_n \leq k$.

Potom ale platí aj $\forall n \in N : s_n \leq k$, čiže aj $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

> platí aj tvrdenie: Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú také rady, že platí: $\forall n \in N : 0 \le a_n \le b_n$. Potom platí, že ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak diverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Pr.

Skúmajte konvergenciu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $\quad a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\quad k = \frac{3}{2} > 1$ $\quad$ konvergentný

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6}$ $\quad a_n = \frac{1}{n^2+6} \le \frac{1}{n^2}$ $\quad k = \frac{3}{2} > 1$ $\quad$ použili sme PK; vidíme, že rad je konvergentný

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n^2-4}$ - v tomto rade bude konečný počet záporných členov, to znamená, že môžeme použiť PK

$a_n = \frac{2n}{2n^2-4} \le \frac{2n}{2n^2-n^2} = \frac{2n}{n^2} = 2.\frac{1}{n}$ - dostali sme sa k divergentnému harmonickému radu, takže aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n^2-4}$ je divergentný

Pr.

Nech s je súčet nekonečného geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_1 = 1$. Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots = 1 + q + q^2 + \cdots$$

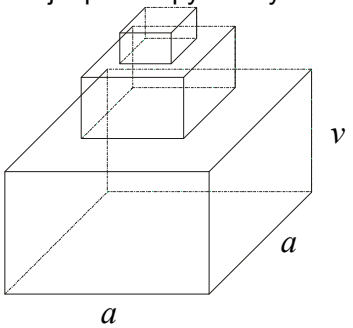
$$s_1 = s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad q = 1 - \frac{1}{s}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2} = a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2} + \cdots = a_1^{\ 2} + a_1^{\ 2} q^2 + a_1^{\ 2} q^4 + \cdots = 1 + q^2 + q^4 + \cdots$$

$$s_2 = \frac{a_1^{\ 2}}{1-q^2} = \frac{1^2}{1-q^2} = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1+q} = s \cdot \frac{1}{1+q} = \frac{s}{1+1-\frac{1}{s}} = \frac{s}{2-\frac{1}{s}}$$

Pr.

Pyramídu tvoria kvádre postavené na seba. Prvý má hranu štvorcovej podstavy a a výšku v. Každý nasledujúci má hranu podstavy o 10% menšiu ako predchádzajúci a polovičnú výšku. Vypočítajte povrch pyramídy.



$$S = 2a_1^{\ 2} + \underbrace{4a_1 v_1 + 4a_2 v_2 + 4a_2 v_2 + \cdots}_{nekoneček\ geometrický\ rad}$$

$$a_2 v_2 = 0{,}9 a_1 \frac{v_1}{2} = q a_1 v_1 \qquad q = \frac{9}{20}$$

$$s = \frac{4a_1 v_1}{1-q} = \frac{4av}{1-\frac{9}{20}} = \frac{80av}{11}$$

$$S = 2a_1^{\ 2} + s = 2a_1^{\ 2} + \frac{80av}{11}$$

Cvičenia

1. Zistite, či je nekonečný rad konvergentný, ak áno, určite jeho súčet:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

2. Zistite konvergenciu a určite súčet:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}}$

3. Riešte v R:

$1-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{27}{x^3}+\cdots=\frac{8}{x+10}$

4. Je daný štvorec so stranou a, stredy jeho strán tvoria nový štvorec, ktorého stredy strán tvoria nový štvorec, atď. Určite súčty obsahov a obvodov všetkých takýchto štvorcov.

5. Prvý člen nekonečného geometrického radu $a_1 = 1$. Každý člen radu sa rovná súčtu všetkých nasledujúcich členov. Určite súčet a kvocient radu.

Neriešené úlohy

1. Vypočítajte:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n-2)^2}{n^2(n+3)}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-8n^2+9}{3n^3}$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$ f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}}; |a|<1$ g) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n}$ h) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{3-2^n}$ i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+5^n}{1-5^{n+1}}$

j) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3^{n+1}}{3^n-2^{n+1}}$

2. Zistite, pre ktoré $a \in R$ konverguje postupnosť:

a) $\left\{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{\left(\frac{a+2}{4}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\left\{\left(\frac{2}{a+1}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. Riešte v R:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-1} = \frac{4x-3}{3x-4}$ b) $1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}+\cdots=\frac{6}{x+5}$

4. Vyjadrite v tvare zlomku v základnom tvare:

a) $0,\overline{13}$ b) $3,\overline{142}$ c) $4,7\overline{25}$ d) $28,37\overline{265}$

5. Zlomok $\frac{1}{1-2x}$ možno považovať za súčet geometrického radu. Napíšte tento rad a určite podmienku pre číslo x.

6. Nahraďte zlomok $\frac{m}{m-x}$ nekonečným geometrickým radom a určite vzťah medzi m a x.

7. Do štvorca so stranou a vpíšeme kruh, do neho štvorec, do neho kruh atď. Vypočítajte:

a) súčet obsahov všetkých štvorcov
b) súčet obsahov všetkých kruhov

8. Do kocky s hranou a vpíšeme guľu, do nej kocku, do nej guľu atď. Vypočítajte:

a) súčet objemov všetkých kociek
b) súčet povrchov všetkých gúľ

9. Je daný rovnostranný trojuholník so stranou a. Stredy jeho strán sú vrcholmi ďalšieho trojuholníka, stredy jeho strán ďalšieho atď. Vypočítajte súčet obsahov všetkých takýchto trojuholníkov.

10. Nekonečný geometrický rad má súčet 22. Prvý člen sa rovná desaťnásobku súčtu všetkých nasledujúcich členov. Určite prvý člen a kvocient radu.

11. Medzi každé dva členy nekonečného geometrického radu $1+a+a^2+\cdots;\ a\in R$, ktorý je konvergentný, vložíme po jednom čísle tak, že spolu s pôvodnými číslami tvoria opäť nekonečný geometrický rad. Zistite, či bude konvergentný a určite jeho súčet.

12. Strany pravouhlého trojuholníka tvoria tri za sebou nasledujúce členy aritmetickej postupnosti. Jedna odvesna je riešením rovnice $\frac{x}{7}+\frac{x^2}{49}+\frac{x^3}{343}+\cdots=6$. Určite strany trojuholníka.

10. LIMITA A DERIVÁCIA FUNKCIE

1. Limita funkcie
- pojem limity, definícia limity
- počet limít, vety o limitách
- limity jednotlivých typov funkcií
- limity v bodoch $\pm\infty$, jednostranné limity

2. Derivácia funkcie v bode
- dotyčnica
- vznik derivácie
- derivácia funkcie v bode
- význam derivácie - geometrický, fyzikálny
- derivácia elementárnych funkcií
- vety o deriváciách - derivácia súčtu, rozdielu, súčinu, podielu
- derivácia zloženej funkcie
- derivácia exponenciálnej, logaritmickej a mocninovej funkcie
- L' Hospitalovo pravidlo

.....

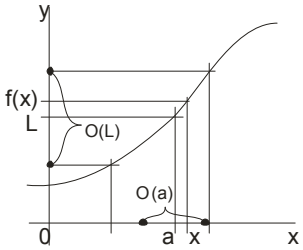
- <u>limita funkcie</u>

<u>Def.</u>

Okolie bodu a nazývame každý interval $O(a) = (a-r, a+r); r \in R$, kde r je polomer okolia.

<u>Def.</u>

Funkcia f má v bode a limitu L práve vtedy, keď $\forall O(L) \exists O(a) \forall x \in O(a), x \neq a : f(x) \in O(L)$
$(\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall O(L) \exists O(a) \forall x \in O(a) - \{a\} : f(x) \in O(L))$



<u>Pr.</u>

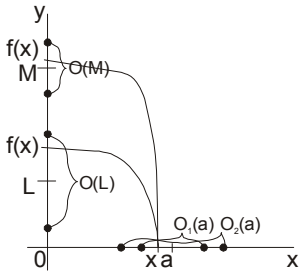
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

<u>Veta</u>

Každá funkcia má v každom bode najviac jednu limitu.

Dôkaz

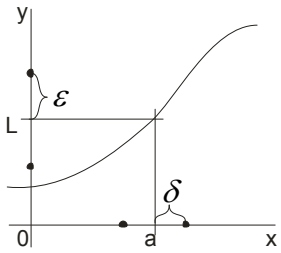
- robí sa podobne ako pri limite postupnosti, čiže sporom: Existuje funkcia, ktorá má v bode a dve rôzne limity L, M



- potom z definície existujú disjunktné okolia $O(L), O(M)$, potom pre $O(L)$ existuje $O_1(a)$ a pre $O(M)$ existuje $O_2(a)$
- zvoľme si $x, x \in O_1(a) \wedge x \in O_2(a)$, teda $f(x) \in O(L)$ a $f(x) \in O(M)$, čo nie je možné, pretože funkcia jednému x nemôže priradiť dve rôzne y , takže veta platí

Def. (Cauchyho)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \underset{df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in R - \{a\} : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Veta

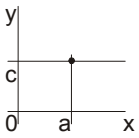
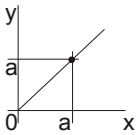
Nech $\lim_{x\to a} f(x) = L$ a $\lim_{x\to a} g(x) = M$, potom aj funkcie $f(x) \pm g(x);\ f(x).g(x); c.f(x);$ $\frac{f(x)}{g(x)}, M \neq 0$ majú v bode a limitu a platí:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$$

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = L.M$$

$$\lim_{x\to a}(c.f(x)) = c.\lim_{x\to a} f(x) = c.L$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Limita funkcie $f(x)$	**Dôkaz**
1. $f: y = c \ldots \lim_{x\to a} f(x) = c \ldots \lim_{x\to a} c = c$	
2. $f: y = x \ldots \lim_{x\to a} f(x) = a \ldots \lim_{x\to a} x = a$	
3. $f: y = x^2 \ldots \lim_{x\to a} f(x) = a^2 \ldots \lim_{x\to a} x^2 = a^2$	$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x.x) = \lim_{x\to a} x.\lim_{x\to a} x = a.a = a^2$
4. $f: y = x^n \ldots \lim_{x\to a} f(x) = a^n \ldots \lim_{x\to a} x^n = a^n$ $n \in N$	1. $n = 1 \ldots \lim_{x\to a} x^1 = a$ platí 2. $\forall k \in N : \lim_{x\to a} x^k = a^k \Rightarrow \lim_{x\to a} x^{k+1} = a^{k+1}$ $\lim_{x\to a} x^{k+1} = \lim_{x\to a}(x^k.x) = \lim_{x\to a} x^k.\lim_{x\to a} x =$ $= a^k.a = a^{k+1}$
5. $f: y = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \ldots \lim_{x\to a} f(x) =$ $= a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0 \ldots \lim_{x\to a}(a_n x^n + \cdots +$ $+ a_1 x + a_0) = a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0 = f(a)$	$\lim_{x\to a}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to a}(a_n x^n) +$ $+ \cdots + \lim_{x\to a}(a_1 x) + \lim_{x\to a}(a_0) = a_n \lim_{x\to a} x^n +$ $+ \cdots + a_1 \lim_{x\to a} x + a_0 \lim_{x\to a} 1 = a_n a^n + \cdots +$ $+ a_1 a + a_0 = f(a)$

6. $f: y = x^r \ldots \lim\limits_{x\to a} f(x) = a^r \ldots \lim\limits_{x\to a} x^r = a^r$ podobne ako pre obor prirodzených čísel $r \in R$

- nasledujúce limity funkcií si uvedieme bez dôkazu:

7. $f: y = b^x \ldots \lim\limits_{x\to a} f(x) = b^a \ldots \lim\limits_{x\to a} b^x = b^a$

8. $f: y = \log_z x \ldots \lim\limits_{x\to a} f(x) = \log_z a \ldots \lim\limits_{x\to a} \log_z x = \log_z a$
$a > 0$

9. $f: y = \sin x \ldots \lim\limits_{x\to a} f(x) = \sin a \ldots \lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$

10. $f: y = \cos x \ldots \lim\limits_{x\to a} f(x) = \cos a \ldots \lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

11. $f: y = \mathrm{tg} x \ldots \lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{tg} a \ldots \lim\limits_{x\to a} \mathrm{tg} x = \mathrm{tg} a$
$a \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$

12. $f: y = \mathrm{cotg} x \ldots \lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{cotg} a \ldots \lim\limits_{x\to a} \mathrm{cotg} x = \mathrm{cotg} a$
$a \neq k\pi$

13. $f: y = \frac{\sin x}{x} \ldots \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \ldots \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

<u>Veta</u>

Ak $f(x)$ je polynomická funkcia, tak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

<u>Pr.</u>

Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2 + 3x - 1\right) = 2.1^2 + 3.1 - 1 = 4$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-4x}{x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-4x\right)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+5)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{x} = 2.\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 2.1.1 = 2$

alebo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{2x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} = 2.\lim\limits_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2.1 = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{6x} = \frac{1}{2}.\lim\limits_{3x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{1}{2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x.\mathrm{cotg} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x.\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$

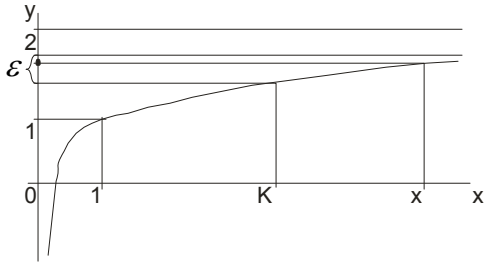
f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin 2x}{2x}}{\frac{6\sin 6x}{6x}} = \frac{2.\lim\limits_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{6.\lim\limits_{6x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x}} = \frac{1}{3}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}+2\right) = 4$

Def.

Funkcia f má v bode ∞ limitu L práve vtedy, keď $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in R \forall x > K : |f(x) - L| < \varepsilon$.

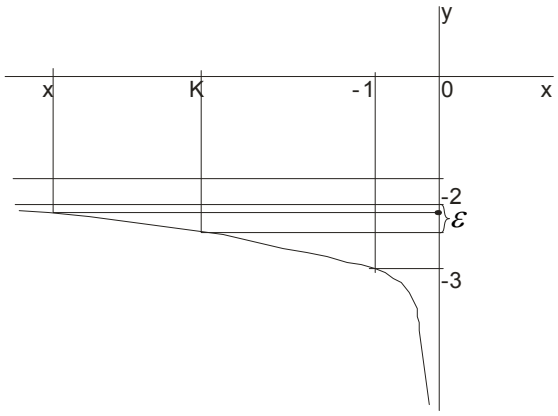
$$f : y = 2 - \tfrac{1}{x}; x \in (0, \infty) \ldots \lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$



Def.

Funkcia f má v bode $-\infty$ limitu L práve vtedy, keď $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in R \forall x < K : |f(x) - L| < \varepsilon$.

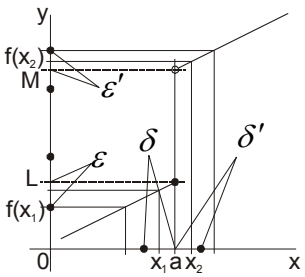
$$f : y = -2 + \tfrac{1}{x}; x \in (-\infty, 0) \ldots \lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$



1. $f : y = c \ldots \lim_{x \to \infty} f(x) = c \ldots \lim_{x \to \infty} c = c$
2. $f : y = \frac{1}{x} \ldots \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \ldots \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
3. $f : y = \frac{1}{x^n} \ldots \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \ldots \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$
4. $f : y = e^x \ldots \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \ldots \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$
5. $f : y = e^x \ldots \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \ldots \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Pr.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+1}{2x^3+5} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{5}{x^3}} = \frac{\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x \to \infty}\left(2+5.\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{2}$$



Def. (limita zľava)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a) : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Def. (limita zprava)

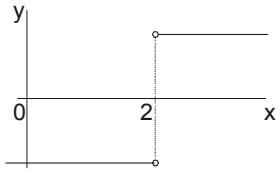
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = M \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0 \forall x \in (a, a+\delta') : |f(x) - M| < \varepsilon'$$

- platí aj tvrdenie: $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \left(\left(\exists \lim_{x\to a^-} f(x) \wedge \exists \lim_{x\to a^+} f(x)\right) \wedge \left(\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L\right)\right)$

Pr.

Nájdite limitu $y = \frac{x-2}{|x-2|}, a = 2$:

- je zrejmé, že $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{|x-2|}$ nebude existovať



1. $(-\infty, 2) \ldots y = \frac{x-2}{2-x} = -1 \ldots \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = -1$
2. $(2, \infty) \ldots y = \frac{x-2}{x-2} = 1 \ldots \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1$

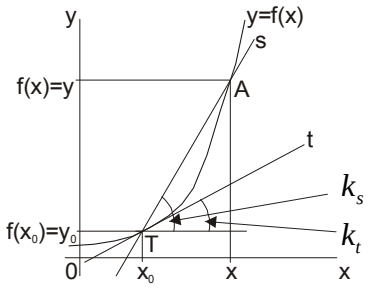
Def.

Funkcia f je v bode a spojitá, ak $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

- bod odstrániteľnej nespojitosti je bod a, v ktorom funkcia nie je definovaná, ale existuje v tomto bode limita, tak dodefinujeme $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

- derivácia funkcie

- dotyčnica ku grafu funkcie v bode je priamka, ktorá má s funkciou spoločný len jeden bod



- majme funkciu $y = f(x)$ a bod $T[x_0, y_0]$, v bode T chceme zostrojiť dotyčnicu ku funkcii, zvoľme si ďalší bod $A[x, y]$ a zostrojme sečnicu funkcie vedenú bodmi A a T
- sečnica bude mať rovnicu $s: y = k_s x + q$, kde k_s je smernica priamky a je to tangens uhla, ktorý zviera priamka s osou x, čiže $k_s = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- bude platiť, že ak sa bod A bude blížiť ku bodu T, teda $x \to x_0$, tak sa sečnica bude približovať ku dotyčnici, teda $k_s \to k_t$
- rovnica dotyčnice bude $t: y = k_t x + q$, takže pre bod $T[x_0, y_0]$ bude platiť $y_0 = k_t x_0 + q$, potom $q = y_0 - k_t x_0$ a pre dotyčnicu $t: y = k_t x - k_t x_0 + y_0$
- z toho dostávame vzorec pre výpočet dotyčnice v bode $T[x_0, y_0]$:

$$\boxed{t: y - y_0 = k(x - x_0)}$$

Pr.

Napíšte rovnicu dotyčnice k funkcii $y = x^2$ v bode $T[1,?]$:

$$f(1) = 1 \ldots T[1,1]$$
$$t: y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - 1 = k(x - 1)$$

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$
$$x \to 1 \Rightarrow k_s = x + 1 \to 2 = k_t$$
$$y - 1 = 2(x - 1)$$
$$t: 2x - y - 1 = 0$$

- použitím limity dostávame $k = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- derivácia vznikla pre potreby matematiky a fyziky, pretože derivácia funkcie v bode udáva smernicu dotyčnice ku grafu v tomto bode, čo prináša využitie vo fyzike; ale rôzne vlastnosti derivácie a ich aplikácie nám pomáhajú pri zostrojovaní priebehu funkcie (ten si ukážeme v nasledujúcej kapitole)

Def.

Derivácia funkcie f v bode x_0 je číslo $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

($f'(x_0)$ „f x nula derivované“)

- ak má funkcia v bode x_0 deriváciu, hovoríme, že je diferencovateľná v bode x_0

- geometrický význam derivácie je, že $f'(x_0)$ určuje smernicu dotyčnice, potom pre vzorec platí:

$$\boxed{t: y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)}$$

- fyzikálny význam: derivácia dráhy je okamžitá rýchlosť $s'(t_0) = v(t_0)$; derivácia rýchlosti je zrýchlenie $v'(t_0) = a(t_0)$; derivácia hybnosti je sila $p'(t_0) = F(t_0)$

Pr.

Vypočítajte deriváciu:

a) $y = \frac{2x+1}{x-2}, x_0 = 3$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{2x+1}{x-2} - 7}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x+1-7x+14}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-5x+15}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-5(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{-5}{x-2} = -5$$

b) $y = x^2 + 4x + 2, x_0 = 2$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+4x+2-14}{x-2} \lim_{x \to 2} \frac{x^2+4x+2-14}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+4x-12}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+6)}{x-2} =$$
$$= \lim_{x \to 2} (x+6) = 8$$

Veta

Ak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 deriváciu, tak je v bode x_0 spojitá.

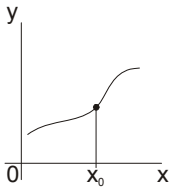
$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dôkaz

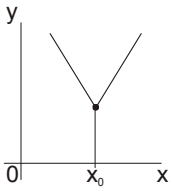
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_0) + f(x_0)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0)\right] =$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\lim_{x\to x_0}(x-x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) = f'(x_0).0 + f(x_0) = f(x_0)$$

- tvrdenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \exists f'(x_0)$ platiť nebude



$f'(x_0)$ existuje

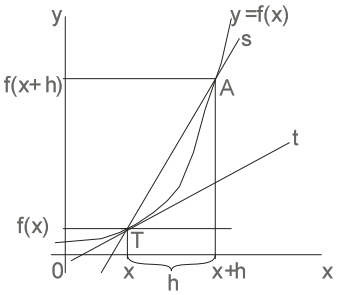


$f'(x_0)$ neexistuje

- derivácie funkcie v bode je číslo a **derivácia funkcie je funkcia**

<u>Def.</u>

Derivácia funkcie $f(x)$ je funkcia $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.



Derivácia funkcie	Dôkaz
1. $f: y = c \ldots f'(x) = 0 \ldots [c]' = 0$	$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$
2. $f: y = x \ldots f'(x) = 1 \ldots [x]' = 1$	$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} =$ $= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$
3. $f: y = x^2 \ldots f'(x) = 2x \ldots [x^2]' = 2x$	$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} =$ $= \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$
4. $f: y = x^3 \ldots f'(x) = 3x^2 \ldots [x^3]' = 3x^2$	$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} =$ $= \lim_{h\to 0}\frac{3hx^2+3h^2x+h^3}{h} =$ $= \lim_{h\to 0}(3x^2+3hx+h^2) = 3x^2$
5. $f: y = x^n \ldots f'(x) = nx^{n-1} \ldots [x^n]' = nx^{n-1}$ $n \in N$	$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}.h + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + n.x^{n-1}.h + \cdots + h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(n.x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}.h + = \right.$$

$$\left. + \cdots + h^{n-1}\right) = n.x^{n-1}$$

6. $f : y = \sin x \ldots f'(x) = \cos x \ldots [\sin x]' = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).\sin\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

7. $f : y = \cos x \ldots f'(x) = -\sin x \ldots [\cos x]' = -\sin x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right).\sin\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x$$

8. <u>Veta</u>

Nech funkcia f má deriváciu v bode x a nech $c \in R$, potom aj funkcia $c.f$ má deriváciu v bode x a platí: $[c.f(x)]' = c.f'(x)$.

Dôkaz

$$[c.f(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{c.f(x+h) - c.f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c.\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c.\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c.f'(x)$$

9. <u>Veta</u>

Nech funkcie f, g majú deriváciu v bode x, potom aj funkcie $f \pm g$ majú deriváciu v bode x a platí: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

Dôkaz

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - g(x+h) - f(x) + g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) - g'(x)$$

10. <u>Veta</u>

Nech funkcie f, g majú deriváciu v bode x, potom aj funkcia $f.g$ má deriváciu v bode x a platí: $[f(x).g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Dôkaz

$$[f(x).g(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x) - f(x)g(x+h.) + f(x)g(x+h.)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x)g(x+h.) + f(x)g(x+h.) - f(x).g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.g(x+h.) +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h.) - g(x)}{h}.f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.\lim_{h\to 0} g(x+h.) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h.) - g(x)}{h}.\lim_{h\to 0} f(x) =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

11. <u>Veta</u>

Nech funkcie $f, g;\ \forall x \in R : g(x) \neq 0$ majú deriváciu v bode x, potom aj funkcia $\frac{f}{g}$ má deriváciu v bode x a platí: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Dôkaz

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x+h)} + \frac{f(x)}{g(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x+h)} + \frac{f(x)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h)}}{h} + \lim_{h\to 0} f(x).\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)} - \lim_{h\to 0} f(x).\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h).g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

12. <u>Veta</u>

Nech funkcia $g;\ \forall x \in R : g(x) \neq 0$ má deriváciu v bode x, potom aj funkcia $\frac{1}{g}$ má deriváciu v bode x a platí: $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

Dôkaz

- použijeme predchádzajúcu vetu:

$f(x) = 1, g(x)$

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{0.g(x) - 1g'(x)}{g^2(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Derivácia funkcie	**Dôkaz**
13. $f : y = \mathrm{tg}x \ldots f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \ldots [\mathrm{tg}x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$	$f'(x) = [\mathrm{tg}x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' =$ $= \frac{[\sin x]'.\cos x - \sin x.[\cos x]'}{\cos^2 x} =$ $= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
14. $f : y = \mathrm{cotg}x \ldots f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \ldots [\mathrm{cotg}x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $x \neq k\pi$	$f'(x) = [\mathrm{cotg}x]' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' =$ $= \frac{[\cos x]'.\sin x - \cos x.[\sin x]'}{\cos^2 x} =$ $= \frac{-(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$
15. $f : y = x^n \ldots f'(x) = nx^{n-1} \ldots [x^n]' = nx^{n-1}$ $n = -k; k \in N$	$f'(x) = [x^n]' = [x^{-k}]' = \left[\frac{1}{x^k}\right]' =$ $= \frac{-[x^k]'}{x^{2k}} = \frac{-kx^{k-1}}{x^{2k}} =$ $= (-k).x^{k-1-2k} = (-k).x^{-k-1} =$ $= nx^{n-1}$

<u>Pr.</u>

Derivujte:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ $\qquad f'(x) = [x^3 + 2x^2 + 2]' = 3x^2 + 4x$

b) $f(x) = x^3 - 4\sin x$ $\qquad f'(x) = [x^3 - 4\sin x]' = 3x^2 - 4\cos x$

c) $f(x) = \frac{1}{x} - 2\sin x$ $\qquad f'(x) = \left[\frac{1}{x} - 2\sin x\right]' = \frac{-1}{x^2} - 2\cos x; x \neq 0$

d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$ $\qquad f'(x) = \left[\frac{x-1}{x^2+2}\right]' = \frac{[x-1]'.(x^2+2) - (x-1).[x^2+2]'}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{x^4 + 4x^2 + 4}$

Pr.

V ktorom bode má parabola $f: y = 2x^2 + 3x + 1$ dotyčnicu:

a) so smerovým uhlom 45°

b) rovnobežnú s priamkou $p: 5x - y + 3 = 0$

c) kolmú na priamku $q: x - 3y + 2 = 0$

a) $t: y - y_0 = k(x - x_0)$

$k = \mathrm{tg}45° = 1$

$k = f'(x) = 4x + 3$

$k = k$

$4x + 3 = 1$

$4x = -2$

$x = -\frac{1}{2} \ldots y = 0 \ldots T\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

$t: y = x + \frac{1}{2}$

b) $p: 5x - y + 3 = 0$

$y = 5x + 3 \ldots k = 5$

$k = k$

$4x + 3 = 5$

$4x = 2$

$x = \frac{1}{2} \ldots y = 3 \ldots T\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

$t: y - 3 = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$5x - y + \frac{1}{2} = 0$

c) $\overrightarrow{n_q} = [1, -3]$ $\quad \overrightarrow{n_q}.\overrightarrow{n_t} = 0$ $\quad \overrightarrow{n_t} = [3, 1]$

$t: 3x + y = 0 \ldots y = -3x - c \ldots k = -3$

$4x + 3 = -3$

$4x = -6$

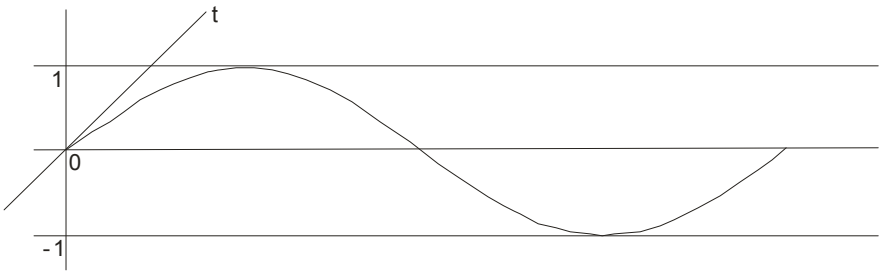
$x = -\frac{3}{2} \ldots y = 1 \ldots T\left[-\frac{3}{2}, 1\right]$

$t: y - 1 = -3\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$y = -3x - \frac{7}{2}$

Pr.

Aký uhol zviera $y = \sin x$ s osou x?



- zoberme si bod $T[0, 0]$, spravíme v ňom dotyčnicu ku $y = \sin x$ a uhol dotyčnice s osou bude hľadaný uhol, čiže nám stačí určiť smernicu dotyčnice

$k = f'(x) = [\sin x]' = \cos x$

$\cos 0° = 1$

$k = 1 = \mathrm{tg}\alpha \ldots \alpha = 45°$

- zvierajú uhol $45°$

$F: x \underset{\varphi}{\mapsto} u \underset{f}{\mapsto} y$ $\qquad y = f(u) = f(\varphi(x))$ $\qquad F(x) = f(\varphi(x))$

φ - vnútorná zložka

f - vonkajšia zložka

Veta

Nech je funkcia $F(x) = f(\varphi(x))$, nech φ má deriváciu v bode x_0 a nech f má deriváciu v bode $u_0 = \varphi(x_0)$. Potom aj funkcia F má v bode x_0 deriváciu a platí: $F'(x) = f'(u_0).\varphi'(x_0)$

Dôkaz

$$F'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} . \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{\varphi(x) \to \varphi(x_0)} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} . \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f'(\varphi(x_0)).\varphi'(x_0) = f'(u_0).\varphi'(x_0)$$

Pr.

Derivujte:

a) $[\sin \underbrace{2x}_{u}]' = [\sin u]'.[2x]' = 2\cos u = 2\cos 2x$

b) $[(\underbrace{2x^2 - x}_{u})^5]' = [u^5]'.[2x^2 - x]' = 5u^4.(4x - 1) = 5(2x^2 - x)^4.(4x - 1)$

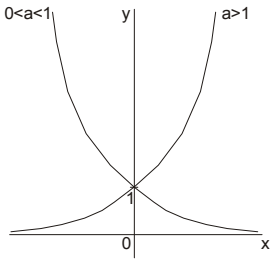
c) $[\cos(\underbrace{2x^2 + 3}_{u})]' = [\cos u]'.[2x^2 + 3]' = -4x \sin u = -4x \sin(2x^2 + 3)$

d) $[\underbrace{\cos^2 x}_{u}]' = [u^2]'.[\cos x]' = 2u(-\sin x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$

e) $[\cos \underbrace{x^2}_{u}]' = [\cos u]'.[x^2]' = -2\sin u = -2\sin x^2$

A. derivácia exponenciálnej funkcie

$y = a^x; a > 0, a \neq 1$



$[a^x]' = a^x.\ln a$

Dôkaz

$$a = e^{\ln a}$$

$$[a^x]' = [(e^{\ln a})^x]' = [e^{\underbrace{x.\ln a}_{u}}]' = [e^u]'.[x.\ln a]' =$$

$$= e^u.\ln a = e^{x.\ln a}.\ln a = a^x.\ln a$$

$[e^x]' = e^x$

Dôkaz

$$[e^x]' = e^x.\ln e = e^x.1 = e^x$$

$[e^{-x}]' = -e^{-x}$

Dôkaz

$$[e^{-x}]' = [e^u]'.[-x]' = -e^u = -e^{-x}$$

Pr.

Vypočítajte:

a) $\left[e^{3x+5}\right]' = \left[e^{u}\right]'.\left[3x+5\right]' = 3e^{u} = 3e^{3x+5}$

b) $\left[e^{x}+e^{-x}\right]' = \left[e^{x}\right]' + \left[e^{-x}\right]' = e^{x} + \left[e^{u}\right]'.\left[-x\right]' = e^{x} - e^{u} = e^{x} - e^{-x}$

c) $\left[x^{2}.e^{3x^{3}}\right]' = \left[x^{2}\right]'.e^{3x^{3}} + x^{2}.\left[e^{3x^{3}}\right]' = 2xe^{3x^{3}} + x^{2}.\left[e^{u}\right]'.\left[3x^{3}\right]' = 2xe^{3x^{3}} + x^{2}.e^{u}.9x^{2} =$

$= 2xe^{3x^{3}} + 9x^{4}.e^{3x^{3}} = e^{3x^{3}}.\left(2x+9x^{4}\right)$

d) $\left[.e^{-x}.\cos 2x\right]' = \left[.e^{-x}\right]'.\cos 2x + e^{-x}.\left[\cos 2x\right]' = -e^{-x}\cos 2x + e^{-x}\left[\cos u\right]'\left[2x\right]' =$

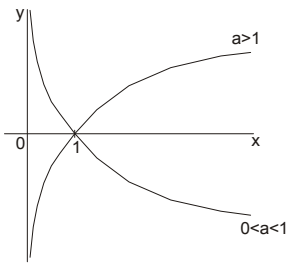
$= -e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin u = -e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x = -e^{-x}\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right)$

f) $\left[\sin^{2}\left(3x2+3\right)\right]' = \left[\sin^{2} u\right]'.\left[3x2+3\right]' = \left[v^{2}\right]'\left[\sin u\right]'.\left[3x2+3\right]' = 2v6x\cos u =$

$= 12x\sin u\cos u = 6x\sin 2u = 6x\sin\left(6x^{2}+6\right)$

B. derivácia logaritmickej funkcie

$y = \log_{a} x; a > 0, a \neq 1, x > 0$



$\left[\ln x\right]' = \frac{1}{x}$

$\left[\log_{a} x\right]' = \frac{1}{x.\ln a}$

Dôkaz

$\left[\log_{a} x\right]' = \left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]' = \frac{1}{\ln a}.\left[\ln x\right]' = \frac{1}{x.\ln a}$

Pr.

Vypočítajte:

a) $\left[x.\ln x\right]' = \left[x\right]'.\ln x + x.\left[\ln x\right]' = \ln x + 1; x > 0$

b) $\left[\ln\left(2x+3\right)\right]' = \left[\ln u\right]'.\left[2x+3\right]' = \frac{2}{u} = \frac{2}{2x+3}; 2x+3 > 0 \ldots x > -\frac{3}{2}$

c) $\left[\ln\sin x\right]' = \left[\ln u\right]'.\left[\sin x\right]' = \frac{\cos x}{u} = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{cotg}x; \sin x > 0 \ldots x \in \bigcup_{k\in Z}\left(2k\pi, \left(2k+1\right)\pi\right)$

$\left[\ln\varphi\left(x\right)\right]' = \frac{\varphi'\left(x\right)}{\varphi\left(x\right)}; \varphi\left(x\right) > 0$

Dôkaz

$\left[\ln\varphi\left(x\right)\right]' = \left[\ln u\right]'.\varphi'\left(x\right) = \frac{\varphi'\left(x\right)}{u} = \frac{\varphi'\left(x\right)}{\varphi\left(x\right)}$,

napr.: $\left[\ln\left(3x^{2}+5\right)\right]' = \frac{\left[3x^{2}+5\right]'}{3x^{2}+5} = \frac{6x}{3x^{2}+5}$

C. derivácia mocninovej funkcie

$$y = x^r ; r \in R, x > 0$$

$$\left[x^r\right]' = rx^{r-1}$$

Dôkaz

$$\left[x^r\right]' = \left[e^{r.\ln x}\right]' = \left[e^u\right]'.\left[r.\ln x\right]' = e^u \tfrac{r}{x} =$$
$$= e^{r.\ln x}.r.x^{-1} = r.x^r.x^{-1} = rx^{r-1}$$

Pr.

Vypočítajte:

a) $\left[\sqrt{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}; x > 0$

b) $\left[\sqrt{x^5} - 3\sqrt[4]{x^7}\right]' = \left[\sqrt{x^5}\right]' - 3\left[\sqrt[4]{x^7}\right]' = \left[x^{\frac{5}{2}}\right]' - 3\left[x^{\frac{7}{4}}\right]' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - \frac{21}{4}.\sqrt[4]{x^3}; x > 0$

c) $\left[\sqrt{3x^2 - 5x}\right]' \left[u^{\frac{1}{2}}\right]'.\left[3x^2 - 5x\right]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}(6x-5) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3x^2-5x}}(6x-5); x > \frac{5}{3}$

d) $\left[\sqrt{\sin x}\right]' = \left[u^{\frac{1}{2}}\right]'.\left[\sin x\right]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}.\cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}; \sin x > 0 \ldots x \in \bigcup_{k \in Z}\left(2k\pi, (2k+1)\pi\right)$

$$\left[\sqrt{\varphi(x)}\right]' = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}}; \varphi(x) > 0$$

Dôkaz

$$\left[\varphi(x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \left[u^{\frac{1}{2}}\right]'.\varphi'(x) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}.\varphi'(x) =$$
$$= \frac{1}{2}\varphi(x)^{-\frac{1}{2}}.\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}}$$

Veta (L' Hospitalovo pravidlo)

Nech funkcie $f(x), g(x)$ majú deriváciu v okolí bodu x_0. Nech $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0\,(\pm\infty)$, potom platí: ak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje aj $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} : \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dôkaz

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0}\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Pr.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$

- je to limita typu „$\frac{0}{0}$“, môžeme použiť L' Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 5}{2x - 1} = -\frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$

- L' Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj viackrát

Cvičenia

1. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+6x-7}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+1}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$

2. Derivujte:

a) $f(x)=\sin^2 x$ b) $f(x)=\sin 2x$ c) $f(x)=(x^3.\sin x).\cos x$

3. Pod akým uhlom sa pretínajú krivky $y=\sin x$ a $y=\cos x$ os x ?

Neriešené úlohy

1. Dokážte z definície:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)=8$ b) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)=1$

2. Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-3}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-4x}{x+5}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$ e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2-2x-8}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x}$ g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-tgx}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{6x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 4x\cos^3 x}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3+2x^2+x-4}$ m) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ o) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+2)^n-2^n}{x}$ q) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2}$ r) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ s) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ t) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$

3. Derivujte:

a) $y=\sqrt{x^3}$ b) $y=\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt[3]{x^5}$ c) $y=\sqrt{x^2+4}$ d) $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$ e) $y=xe^{-x}$

f) $y=\sqrt{25-x^2}$ g) $y=\frac{x-1}{x^2+2}$ h) $y=\frac{1+\sin x}{1-\cos x}$ i) $y=\frac{x\sin x}{1+\cos x}$ j) $y=x^2\ln^5 x$

k) $y=\ln\sin x$ l) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ m) $y=\sin^3(2x^2+x)$ n) $y=e^{-x}\cos 2x$

o) $y=e^{2x+3}\sin(3x+2)$ p) $y=e^x\sin 2x$ q) $y=xe^x$ r) $y=x^2e^{3x^3}$ s) $y=\ln(x^2+1)$

t) $y=\ln^3 x$ u) $y=(2x+3)^{(3x^2-1)}$

4. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku krivke:

a) $y=2\sqrt{2}\sin x$ v bode $T\left[\frac{\pi}{4};?\right]$

b) $y=e^{-x}\cos 2x$ v bode $T[0;?]$

5. Napíšte rovnicu normály ku grafu funkcie $f: y=x.\ln x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $2x-3y+3=0$.

6. V ktorom bode má graf funkcie $f: y=x^3-2$ dotyčnicu:

a) rovnobežnú s priamkou $p: 3x-y+1=0$

b) so smerovým uhlom 45 °

7. Napíšte rovnice dotyčníc ku grafu funkcie $f: y=x^2-4x$ v jej priesečníkoch s osou x.

8. Pod akým uhlom pretína graf funkcie $y=\ln x$ os x?

9. Pod akým uhlom pretína graf funkcie $y = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$ **os** x **?**

10. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f : y = \frac{x}{x+1}$**, ktorá zviera s osou** x **uhol 45°.**

11. Nájdite rovnicu rýchlosti a zrýchlenia pohybu, ak rovnica dráhy je:

a) $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$ b) $s = ke^{-bt}$ c) $s = A\sin(\omega t + \varphi)$

11. FUNKCIE A ICH VLASTNOSTI

1. Definícia funkcie
- $D(f), H(f)$
- vlastnosti (monotónnosť, párnosť a nepárnosť, ohraničenosť, …)

2. Lagrangeova a Rollova veta

3. Monotónne funkcie, vyšetrovanie monotónnosti pomocou derivácie

4. Lokálne extrémy a ich vyšetrovanie pomocou derivácie (globálne extrémy)

5. Konvexnosť a konkávnosť (inflexný bod)

6. Asymptoty grafu funkcie

7. Priebeh funkcie

.....

- <u>funkcia</u>

- pojem funkcia vznikol v 17. storočí , kedy sa objavila potreba vyjadrovať závislosti medzi veličinami

<u>Def.</u>

Funkcia f na množine $D \subset R$ je predpis, ktorý každému $x \in D$ priradí práve jedno $y \in R$.

$x \mapsto y$ (x priradí y)

vzor (nezávislá premenná)

obraz / funkčná hodnota / hodnota funkcie (závislá premenná)

- funkciu môžeme definovať aj pomocou karteziánskeho súčinu

<u>Def.</u>

Funkcia f na množine $D \subset R$ je množina $[x, y] \in D \times R : \forall x \in D \; \exists$ práve jedno $y \in R$ tak, že platí $[x, y] \in f$.

- funkciu môžeme určiť troma spôsobmi:

1. **vymenovaním prvkov**

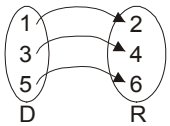
$$f = \{[1,2],[3,4],[5,6]\}$$

- <u>tabuľkou</u>

f :

x	1	3	5
y	2	4	6

- <u>šípkový diagram</u>

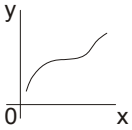


2. **charakteristickou vlastnosťou (rovnicou)**

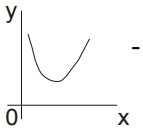
$$f : y = x + 1; x \in \{1,3,5\}$$

$$D = \{1,3,5\}$$

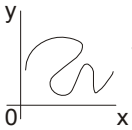
3. **grafom**



- je funkcia



- je funkcia



- nie je funkcia

Def.

Definičný obor funkcie f je množina všetkých $x \in R$, ktorým je priradená hodnota funkcie.

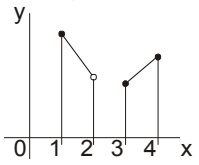
$$D(f) = \{x \in R; \exists\, y \in R : y = f(x)\}$$

Pr.

Určite definičný obor:

a) $f = \{[1,2],[2,3],[4,6]\}$ $\qquad D(f) = \{1,2,4\}$

b)



$D(f) = \langle 1,2) \cup \langle 3,4 \rangle$

c) $f : y = 3 + \sqrt{x}$

$x \in D(f) \Leftrightarrow x \geq 0$ $\qquad D(f) = R_0^+$

d) $f : y = \frac{\sqrt{x-3}}{x-5}$

$x \in D(f) \Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \wedge x - 5 \neq 0$

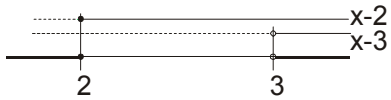
$x \geq 3 \qquad x \neq 5$ $\qquad D(f) = \langle 3,5) \cup (5,\infty)$

e) $f : y = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$

$x \in D(f) \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-3} \geq 0$

$x - 2 = 0 \qquad x - 3 = 0$

$x = 2 \qquad x = 3$



$D(f) = (-\infty, 2\rangle \cup (3,\infty)$

f) $f : y = \sqrt{3 - |x|}$

$x \in D(f) \Leftrightarrow 3 - |x| \geq 0$

$3 \geq |x|$ $\qquad D(f) = \langle -3, 3 \rangle$

Def.

Obor hodnôt funkcie f je množina všetkých $y \in R$, ktoré sú priradené niektorému $x \in D$.

$$H(f) = \{y \in R; \exists\, x \in D : y = f(x)\}$$

Pr.

Určite obor hodnôt:

$f = \{[1,2],[2,3],[4,6]\}$ $\qquad H(f) = \{2,3,6\}$

Pr.

Je daná funkcia $f : y = x^2 - 2x - 1; x \in R$ **. Zistite, či:** $1 \in H(f), 0 \in H(f), -4 \in H(f)$.

$y = 1 \ldots 1 = x^2 - 2x - 1$

$x^2 - 2x - 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 12$

$\sqrt{D} = \sqrt{12} > 0$ - existujú dve také $x \in R$, teda $1 \in H(f)$

$y = 0 \ldots 0 = x^2 - 2x - 1$

$D = b^2 - 4ac = 8$

$\sqrt{D} = 2.\sqrt{2}$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = 1 \pm \sqrt{2}$ - existujú dve také $x \in R$, teda $0 \in H(f)$

$y = -4 \ldots -4 = x^2 - 2x - 1$

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = -8$

$D < 0$ $\quad -4 \notin H(f)$

Pr.

Určite obor hodnôt:

a) $f: y = x^2 - 2x - 8$

$x^2 - 2x - (8 + y) = 0$

$D \geq 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 + 4.1.(8 + y) = 36 + 4y$

$36 + 4y \geq 0$

$y \geq -9$ $\quad H(f) = \langle -9, \infty)$

b) $f: y = \frac{x}{1+x^2}$

$y + yx^2 = x$

$yx^2 - x + y = 0$

$D \geq 0$

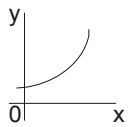
$D = 1 - 4y^2$

$1 - 4y^2 \geq 0$ $\quad y^2 \leq \frac{1}{4}$ $\quad |y| \leq \frac{1}{2}$ $\quad H(f) = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

Def.

Funkcia f sa nazýva rastúca na množine $M \subset D(f)$, ak platí:

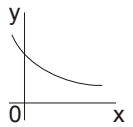
$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.



Def.

Funkcia f sa nazýva klesajúca na množine $M \subset D(f)$, ak platí:

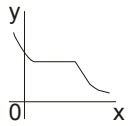
$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



Def.

Funkcia f sa nazýva nerastúca na množine $M \subset D(f)$, ak platí:

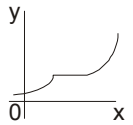
$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.



Def.

Funkcia f sa nazýva neklesajúca na množine $M \subset D(f)$, ak platí:

$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

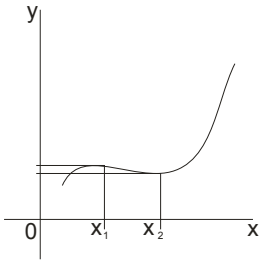


- funkcie rastúce, klesajúce, nerastúce, neklesajúce sa nazývajú **monotónne**

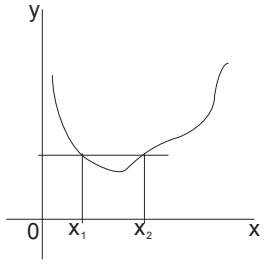
Def.

Funkcia f sa nazýva prostá práve vtedy, keď $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- funkcia nie je prostá, ak $\exists x_1, x_2 \in D(f): x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$



prostá



nie je prostá

Pr.

Pre nasledujúce funkcie určite $f(x)$ a $f(-x)$:

a) $f: y = x^4 - 2x^2$

$f(x) = x^4 - 2x^2$

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$

- táto funkcia má vlastnosť: $f(-x) = f(x)$, je párna

b) $f: y = x^3 + 3x$

$f(x) = x^3 + 3x$

$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x)$

- táto funkcia má vlastnosť: $f(-x) = -f(x)$, je nepárna

c) $f: y = x^2 + x$

$f(x) = x^2 + x$

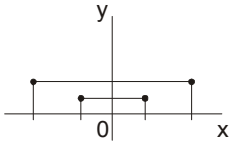
$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$

- táto funkcia nie je párna ani nepárna

Def.

Funkcia f sa nazýva párna práve vtedy, keď $\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$

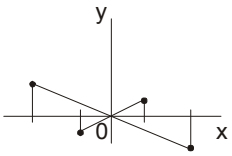
- graf párnej funkcie je osovo súmerný podľa osy y



Def.

Funkcia f sa nazýva nepárna práve vtedy, keď $\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$

- graf párnej funkcie je stredovo súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy



Pr.

Zistite párnosť:

a) $f: y = \frac{x^2}{x^2+4}$

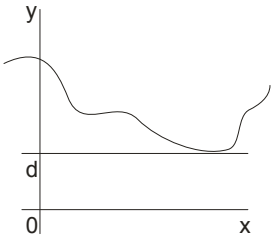
$f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ $\quad f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+4} = \frac{x^2}{x^2+4} = f(x)$ … párna

b) $f: y = \frac{x^3}{x^2+1}$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \qquad f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$$ … nepárna

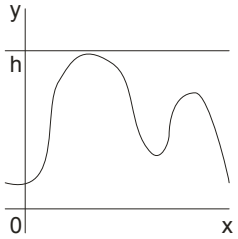
Def.

Funkcia f sa nazýva zdola ohraničená na množine $M \subset D(f)$ práve vtedy, keď $\exists d \in R \, \forall x \in M : f(x) \geq d$.



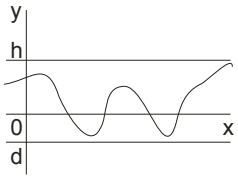
Def.

Funkcia f sa nazýva zhora ohraničená na množine $M \subset D(f)$ práve vtedy, keď $\exists h \in R \, \forall x \in M : f(x) \leq h$.



Def.

Funkcia f sa nazýva ohraničená na množine $M \subset D(f)$, ak je ohraničená zhora aj zdola.



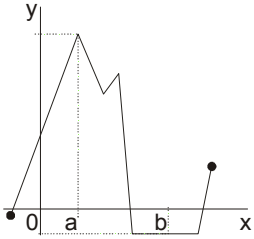
- extrém funkcie je nejaká hraničná hodnota, či už maximálna alebo minimálna

Def.

Funkcia f má v bode $a \in M \subset D(f)$ maximum na množine M, ak $\forall x \in M : f(x) \leq f(a)$.

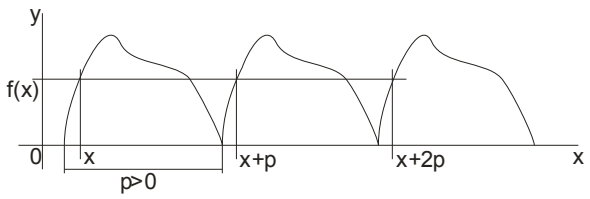
Def.

Funkcia f má v bode $b \in M \subset D(f)$ minimum na množine M, ak $\forall x \in M : f(x) \geq f(b)$.



Def.

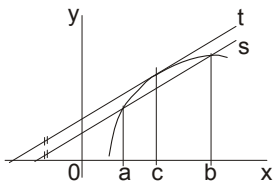
Funkcia f sa nazýva periodická, ak $\exists\, p \in R^{+}\ \forall\, k \in Z\ \forall\, x \in R : f(x+kp) = f(x)$



Veta (Lagrangeova)

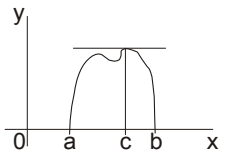
Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech má deriváciu v každom bode intervalu (a,b). Potom $\exists\, c \in (a,b)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(smernica dotyčnice v bode c je rovnaká so smernicou sečnice vedenou cez body a,b)

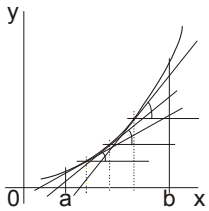


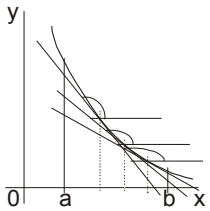
Veta (Rollova)

Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$, nech má deriváciu v každom bode intervalu (a,b) a nech $f(a) = f(b) = 0$. Potom $\exists\, c \in (a,b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



- derivácia a monotónnosť





Veta

Nech funkcia f má v každom bode intervalu (a,b) kladnú deriváciu, potom je funkcia f rastúca na intervale (a,b).

Dôkaz

$\forall\, c \in (a,b) : f'(c) > 0 \Rightarrow f$ je rastúca na (a,b) - dokazovať budeme priamo

- funkcia je rastúca, keď platí: $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- vychádzajme z toho, že $x_1 < x_2$, potom využitím Lagrangeovej vety: $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$; keďže $x_1 < x_2$, tak $x_2 - x_1 > 0$, tak musí platiť $f(x_2) - f(x_1) > 0$ a odtiaľ $f(x_1) < f(x_2)$. Teda funkcia f je rastúca.

Veta

Nech funkcia f má v každom bode intervalu (a,b) zápornú deriváciu, potom je funkcia f klesajúca na intervale (a,b).

Dôkaz

$\forall c \in (a,b): f'(c) < 0 \Rightarrow f$ je klesajúca na (a,b) - dokazovať budeme priamo

- funkcia je klesajúca, keď platí: $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- vychádzajme z toho, že $x_1 < x_2$, potom využitím Lagrangeovej vety: $\exists c \in (x_1, x_2)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$; keďže $x_1 < x_2$, tak $x_2 - x_1 > 0$, tak musí platiť $f(x_2) - f(x_1) < 0$ a odtiaľ $f(x_1) > f(x_2)$. Teda funkcia f je klesajúca.

Pr.

Určite intervaly monotónnosti:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

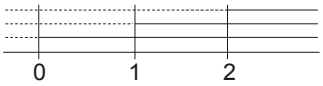
1. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x > 0$ … rastúca

$4x^3 - 12x^2 + 8x > 0$

$x(x^2 - 3x + 2) > 0$

$x(x-1)(x-2) > 0$

$x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$



2. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x < 0$ … klesajúca

$x(x-1)(x-2) < 0$

$x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$

rastúca … $\langle 0,1\rangle; \langle 2, \infty)$

klesajúca … $(-\infty, 0\rangle; \langle 1, 2\rangle$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$-\frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \qquad -2x > 0 \qquad x < 0$

rastúca … $(-\infty, 0\rangle$

klesajúca … $\langle 0, \infty)$

c) $f(x) = x + \cos x$

$f'(x) = 1 - \sin x \qquad 1 - \sin x \geq 0 \qquad x \in R$

rastúca … $(-\infty, \infty)$

d) $f(x) = xe^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

$e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) > 0 \qquad 1 - x > 0 \qquad x < 1$

rastúca … $(-\infty, 1\rangle$

klesajúca … $\langle 1, \infty)$

- <u>lokálne extrémy funkcie</u>

<u>Def.</u>

Funkcia f má v bode $x_0 \in M$ maximum ak: $\forall x \in M : f(x) \leq f(x_0)$.

<u>Def.</u>

Funkcia f má v bode $x_0 \in M$ minimum ak: $\forall x \in M : f(x) \geq f(x_0)$.

- toto sú **absolútne (globálne) extrémy** (GE)

<u>Def.</u>

Funkcia f má v bode $x_0 \in D(f)$ lokálne maximum ak: $\exists O(x_0) \forall x \in O(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$.

<u>Def.</u>

Funkcia f má v bode $x_0 \in D(f)$ lokálne minimum ak: $\exists O(x_0) \forall x \in O(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$.

- lokálne extrémy (LE) môžeme určiť: 1. pomocou monotónnosti
2. pomocou dvoch viet o lokálnych extrémoch

<u>Pr.</u>

Nájdite lokálne extrémy:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad 6x^2 - 6x - 12 > 0 \qquad x^2 - x - 2 > 0$$

$$(x-2)(x+1) > 0 \qquad x = 2 \quad x = -1$$

rastúca … $(-\infty, -1\rangle; \langle 2, \infty)$

klesajúca … $\langle -1, 2 \rangle$

- spravíme si tabuľku:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, -\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		MAX		MIN	

<u>Veta</u>

Ak funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém a existuje derivácia v tomto bode, tak $f'(x_0) = 0$.

Dôkaz

- dokazovať budeme nepriamo (obmenu): $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ nemá lokálny extrém

$$f'(x_0) \neq 0$$

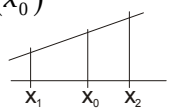
$$f'(x_0) > 0 \qquad\qquad f'(x_0) < 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \qquad\qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

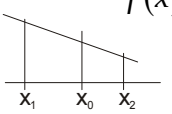
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \qquad\qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

$x < x_0$: $f(x) < f(x_0)$; $x > x_0$: $f(x) > f(x_0)$

$x < x_0$: $f(x) > f(x_0)$; $x > x_0$: $f(x) < f(x_0)$



v x_0 nie je lokálny extrém



v x_0 nie je lokálny extrém

- funkcia f môže mať lokálny extrém len v takom bode x_0, v ktorom je $f'(x_0)=0$ (stacionárny bod) alebo $f'(x_0)$ neexistuje

Veta

Nech funkcia f má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)=0$ a nech existuje druhá derivácia $f''(x_0)$. Potom platí:

1. ak $f''(x_0)>0$, tak f má v bode x_0 lokálne minimum (LMIN)
2. ak $f''(x_0)<0$, tak f má v bode x_0 lokálne maximum (LMAX)

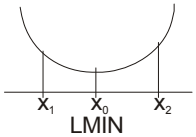
Dôkaz

1. nech $f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)>0$

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0 \qquad \frac{f'(x)}{x-x_0}>0$$

$x<x_0 \ldots f'(x)<0$ … klesajúca

$x>x_0 \ldots f'(x)>0$ … rastúca



LMIN

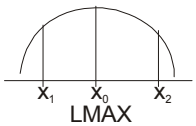
v x_0 je lokálne minimum

2. nech $f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)<0$

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0 \qquad \frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

$x<x_0 \ldots f'(x)>0$ … rastúca

$x>x_0 \ldots f'(x)<0$ … klesajúca



LMAX

v x_0 je lokálne maximum

Pr.

Nájdite lokálne extrémy:

a) $f(x)=x^3-3x^2-9x$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(x)=0 \qquad x^2-2x-3=0 \qquad (x-3)(x+1)=0$

$x=3 \quad x=-1$

$f''(x)=6x-6$

$f''(3)=6.3-6=12>0\ldots\text{LMIN}$

$f''(-1)=6.(-1)-6=-12<0\ldots\text{LMAX}$

b) $f(x)=4x^2-x^4$

$f'(x)=8x-4x^3$

$f'(x)=0 \qquad 2x-x^3=0 \qquad x(x^2-2)=0 \qquad x=0 \quad x=\pm\sqrt{2}$

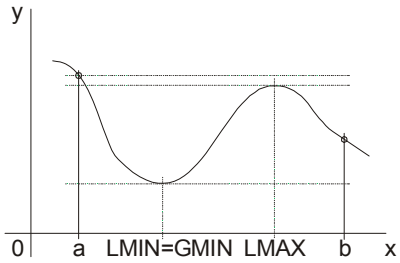
$f''(x)=8-12x^2$

$f''(0)=8>0\ldots\text{LMIN}$

$f''(\sqrt{2})=-16<0\ldots\text{LMAX}$

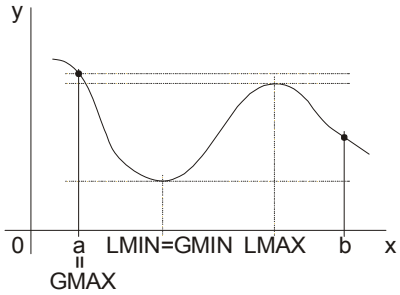
$f''(+\sqrt{2})=-16<0\ldots\text{LMAX}$

- na otvorenom intervale nemusia existovať globálne extrémy



- má lokálne minimum, je aj globálnym minimom a má lokálne maximum

- na uzatvorenom intervale má spojitá funkcia vždy globálne maximum (GMAX) a aj globálne minimum (GMIN), pričom tieto extrémy sú v krajných bodoch intervalu alebo v bodoch lokálnych extrémov



Pr.

Nájdite extrémy funkcie $f: y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ na intervale $\langle -2, 1 \rangle$:

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-3)(x-1)$$

$$x = 0 \quad x = 3 \quad x = 1$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''(1) = -10 < 0 \ldots \text{LMAX}$$

$$f(-2) = -151 \ldots \text{GMIN}$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2 \ldots \text{GMAX}$$

Pr.

Nájdite také $a, b \in R$, aby $f: y = a \ln x + bx^2 + x$ mala lokálne extrémy v bodoch $x_1 = 1, x_2 = 2$

$$f'(x) = \tfrac{a}{x} + 2bx + 1$$

$$\tfrac{a}{x} + 2bx + 1 = 0 \;\Big|\, . \tfrac{x}{2b}$$

$$x^2 + \tfrac{1}{2b}x + \tfrac{a}{2b} = 0$$

$$-\tfrac{1}{2b} = x_1 + x_2 \;\wedge\; \tfrac{a}{2b} = x_1 x_2$$

$$-\tfrac{1}{2b} = 3 \qquad \tfrac{a}{2b} = 2$$

$$b = -\tfrac{1}{6} \qquad a = 4b = -\tfrac{2}{3}$$

Veta

Nech funkcia f má na otvorenom intervale (a,b) f' aj f'' a nech x_0 je jediný taký bod, že $f'(x_0) = 0$. Potom pltí, že ak v bode x_0 je LE, tak je to aj GE.

(dôkaz je jednoduchý využitím predchádzajúcich poznatkov si ho čitateľ môže odvodiť)

- poznatky o globálnych a lokálnych extrémoch môžeme využiť pri **extremálnych úlohách**

Pr.

Číslo 10 rozložte na dva sčítance, tak aby ich súčin bol najväčší:

$$10 = x + y; x, y > 0$$
$$y = 10 - x$$
$$s = x.y = x(10 - x) = 10x - x^2$$
$$s' = -2x + 10 \quad s' = 0$$
$$-2x + 10 = 0 \quad x = 5$$
$$s'' = -2$$
$$s''(5) = -2 < 0 \ldots \text{LMAX} \ldots \text{GMAX}$$
$$\text{x} = 5, \text{y} = 5 \qquad \text{s} = 25$$

Pr.

Do štvorca plechu so stranou a máme v rohoch vystrihnúť štvorčeky tak, aby nádoba vzniknutá ohnutím okrajov mala maximálny objem. Určite veľkosť strany vystrihnutých štvorčekov.

$$V = S_p.v = (a - 2x)^2.x = xa^2 - 4ax^2 + 4x^3 =$$
$$= 4x^3 - 4ax^2 + a^2x; x \in \left(0, \tfrac{a}{2}\right)$$
$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 \qquad 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 64a^2 - 48a^2 = 16a^2 \quad \sqrt{D} = 4a$$
$$x_{1,2} = \tfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \tfrac{8a \pm 4a}{24} \qquad x_1 = \tfrac{a}{2}, x_2 = \tfrac{a}{6}$$
$$V'' = 24x - 8a$$
$$V''\left(\tfrac{a}{6}\right) = 24.\tfrac{a}{6} - 8a = -4a < 0 \ldots LMAX \ldots GMAX \qquad x = \tfrac{a}{6}$$
$$V = 4\left(\tfrac{a}{6}\right)^3 - 4a\left(\tfrac{a}{6}\right)^2 + a^2\left(\tfrac{a}{6}\right) = \tfrac{1}{54}a^3 - \tfrac{1}{9}a^3 + \tfrac{1}{6}a^3 = \tfrac{2}{27}a^3$$

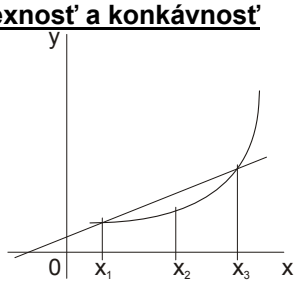
Pr.

Aké rozmery má mať valec s objemom V, aby bol jeho povrch najmenší?

$$V = \pi r^2 v \qquad v = \tfrac{V}{\pi r^2}$$
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + \tfrac{2V}{r}; r \in R^+$$
$$S' = 4\pi r - \tfrac{2V}{r^2} \qquad 4\pi r - \tfrac{2V}{r^2} = 0 \quad 4\pi r^3 = 2V \qquad r = \sqrt[3]{\tfrac{V}{2\pi}}$$
$$S'' = 4\pi + \tfrac{4V}{r^3} > 0 \ldots \text{GMIN}$$

- a po dosadení za polomer máme: $v = 2r$

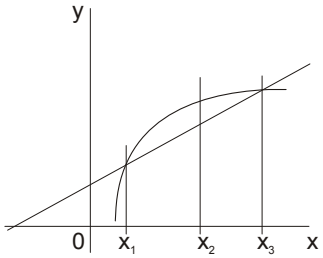
- <u>konvexnosť a konkávnosť</u>



$$s: y = kx + q \qquad y = \tfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}x + q$$
$$f(x_1) = \tfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}x_1 + q \qquad q = -\tfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}x_1 + f(x_1)$$
$$\boxed{s: y = \tfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)}$$
$$f(x_2) \le s(x_2)$$

<u>Def.</u>

Funkcia f je konvexná na intervale I práve vtedy, keď $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in \mathrm{I}: f(x_2) \le s(x_2)$.



$s: y = kx + q$ $\qquad y = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}x + q$

$f(x_1) = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}x_1 + q$ $\qquad q = -\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}x_1 + f(x_1)$

$$\boxed{s: y = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x - x_1) + f(x_1)}$$

$f(x_2) \geq s(x_2)$

Def.

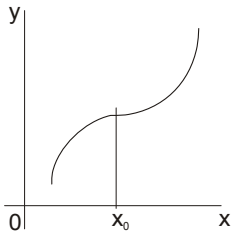
Funkcia f je konkávna na intervale I práve vtedy, keď $\forall\, x_1 < x_2 < x_3 \in \mathrm{I}: f(x_2) \geq s(x_2)$.

Veta

Nech funkcia f má v každom bode intervalu I druhú deriváciu. Potom platí:

1. f je konvexná na I práve vtedy, keď $f''(x) \geq 0$
2. f je konkávna na I práve vtedy, keď $f''(x) \leq 0$

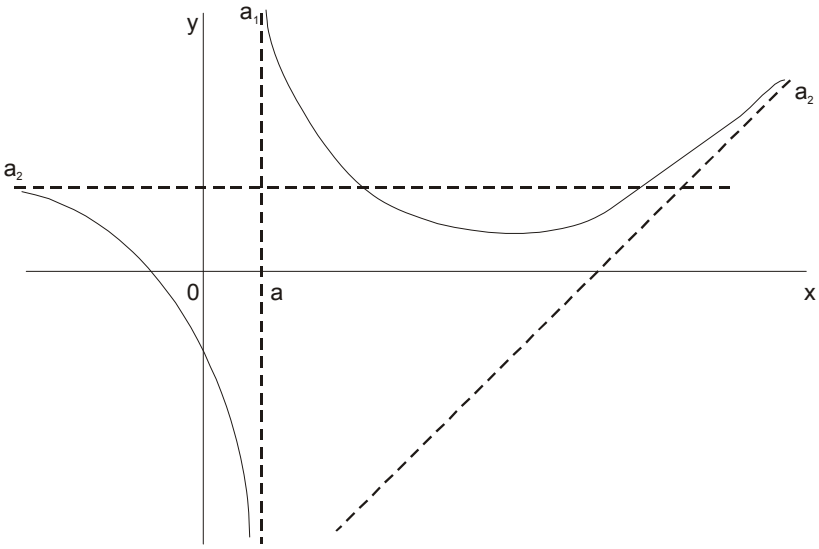
- **inflexný (neohybný) bod** (IB)je bod, v ktorom sa konvexnosť mení na konkávnosť, čiže: $f''(x_0) = 0$



- asymptoty grafu funkcie

Def.

Asymptota grafu funkcie je priamka, ku ktorej sa približuje graf funkcie pre $x \to \pm\infty$ alebo pre $y \to \pm\infty$.



- sú dva druhy:

1. **asymptota bez smernice**
   - je rovnobežná s osou y
   - rovnica: $a_1: x = a; a \notin D(f) \wedge \lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$
2. **asymptota so smernicou**

Def.

Priamka $y = kx + q$ je asymptota so smernicou grafu funkcie $y = f(x)$, ak $\lim\limits_{x \to \pm\infty}[f(x) - (kx + q)] = 0$.

- platí: $\boxed{k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$ a $\boxed{q = \lim\limits_{x \to \pm\infty}[f(x) - kx]}$

Pr.

Nájdite asymptoty:

a) $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$

1. bez smernice

$$D(f) = R - \{0\}$$

$$\lim_{x \to 0^+}\left(3x + \tfrac{1}{x}\right) = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-}\left(3x + \tfrac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$a_1 : x = 0$$

2. so smernicou

$$y = kx + q$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty}\left(3 + \tfrac{1}{x^2}\right) = 3$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty}\left(3x + \tfrac{1}{x} - 3x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \tfrac{1}{x} = 0$$

$$a_2 : y = 3x$$

b) $f(x) = \frac{-x}{x+1}$

1. bez smernice

$$D(f) = R - \{-1\}$$

$$\lim_{x \to -1^+}\left(\tfrac{-x}{x+1}\right) = \infty \qquad \lim_{x \to -1^-}\left(\tfrac{-x}{x+1}\right) = -\infty$$

$$a_1 : x = -1$$

2. so smernicou

$$y = kx + q$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{-x}{x+1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \tfrac{-x}{x^2 + x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 0$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\tfrac{-x}{x+1} - 0x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \tfrac{-x}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{1 + \frac{1}{x}} = -1$$

$$a_2 : y = -1$$

- <u>priebeh funkcie</u>

- pri skúmaní priebehu funkcie využívame poznatky, ktoré nám pomáhajú lepšie určiť, ako sa funkcia „správa“ na svojom definičnom obore (monotónnosť, konvexnosť a konkávnosť, …)
- pri takomto skúmaní postupujeme nasledovne:

1. **určíme definičný obor** $D(f)$ **a obor hodnôt** $H(f)$
2. **určíme priesečníky so súradnicovými osami**
3. **skúmame párnosť a nepárnosť**
4. **vypočítame deriváciu a zistíme spojitosť funkcie**
5. **skúmame monotónnosť funkcie**
6. **nájdeme lokálne extrémy**
7. **určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, určíme inflexné body**
8. **vypočítame asymptoty**
9. **spravíme si prehľadnú tabuľku**
10. **načrtneme si graf funkcie**

Pr.

Zistite priebeh funkcie:

a) $f(x) = x^3 - 3x$

1. $D(f) = R, H(f) = R$
2. $y = 0 \ldots 0 = x^3 - 3x \qquad x\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) = 0;\ x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

$x = 0 \ldots y = 0^3 - 3.0 \quad y = 0$

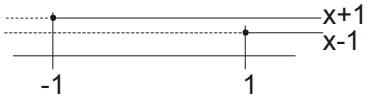
3. $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$ … nepárna
4. $f'(x) = 3x^2 - 3$ - má deriváciu na celom $D(f)$, teda je spojitá
5. $f'(x) > 0$

$3x^2 - 3 > 0$

$x^2 - 1 > 0$

$(x-1)(x+1) > 0$

$x = 1 \quad x = -1$



rastúca … $(-\infty, -1\rangle; \langle 1, \infty)$

klesajúca … $\langle -1, 1\rangle$

6. $f'(x) = 0$

$(x-1)(x+1) = 0$

$x = 1 \quad x = -1$

$f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \ldots \mathrm{LMIN}$

$f''(-1) = -6 < 0 \ldots \mathrm{LMAX}$

7. $f''(x) \geq 0 \qquad f''(x) \leq 0$ konvexná … $\langle 0, \infty)$

$6x \geq 0 \qquad 6x \leq 0$ konkávna … $(-\infty, 0\rangle$

$x \geq 0 \qquad x \leq 0$ inflexný bod … $A[0,0]$

8. a) bez smernice

neexistuje

b) so smernicou

$y = kx + q$

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^2 - 3) = \infty$

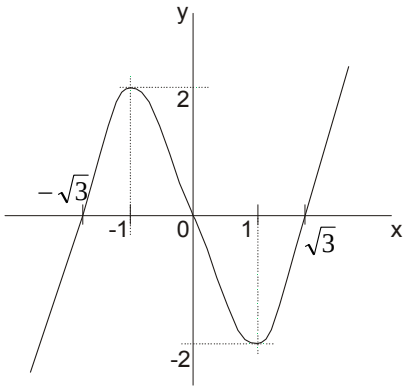
neexistuje

9.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-6	-	0	+	6	+
$f(x)$	↗ ∩	LMAX	↘ ∩	IB	↘ ∪	LMIN	↗ ∪

$f(1) = -2, f(-1) = -2$

10.



b) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

1. $D(f)=R, H(f)=R^+=(0,\infty)$
2. $y=0\ldots 0\notin H(f)$ - s osou x sa nepretína

   $x=0\ldots y=\frac{1}{1+0^2}$ $\quad y=1$
3. $f(-x)=\frac{1}{1+(-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=f(x)$ … párna
4. $f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ - má deriváciu na celom $D(f)$, teda je spojitá
5. $f'(x)>0$

   $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}>0$

   $-2x>0$

   $0>x$

   rastúca … $(-\infty,0\rangle$

   klesajúca … $\langle 0,\infty)$
6. $f'(x)=0$

   $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=0$

   $-2x=0$ $\quad x=0$

   $f''(x)=\frac{6x^4+6x^2-2}{(1+x^2)^4}$

   $f''(0)=-2<0\ldots\mathrm{LMAX}$
7. $f''(x)\geq 0$

   $\frac{6x^4+6x^2-2}{(1+x^2)^4}\geq 0$

   $x^4+x^2-\frac{1}{3}\geq 0\ldots y=x^2\ldots y^2+y-\frac{1}{3}\geq 0$

   $D=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$ $\quad \sqrt{D}=\sqrt{\frac{7}{3}}$

   $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}$ $\quad x^2=\frac{-1+\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}$ $\quad x\doteq\pm 0{,}514$

   konvexná … $(-\infty;-0{,}514\rangle;\langle 0{,}514;\infty)$

   konkávna … $\langle -0{,}514;0{,}514\rangle$

   inflexný bod … $x_1=0{,}514; x_2=-0{,}514$
8. a) bez smernice

   neexistuje

   b) so smernicou

$$y=kx+q$$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+1}=0$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}=0$$

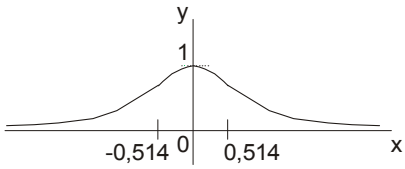
$$a: y=0$$

9.

x	$(-\infty;-0{,}514)$	$-0{,}514$	$(-0{,}514;0)$	0	$(0;0{,}514)$	$0{,}514$	$(0{,}514;\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-2	-	0	+
$f(x)$	↗ ∪	IB	↘ ∩	LMAX	↘ ∩	IB	↗ ∪

$f(0)=1$

10.



Cvičenia

1. Sú dané funkcie $f(x)=x+2, g(x)=2x^2+3x+1$ **vypočítajte:**

a) $f(0), f(-3), g(a+1)$ b) $f(x^2), g(x-1), g(-x)$ c) $f(g(x)), g(f(x)), g(f(x+1))$

2. Určite intervaly monotónnosti:

a) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ b) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ c) $f(x)=\ln(1+x^2)$ d) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

Neriešené úlohy

1. Určite definičný obor funkcie:

a) $y=\sqrt{x^2-x+6}-\sqrt{x}\sqrt{4-x}$ b) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x-x^2}{1-x}}$ c) $y=\sqrt{\frac{2+x}{1-x}}$ d) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x^2-x-2}}$

e) $y=\sqrt{\frac{x^2-x-2}{x}}$ f) $y=\sqrt{\frac{x^3-11x^2-26x}{2x-7}}$

2. Vyšetrite párnosť:

a) $y=\frac{x^2-1}{x^6+1}$ b) $y=\frac{x^3-x}{|x|}$ c) $y=\frac{\sin x}{\sqrt{7}+2\cos x}$ d) $y=\frac{\cos x}{\sqrt{5}+\sin x}$

3. Sú dané funkcie $f(x)=3x-2, g(x)=x-2x^2$ **. Nájdite:** $f(-x), f(x^2), g(x-1), g(2-x),$ $f(f(x)), f(g(x)), g(f(x))$**. Pre ktoré** $x\in R$ **platí:**

a) $f(x)=x$ b) $g(x)=x$ c) $f(g(x))=g(f(x))$ d) $f(f(x))=x$ e) $f(x-1)=g(x)$

4. Vyšetrite monotónnosť:

a) $y=\frac{2x}{x^2+1}$ b) $y=\frac{x^2-10}{x+2}$ c) $y=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ d) $y=x^2(1-3x^2)$ e) $y=\frac{4x}{x^2+1}$

f) $y=2x^2-\ln x$ g) $y=e^{-x^2}$ h) $y=\ln^2 x-\ln x^2$ i) $y=\ln(1+x^2)$ j) $y=xe^{-x}$

5. Nájdite lokálne extrémy:

a) $y=x^3-3x^2-9x$ b) $y=x^4-6x^2+8x$ c) $y=x^2e^{-x}$

6. Určite všetky $a\in R$**, pre ktoré funkcia** $f: y=\frac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+1$ **nemá lokálne extrémy.**

7. Určite $a,b\in R$ **tak, aby funkcia** $f: y=x^3+ax^2+bx+1$ **mala lokálne maximum v bode** $x=-1$ **a lokálne minimum v bode** $x=3$**.**

8. Určite lokálne extrémy funkcie $f: y = x^3 + cx$ v závislosti od parametra $c \in R$.

9. Určite lokálne extrémy funkcie $f: y = x^4 - px^2 + r;\ p, r \in R$.

10. Nech x_1, x_2 sú body lokálnych extrémov funkcie $f: y = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$. Zistite, pre ktoré $a \in R$ platí $x_1^{\ 2} = x_2$.

11. Určite intervaly konvexnosti a konkávnosti:

a) $y = \ln x$ b) $y = x^2$ c) $y = x^3$ d) $y = 2x + \frac{3}{x}$ e) $y = \frac{4x}{1+x^2}$ f) $y = x^2 e^x$

g) $y = \frac{1}{1+x^2}$

12. Nájdite asymptoty funkcie:

a) $y = \frac{2x^2+3}{x+2}$ b) $y = 2x + \frac{3}{x}$ c) $y = \frac{x}{1+x^2}$ d) $y = \frac{x^2+1}{x+3}$

13. Vyšetrite priebeh funkcie:

a) $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$ b) $y = 2x + \frac{3}{x}$ c) $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ d) $y = x^2 e^{-x^2}$ e) $y = xe^{-x^2}$ f) $y = \frac{x}{1-x^2}$

g) $y = \ln\left(4 - x^2\right)$

14. Medzi všetkými valcami toho istého objemu V nájdite ten, ktorý má minimálny povrch.

15. Z trojuholníka, ktorého jedny strana je a, uhly k nej priľahlé sú ostré a výška na a je v, máme vystrihnúť pravouholník tak, aby jedna jeho strana bola časťou strany a. Určite rozmery pravouholníka tak, aby mal maximálny objem.

16. Žľab je vyrobený z troch dosiek rovnakej šírky. Určite sklon jeho bočných stien tak, aby bol prietok najväčší.

17. Dve chodby široké 2,4 metra a 1,6 metra sa pretínajú pod pravým uhlom. Akú najdlhšiu tyč nimi možno preniesť vo vodorovnom smere?

18. Nádrž na vodu má štvorcové dno a objem 256 m^3. Vypočítajte jej rozmery tak, aby spotreba materiálu na vybetónovanie bola najmenšia.

19.V karteziánskej súradnicovej sústave (O, x, y) je daný graf funkcie $y = x^2; x \in \langle -3, 3 \rangle$ a nech je bod $A[0, 9]$. Nájdite na grafe body B, C také, že ΔABC je rovnoramenný trojuholník so základňou BC rovnobežnou s osou x a obsah trojuholníka ΔABC je maximálny.

20. Do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1$ je vpísaný pravouholník so stranami rovnobežnými s osami elipsy tak, že jeho obsah je maximálny. Určite rozmery.

21. Do gule s polomerom R je vpísaný a) valec, b) kužeľ s maximálnym obsahom. Určite jeho rozmery.

22. Do trojuholníka so základňou a a výškou v je vpísaný pravouholník s maximálnym obsahom tak, že jedna strana pravouholníka leží na základni trojuholníka. Aké rozmery má pravouholník?

23. Do kružnice s polomerom r vpíšte a) pravouholník, b) rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom.

12. POLYNOMICKÉ A RACIONÁLNE FUNKCIE

1. Základné vlastnosti polynomických funkcií
- definícia, definičný obor (konštantná, lineárna funkcia, kvadratická funkcia, …)
- rozklad na súčin, nulové body
- priebeh grafu pre párne a nepárne n
- derivácia a spojitosť

2. Racionálne lomené funkcie
- definícia, definičný obor
- nepriama úmernosť
- lineárna lomená funkcia

.....

- <u>polynomické funkcie</u>

<u>Def.</u>

Polynomická funkcia n-tého stupňa je každá funkcia určená rovnicou

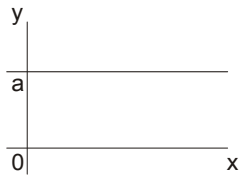
$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R, a_n \neq 0, n \in N_0 .$$

<u>Def.</u>

Konštantná funkcia je každá funkcia určená rovnicou $y = a; a \in R$.
(polynomická funkcia nultého stupňa)

$D(f) = R \qquad H(f) = a$

- grafom je priamka rovnobežná s osou x

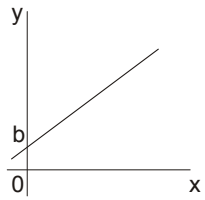


<u>Def.</u>

Lineárna funkcia je každá funkcia určená rovnicou $y = ax + b; a, b \in R, a \neq 0$.
(polynomická funkcia prvého stupňa)

$D(f) = R \qquad H(f) = R$

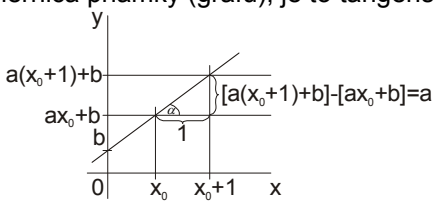
- grafom je priamka rôznobežná so súradnicovými osami



- koeficient b určuje bod na osy y, ktorým graf prechádza

$$x = 0 \ldots y = a.0 + b = b \ldots [0, b]$$

- koeficient a je smernica priamky (grafu), je to tangens uhla, ktorý zviera priamka s osou x



$$\mathrm{tg}\alpha = \tfrac{a}{1} = a$$

<u>Veta</u>

Pre každú lineárnu funkciu f určenú rovnicou $y = ax + b$ platí:

1. ak $a > 0$, tak f je rastúca
2. ak $a < 0$, tak f je klesajúca

Dôkaz

1. nech $a > 0$

- majme $x_1 < x_2$ a postupujme takto:

$$x_1 < x_2 \,|.a$$
$$ax_1 < ax_2 \,|+b$$
$$ax_1 + b < ax_2 + b$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

- dostali sme $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, čo znamená, že f je rastúca

2. nech $a < 0$

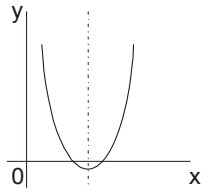
- majme $x_1 < x_2$ a postupujme takto:

$$x_1 < x_2 \,|.a$$
$$ax_1 > ax_2 \,|+b$$
$$ax_1 + b > ax_2 + b$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

- dostali sme $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, čo znamená, že f je klesajúca

<u>Def.</u>

Kvadratická funkcia je každá funkcia určená rovnicou $y = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R, a \neq 0$.
(polynomická funkcia druhého stupňa)



$D(f) = R \qquad H(f) = \left\langle -\frac{b^2}{4a} + c, \infty\right); a > 0$

$D(f) = R \qquad H(f) = \left(-\infty, -\frac{b^2}{4a} + c\right\rangle; a < 0$

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$0 = ax^2 + bx + (c - y)$$
$$D \geq 0$$
$$b^2 - 4a(c - y) \geq 0$$
$$b^2 - 4ac + 4ay \geq 0$$
$$4ay \geq 4ac - b^2 \,\Big|.\tfrac{1}{4a}$$

$a > 0$

$y \geq -\frac{b^2}{4a} + c$

$H(f) = \left\langle -\frac{b^2}{4a} + c, \infty\right)$

$a < 0$

$y \leq -\frac{b^2}{4a} + c$

$H(f) = \left(-\infty, -\frac{b^2}{4a} + c\right\rangle$

- grafom je parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y

- koeficient c určuje bod na osy y, ktorým parabola prechádza

$$x = 0 \ldots y = a.0^2 + b.0 + c \ldots [0, c]$$

- koeficient b určuje, či je os paraboly totožná s osou y alebo je parabola posunutá vpravo (vľavo)

$b = 0 \ldots y = ax^2 + c$ … vrchol paraboly je na osy y

$b \neq 0$ … vrchol paraboly je vpravo alebo vľavo od osy y

- súradnice vrcholu paraboly vypočítame takto:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2x\tfrac{b}{2a} + \tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\right] =$$

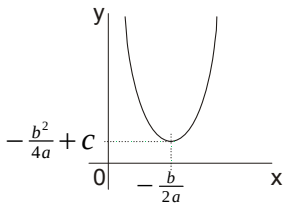
$$= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\right] = a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\tfrac{b^2}{4a} + c\right)$$

$$x + \tfrac{b}{2a} = 0$$

$$x = -\tfrac{b}{2a} \ldots y = -\tfrac{b^2}{4a} + c \qquad V\left[-\tfrac{b}{2a}, -\tfrac{b^2}{4a} + c\right]$$

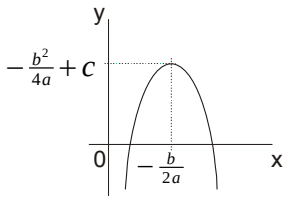
- koeficient a určuje, či má funkcia minimum alebo maximum a čím je $|a|$ väčšia, tým je parabola užšia

$a > 0$



má minimum

$a < 0$



má maximum

Pr.

Nakreslite graf funkcie $y = -2x^2 - 5x + 7$:

- graf bude prechádzať bodom 7 na osy y, vypočítame vrchol paraboly a priesečníky s osou x

$$y = -2x^2 - 5x + 7 = -2\left(x^2 + \tfrac{5}{2}x - \tfrac{7}{2}\right) =$$

$$= -2\left(x^2 + 2x\tfrac{5}{4} + \tfrac{25}{16} - \tfrac{25}{16} - \tfrac{7}{2}\right) =$$

$$= -2\left[\left(x + \tfrac{5}{4}\right)^2 - \tfrac{81}{16}\right] = -2\left(x + \tfrac{5}{4}\right)^2 + \tfrac{81}{8}$$

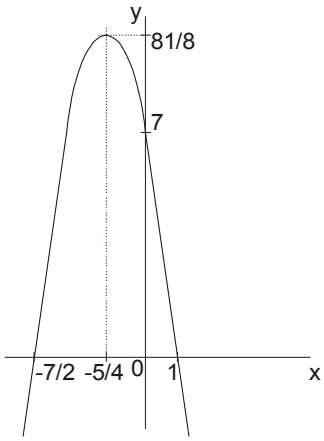
$$V\left[-\tfrac{5}{4}, \tfrac{81}{8}\right]$$

$$y = 0 \ldots 0 = -2x^2 - 5x + 7$$

$$D = b^2 - 4ac = 81 \qquad \sqrt{D} = 9$$

$$x_{1,2} = \tfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \tfrac{5 \pm 9}{-4}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -\tfrac{7}{2}$$

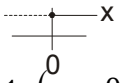


Pr.

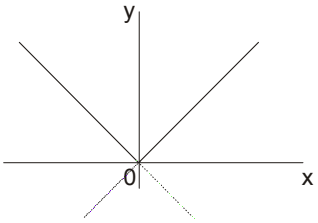
Nakreslite grafy funkcií

a) $y = |x|$

$x = 0$

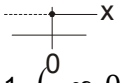


1. $(-\infty, 0\rangle \ldots y = -x$
2. $\langle 0, \infty) \ldots y = x$

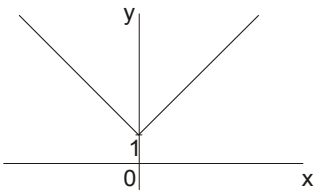


b) $y = |x| + 1$

$x = 0$

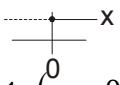


1. $(-\infty, 0\rangle \ldots y = -x + 1$
2. $\langle 0, \infty) \ldots y = x + 1$

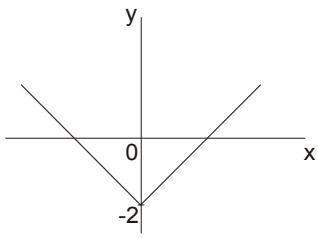


c) $y = |x| - 2$

$x = 0$



1. $(-\infty, 0\rangle \ldots y = -x - 2$
2. $\langle 0, \infty) \ldots y = x - 2$

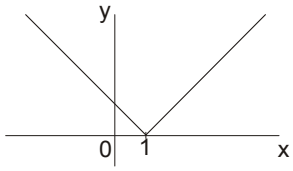


d) $y = |x - 1|$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

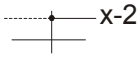
1. $(-\infty, 1\rangle \ldots y = -x + 1$
2. $\langle 1, \infty) \ldots y = x - 1$



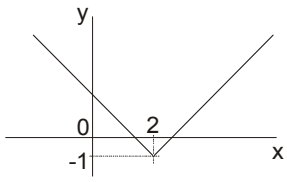
e) $y = |x - 2| - 1$

$x - 2 = 0$

$x = 2$



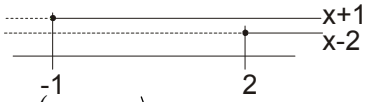
1. $(-\infty, 2\rangle \ldots y = -x + 1$
2. $\langle 2, \infty) \ldots y = x - 3$



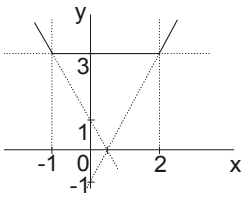
f) $y = |x - 2| + |x + 1|$

$x - 2 = 0 \qquad x + 1 = 0$

$x = 2 \qquad x = -1$



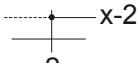
1. $(-\infty, -1\rangle \ldots y = -x + 2 - x - 1 = -2x + 1$
2. $\langle -1, 2\rangle \ldots y = -x + 2 + x + 1 = 3$
3. $\langle 2, \infty) \ldots y = x - 2 + x + 1 = 2x - 1$



g) $y = x|x - 2|$

$x - 2 = 0$

$x = 2$



1. $(-\infty, 2\rangle \ldots y = x(-x + 2) = -x^2 + 2x$

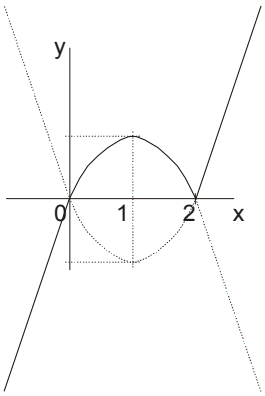
   $y = -x^2 + 2x = -1(x^2 - 2x + 1 - 1) =$

   $= -(x - 1)^2 + 1 \qquad V_1[1, 1]$

2. $\langle 2, \infty) \ldots y = x(x - 2) = x^2 - 2x$

   $y = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 =$

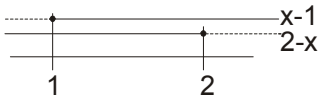
   $= (x - 1)^2 - 1 \qquad V_2[1, -1]$

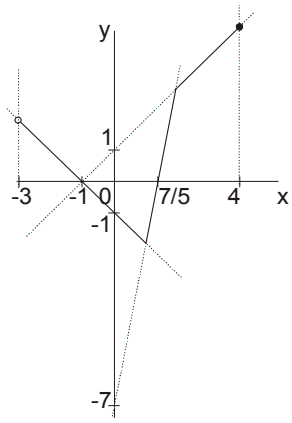


h) $y = 3|x-1| - 2|2-x|; x \in (-3;4\rangle$

$x-1=0 \qquad 2-x=0$

$x=1 \qquad x=2$





1. $(-\infty,1\rangle \ldots y = 3(-x+1) - 2(2-x) = -x-1$
2. $\langle 1,2\rangle \ldots y = 3(x-1) - 2(2-x) = 5x-7$
3. $\langle 2,\infty) \ldots y = 3(x-1) - 2(-2+x) = x+1$

i) $y = |x^2 - 2x|$

- najprv riešime bez absolútnej hodnoty:

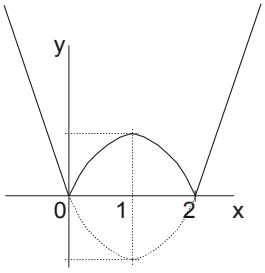
$y = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 =$

$= (x-1)^2 - 1 \qquad V[1,-1]$

$D = b^2 - 4ac = 4 \qquad \sqrt{D} = 2$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2}{2} \qquad x_1 = 0, x_2 = 2$

- nakreslíme graf a potom všetky časti grafu, ktoré sú pod osou x otočíme nad os



Pr.

Nájdite všetky kvadratické funkcie, pre ktoré platí: $f(-2) = -4; f(0) = 1; f(3) = 0$

$y = ax^2 + bx + c$

$-4 = a(-2)^2 + b(-2) + c$

$1 = a.0^2 + b.0 + c \qquad c = 1$

$0 = a.3^2 + b.3 + c$

$-5 = 4a - 2b$

$-1 = 9a + 3b$

$-15 = 12a - 6b$

$-2 = 18a + 6b$

$-17 = 30a$

$a = -\frac{17}{30} \ldots b = \frac{41}{30}$

$f: y = -\frac{17}{30}x^2 + \frac{41}{30}x + 1$

Pr.

Je daná kvadratická funkcia $f(x) = ax^2 + bx + c$. Určite znamienka čísel a, b, c, D, ak f nadobúda minimum a $0 > f(1) > f(-1)$.

- keďže funkcia nadobúda minimum, tak $a > 0$
- dve funkčné hodnoty sú pod osou x, teda $D > 0$ a $0 > c$
- pre b zo vzťahu $0 > f(1) > f(-1)$ platí:

$f(1) > f(-1)$

$a + b + c > a - b + c \qquad 2b > 0$

$b > 0$

- v predchádzajúcej kapitole sme si spomenuli extremálne úlohy, takéto úlohy sa dajú vypočítať aj bez použitia derivácie a určenia extrémov

Pr.

Farmár chce vybudovať výbeh pre sliepky pravouholníkového tvaru. Jedna strana bude časťou stany hydinárne, ktorá má dĺžku 100 m, k dispozícii má 90 m pletiva. Určite rozmery výbehu, aby bol obsah čo najväčší.

- bude platiť: $2x + y = 90 \ldots y = 90 - 2x$
- pre obsah platí: $S = x.y = x(90 - 2x) = -2x^2 + 90x$; vidíme, že táto funkcia má maximum a bude to vrchol paraboly, tak si ho vypočítame:

$$S = -2x^2 + 90x = -2(x^2 - 45x) = -2(x^2 - 45x) = -2\left[(x - 22{,}5)^2 - 506{,}25\right] =$$

$$= -2(x - 22{,}5)^2 + 1012{,}5 \qquad V[22{,}5; 1012{,}5]$$

- teda $x = 22{,}5;\ y = 45$

- overme si to pomocou derivácie:

$S' = -4x + 90 \qquad S' = 0 \qquad -4x + 90 = 0 \qquad x = 22{,}5$

$S'' = -4 \qquad S''(22{,}5) = -4 < 0 \ldots \mathrm{LMAX} \qquad y = 45$

- <u>polynóm, algebrická rovnica, polynomická funkcia</u>

<u>Def.</u>

Polynóm (mnohočlen), s jednou premennou $x \in R$, n-tého stupňa je každý výraz tvaru:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0; a_0, a_1, \ldots, a_n \in R, a_n \neq 0$.

<u>Def.</u>

Algebrická rovnica, s jednou premennou $x \in R$, n-tého stupňa je každá rovnica tvaru:

$f(x) = 0$, kde $f(x)$ je polynóm n-tého stupňa.

<u>Def.</u>

Polynomická funkcia n-tého stupňa je každá rovnica tvaru:

$y = f(x)$, kde $f(x)$ je polynóm n-tého stupňa.

<u>Def.</u>

Číslo $c \in R$, pre ktoré platí $f(c) = 0$ nazývame:

a) koreň polynómu $f(x)$

b) koreň algebrickej rovnice $f(x) = 0$

c) nulový bod polynomickej funkcie $y = f(x)$

<u>1. stupeň</u>

polynóm	$ax + b; a \neq 0$ … **lineárny dvojčlen** … koreň je $-\frac{b}{a}$	
algebrická rovnica	$ax + b = 0; a \neq 0$ $\quad x = -\frac{b}{a}$	**lineárna rovnica**
polynomická funkcia	$y = ax + b; a \neq 0$ … existuje nulový bod $-\frac{b}{a}$	

<u>2. stupeň</u>

polynóm $ax^2 + bx + c; a \neq 0$ … **kvadratický trojčlen** … korene závisia od diskriminantu:

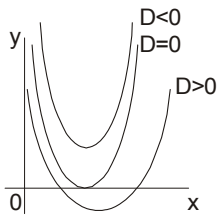
1. $D > 0$ … dva rôzne korene
2. $D = 0$ … jeden dvojnásobný koreň
3. $D < 0$ … žiadny koreň

algebrická rovnica $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$ … má 2, 1 alebo 0 koreňov

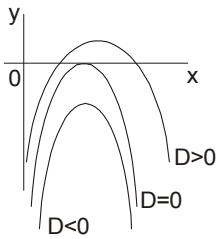
kvadratická rovnica

polynomická funkcia $y = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ … nulové body závisia od diskriminantu

$a > 0$



$a < 0$



3. stupeň

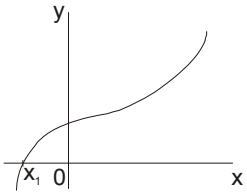
polynóm $ax^3 + bx^2 + cx + d; a \neq 0$ … **kubický štvorčlen** … vždy má aspoň jeden koreň (nemusí mať viac, môže mať 1-3)

algebrická rovnica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0; a \neq 0$ … má 3,2 alebo 1 koreň

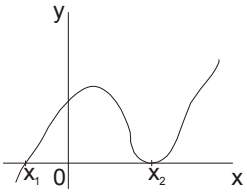
kubická rovnica

polynomická funkcia $y = ax^3 + bx^2 + cx + d; a \neq 0$ … má vždy aspoň jeden nulový bod; jej grafom je kubická parabola

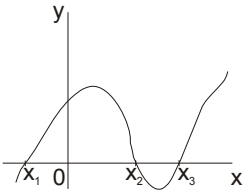
$a > 0$



x_1 je jednoduchý alebo trojnásobný koreň

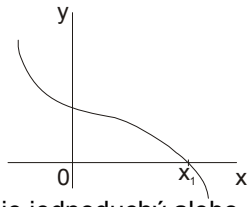


x_1 je jednoduchý x_2 je dvojnásobný

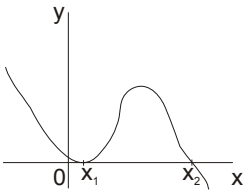


všetky sú jednoduché

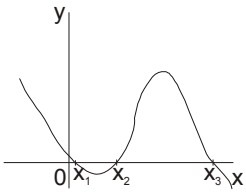
$a < 0$



x_1 je jednoduchý alebo trojnásobný koreň



x_1 je dvojnásobný x_2 je jednoduchý



všetky sú jednoduché

Veta

Číslo $c \in R$ je koreňom polynómu $f(x)$ n-tého stupňa práve vtedy, keď $f(x) = (x - c).q(x)$, kde $q(x)$ je polynóm stupňa $n - 1$

Dôkaz

1. c je koreň $\Rightarrow$ $f(x) = (x - c).q(x)$

$$f(c) = 0$$

$$f(x) = f(x) - 0 = f(x) - f(c) =$$

$$= \left(a_n x^n + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) - \left(a_n c^n + \cdots + a_3 c^3 + a_2 c^2 + a_1 c + a_0\right) =$$

$$= a_1(x - c) + a_2\left(x^2 - c^2\right) + a_3\left(x^3 - c^3\right) + \cdots + a_n\left(x^n - c^n\right) = a_1(x - c) +$$

$$+ a_2(x - c)(x + c) + a_3(x - c)\left(x^2 + xc + c^2\right) + \cdots + a_n(x - c)(\ldots) = (x - c).q(x)$$

2. $f(x) = (x-c).q(x) \Rightarrow c$ je koreň
$f(x) = (x-c).q(x)$
$f(c) = (c-c).q(x) = 0$
$f(c) = 0 \ldots c$ je koreň

Veta

Polynóm n-tého stupňa môže mať v množine R najviac n koreňov.

Dôkaz

Vyplýva z predchádzajúcej vety:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$f(x) = (x-c_1).q_1(x) = (x-c_1).(x-c_2).q_2(x) = \cdots = (x-c_1).(x-c_2).\cdots.(x-c_n).q_n(x)$

- kde $c_i; i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sú korene a $q_i; i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sú polynómy stupňa $n-1$, teda $q_n(x)$ bude už iba n nejaké číslo

Veta

Polynómy párneho stupňa nemusí mať v obore R koreň, polynóm párneho stupňa má vždy aspoň jeden koreň.

Dôkaz

Polynóm párneho stupňa nemá koreň ak sa dá rozložiť len na kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$, ktorých diskrimant $D = b^2 - 4ac$ je záporný.

Polynóm nepárneho stupňa má vždy aspoň jeden koreň, pretože sa vždy dá rozložiť na súčin kvadratických trojčlenov a lineárneho dvojčlenu; a lineárny dvojčlen $ax + b$ má vždy koreň $-\frac{b}{a}$.

Veta

Polynóm nepárneho stupňa môže mať v obore R iba nepárny počet koreňov a polynóm párneho stupňa iba párny počet koreňov.

Dôkaz

Pre polynóm nepárneho stupňa platí, že sa dá rozložiť na súčin lineárneho dvojčlenu a kvadratických trojčlenov. Teda ak sa kvadratické trojčleny nedajú rozložiť, tak má jeden koreň a ak sa dajú, tak má $1 + k.2$ koreňov, kde k je počet rozložiteľných kvadratických trojčlenov. Takže má vždy nepárny počet koreňov.

Pre polynóm párneho stupňa platí, že sa dá rozložiť na súčin kvadratických trojčlenov, (ak sa už nedajú rozložiť, tak má nula koreňov) a polynóm má $k.2$ koreňov, kde k je počet rozložiteľných kvadratických trojčlenov. Takže má vždy párny počet koreňov.

- bude platiť pravidlo: Polynóm druhého stupňa sa nemusí dať rozložiť na súčin polynómov nižšieho stupňa. Každý polynóm stupňa tretieho a vyššieho sa dá rozložiť na súčin polynómov najviac druhého stupňa.

Pr.

Rozložte na súčin a určite korene v obore R:

a) $a(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$

$x^4 - x^3 + x^2 - x = x^3(x-1) + x(x-1) = (x-1)(x^3 + x) = (x-1)(x^2+1)x$

- korene sú dva $x_1 = 1, x_2 = 0$ a $x^2 + 1$ v obore R nie je rozložiteľný

b) $b(x) = 2x^3 + x^2 + 1$

- polynóm má aspoň jeden koreň, tak ho uhádneme a budeme deliť

$x_1 = -1 \ldots b(-1) = 0$

$b(x) = 2x^3 + x^2 + 1 = (x+1).q(x)$

$(2x^3 + x^2 + 1) : (x+1) = 2x^2 - x + 1$

$\mp 2x^3 \mp 2x^2$

$\theta \quad -x^2 + 1$

$\pm x^2 \pm x$

$\theta \quad x + 1$

$\mp x \mp 1$

$\theta \quad \theta$

$b(x) = 2x^3 + x^2 + 1 = (x+1)(2x^2 - x + 1)$

- $2x^2 - x + 1$ sa už nedá rozložiť, tak koreň je len jeden

- rozkladanie na súčin môžeme využiť pri rýchlom nakreslení grafu; keď nepotrebujeme vedieť, kde je funkcia konvexná alebo konkávna; kde má minimum či maximum; ...

> použijeme na ta jednoduché pravidlo:

1. začíname kresliť od $-\infty$, to či je graf nad osou x alebo pod ňou určuje člen s najvyšším stupňom (n); ak je párny stupeň, tak graf je nad osou x a ak je nepárny, tak je pod osou
2. pri rozklade na súčin si určíme nulové body, tým zistíme aj ich násobnosť, tá nám určí, či graf v nulovom bode prejde cez os x alebo nie; ak je nulový bod párnej násobnosti, tak sa znamienko nemení, teda graf zostáva v tej istej polrovine a ak je nepárnej, tak znamienko sa mení a graf prechádza cez os

<u>Pr.</u>

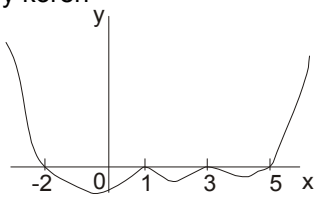
Nakreslite graf:

a) $f : y = (x+2)(x-1)^2(x-3)^4(x-5)^7$

$y = (x+2)(x-1)^2(x-3)^4(x-5)^7$

$x = -2 \quad x = 1 \quad x = 3 \quad x = 5$

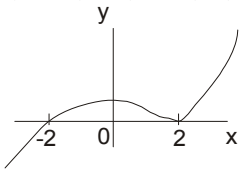
- ak by sme všetko roznásobili, tak člen s najvyšším stupňom by bol x^{14}, teda párny; -2 je jednoduchý , 1 je dvojnásobný, 3 je štvornásobný, 5 je sedem násobný koreň



b) $f : y = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

$y = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x(x^2 - 4) - 2(x^2 - 4) = (x-2)(x^2 - 4) =$

$= (x-2)(x-2)(x+2) = (x-2)^2(x+2) \qquad x = 2 \quad x = -2$



Pr.

Dokážte:

a) $f(x)$ je párna práve vtedy, keď koeficienty s nepárnymi indexmi sú nulové

1. $f(x)$ je párna $\Rightarrow$ koeficienty s nepárnymi indexmi sú nulové
   - zoberme si napríklad funkciu:

$$f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$f(x)$ je párna, teda platí $f(-x) = f(x)$

$$a_6x^6 - a_5x^5 + a_4x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 = a_6x^6 + a_5x^5 +$$
$$+ a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$2(a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x) = 0$$
$$a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x = 0$$
$$a_5 = 0 \wedge a_3 = 0 \wedge a_1 = 0$$

2. koeficienty s nepárnymi indexmi sú nulové $\Rightarrow$ $f(x)$ je párna

$$f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f(-x) = a_6x^6 - a_5x^5 + a_4x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0$$
$$a_5 = 0 \wedge a_3 = 0 \wedge a_1 = 0$$
$$f(x) = a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$$
$$f(-x) = a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$$

$f(x)$ je párna

b) $f(x)$ je nepárna práve vtedy, keď koeficienty s párnymi indexmi sú nulové

1. $f(x)$ je nepárna $\Rightarrow$ koeficienty s párnymi indexmi sú nulové
   - zoberme si napríklad funkciu:

$$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$f(x)$ je nepárna, teda platí $f(-x) = -f(x)$

$$-a_5x^5 + a_4x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 = -a_5x^5 -$$
$$-a_4x^4 - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$$
$$2(a_4x^4 + a_2x^2 + a_0) = 0$$
$$a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0$$
$$a_4 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_0 = 0$$

2. koeficienty s párnymi indexmi sú nulové $\Rightarrow$ $f(x)$ je nepárna

$$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f(-x) = a_6x^6 - a_5x^5 + a_4x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0$$
$$a_4 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_0 = 0$$
$$-f(x) = -a_5x^5 - a_3x^3 - a_1x$$
$$f(-x) = -a_5x^5 - a_3x^3 - a_1x$$

$f(x)$ je nepárna

Veta

Nech $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0; a_0, a_1, \ldots, a_n \in Z, a_n \neq 0$ a nech $c \in Z$ je jeho koreňom, potom $c \mid a_0$.

Dôkaz

$c \in Z$ je koreň $\Rightarrow c \mid a_0$

c je koreň

$$f(c)=a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = 0$$

$$a_0 = c\underbrace{\left[-a_n c^{n-1} - a_{n-1}c^{n-1} - \cdots - a_2 c - a_1\right]}_{m \in Z}$$

$$a_0 = c.m$$

$$c \mid a_0$$

Pr.

Nájdite celočíselné korene polynómu:

$f(x)=x^4-3x^3-6x^2+6x+8$ - vypíšeme si delitele osmičky: $8 \ldots \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

a všetky dosadíme za x do $f(x)$, tie pre ktoré $f(x)=0$ sú koreňmi polynómu

$$f(1)=6,\ \underline{f(-1)=0},\ f(2)=-12,\ f(-2)=12,\ \underline{f(4)=0},\ f(-4)=336,$$

$$f(8)=2223,\ f(-8)=5208$$

$$x^4-3x^3-6x^2+6x+8=(x+1)(x-4).q(x)$$

$$(x+1)(x-4)=x^2-3x-4$$

$$\left(x^4-3x^3-6x^2+6x+8\right):\left(x^2-3x-4\right)=x^2-2$$

$$\underline{\mp x^4 \pm 3x^3 \pm 4x^2}$$

$$\theta \quad \theta \quad -2x^2+6x+8$$

$$\underline{\pm 2x^2 \mp 6x \mp 8}$$

$$\theta \quad \theta \quad \theta \qquad x^4-3x^3-6x^2+6x+8=(x+1)(x-4)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$$

Veta

Nech $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0; a_0, a_1, \ldots, a_n \in Z, a_n \neq 0$ a nech $\frac{p}{q} \in Q; D(p,q)=1$ je jeho koreňom, potom $p \mid a_0 \wedge q \mid a_n$.

Dôkaz

$\frac{p}{q} \in Q; D(p,q)=1$ je koreň $\Rightarrow p \mid a_0 \wedge q \mid a_n$

$\frac{p}{q}$ je koreň

$$f\left(\tfrac{p}{q}\right)=a_n\left(\tfrac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\tfrac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\tfrac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\tfrac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \ \Big|.q^n$$

$$\underline{a_n p^n} + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + \underline{a_0 q^n} = 0$$

1. $a_0 q^n = p\left[-a_n p^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2}q - \cdots - a_2 p q^{n-2} - a_1 q^{n-1}\right]$

   $p \mid a_0 q^n \wedge D(p,q)=1 \ldots\ p \mid a_0$

2. $a_n p^n = q\left[-a_{n-1}p^{n-1} - \cdots - a_2 p^2 q^{n-3} + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right]$

   $q \mid a_n p^n \wedge D(p,q)=1 \ldots q \mid a_n$

Pr.

Nájdite racionálne korene polynómu:

$f(x) = 6x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 2$ - vypíšeme si delitele -2: $-2 \ldots \pm 1, \pm 2$ a 6:

$6 \ldots \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

- máme takéto možnosti pre korene: $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 2, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

a všetky dosadíme za x do $f(x)$, tie pre ktoré $f(x) = 0$ sú koreňmi polynómu

$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$

$6x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right).q(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right).q'(x)$

$6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 6x^2 - x - 2$

$\left(6x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 2\right) : \left(6x^2 - x - 2\right) = x^2 + 1$

$\mp 6x^4 \pm x^3 \pm 2x^2$

$\theta \quad \theta \quad 6x^2 - x - 2$

$\mp 6x^2 \pm x \pm 2$

$\theta \quad \theta \quad \theta \qquad 6x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x^2 + 1\right)$

- zistili sme, že $f(x)$ môže mať:

1. celočíselné korene $(1, -5, \ldots)$
2. racionálne korene $\left(\frac{1}{5}, -\frac{5}{8}, \ldots\right)$
3. iracionálne korene $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{5}, \ldots\right)$

- <u>racionálne lomené funkcie</u>

<u>Def.</u>

Racionálna funkcia je každá funkcia určená rovnicou $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x), q(x)$ sú polynómy.

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

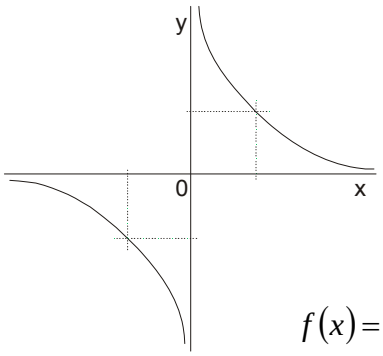
<u>Def.</u>

Nepriama úmernosť je každá funkcia určená rovnicou $y = \frac{k}{x}; k \in Z, k \neq 0$.

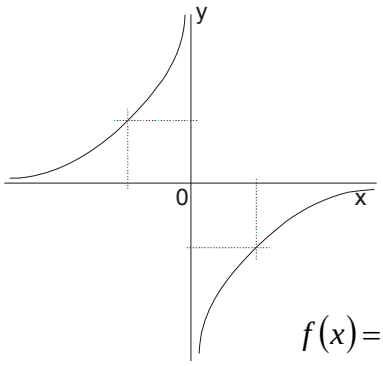
$y = \frac{k}{x}; k \in Z, k \neq 0 \qquad D(f) = R - \{0\}, H(f) = R - \{0\}$

$k > 0$
1. a 3. kvadrant

$k < 0$
2. a 4. kvadrant



$f(x) = \frac{1}{x}$

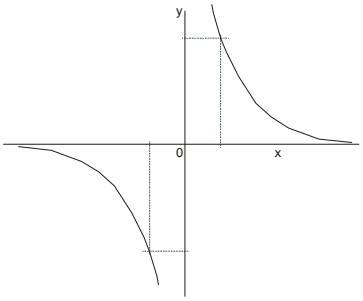


$f(x) = -\frac{1}{x}$

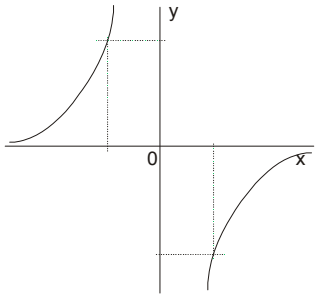
- graf je rovnoosová hyperbola

Pr.

a) $y = \frac{3}{x} = 3.\frac{1}{x}$



b) $y = \frac{-2}{x} = 2.\frac{-1}{x}$



Def.

Lineárna lomená funkcia je každá funkcia určená rovnicou $y = \frac{ax+b}{cx+d}; a,b,c,d \in R, c \neq 0,$ $a.d \neq b.c$.

$D(f) = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

Návod

Rovnicu lineárnej lomenej funkcie $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ možno vždy upraviť na tvar $y = \frac{k}{x-o_1} + o_2$. Preto grafom lineárnej lomenej funkcie je rovnoosová hyperbola, ktorej vetvy sa približujú k pomocnej súradnicovej sústave so začiatkom $O'[o_1, o_2]$.

$$\boxed{y = \frac{k}{x-o_1} + o_2}$$

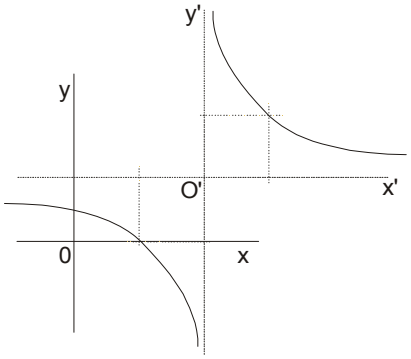
Pr.

Nakreslite graf:

a) $y = \frac{x-1}{x-2}$

$y = \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+2-1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$ $\qquad O'[2,1]$

$x = 0 \ldots y = \frac{1}{2} \quad y = 0 \ldots x = 1$

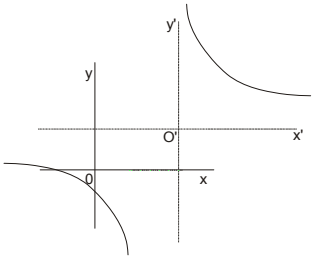


b) $y = \left|\frac{x+1}{x-2}\right|$

$y = \left|\frac{x+1}{x-2}\right| = \left|\frac{x-2+2+1}{x-2}\right| = \left|\frac{3}{x-2} + 1\right|$ $\qquad O'[2,1]$

- bez absolútnej hodnoty: $x = 0 \ldots y = -\frac{1}{2} \quad y = 0 \ldots x = -1$

- s absolútnou hodnotou: $x = 0 \ldots y = \frac{1}{2} \quad y = 0 \ldots x = -1$



Neriešené úlohy

1. Nakreslite graf funkcie:

a) $f: y = 2|x-1| - 3|3-x|$ b) $f: y = 3|2-x| - |3+x|$ c) $f: y = |x^2 + 6x + 4|$

d) $f: y = x^2 - 4|x| + 1$ e) $f: y = x|x| - 4x + 1$ f) $f: y = x^2 - 6|x-1| + 2$

g) $f: y = (x-1)^4 (x-2)^3 (x-3)^2 (x-4)$ h) $f: y = x^5 - 7x^4 + 12x^3$

i) $f: y = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$ j) $f: y = x^2 (x+1)^3 (x-2)^2$

2. V nádobe s objemom 1000 litrov je 200 litrov vody. Priteká do nej 20 litrov za minútu. Nájdite funkciu, ktorá vyjadruje závislosť objemu vody v nádrži od času.

3. Robotník vyrobí za hodinu 4 výrobky. Nájdite funkciu, ktorá vyjadruje závislosť počtu vyrobených výrobkov od času, ak prvé dve hodiny opravoval stroj.

4. Firma VIZIT stanovuje cenu za výrobu sady vizitiek podľa vzťahu $C = 60 + 4.p$, kde C je cena v korunách, 60 (Sk) je základný poplatok a p je počet objednaných kusov vizitiek. Od budúceho mesiaca plánuje firma zvýšiť základný poplatok o pätinu a cenu za každý vyrobený kus o pätinu znížiť. Podľa akého vzťahu bude firma po úprave stanovovať cenu?

5. Nájdite lineárnu funkciu f, ktorej graf je rovnobežný s grafom funkcie $g: y = 2x + 3$ a prechádza bodom $A[3;1]$.

6. Graf lineárnej funkcie f prechádza bodmi $A[50;-1], B[51;3]$. Vypočítajte súčet $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100)$.

7. Je daná funkcia $f: y = 2x^2 - 3x + 1$. Nájdite všetky $m \in R$ také, že $f(1-m) = f(m-1)$.

8. Grafy funkcií $f: y = x^2 + 4x + c$ a $f: y = ax^2 + 2bx + 5$ sú paraboly súmerne združené podľa priamky $y = 1$. Určite čísla a, b, c.

9. Rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ nemá reálne korene a platí $a - b + c < 0$. Určite znamienko čísla c.

10. Nájdite kvadratickú funkciu, ktorej graf má vrchol $V[2,7]$ a prechádza bodom $A[3,1]$.

11. Nájdite kvadratickú funkciu, ktorá pretína os x v bodoch $X_1[0,?]; X_2[4,?]$ a vrchol má v bode $V[2,4]$.

12. Nájdite polynomickú funkciu najnižšieho stupňa, ktorá obsahuje usporiadané dvojice:

a) $[0,0]; [-2,4]; [3,6]$ b) $[0,1]; [1,-1]; [2,0]; [3,3]$

13. Nájdite kubickú funkciu, ktorá má v bode $[4,6]$ lokálne maximum a v bode $[6,1]$ lokálne minimum.

14. Koľko nulových bodov má funkcia $f: y = x^5 - 5x + a$ v závislosti od parametra $a \in R$.

15. Nech f je polynóm s celočíselnými koeficientmi, ktorý aspoň v troch rôznych celých číslach nadobúda hodnotu 2. Potom f v žiadnom celom čísle nemá hodnotu 3. Dokážte.

16. Nájdite všetky funkcie $f: y = ax - 1$**, pre ktoré platí: ak** $x \in \langle -1, 2 \rangle$**, tak** $f(x) \in \langle -2, 4 \rangle$**.**

17. Je daná množina F **funkcií určených rovnicou** $y = ax + 2; a \in R$**. Nájdite všetky také funkcie z množiny** F **, pre ktoré platí: ak** $x \in \langle -3, 3 \rangle$**, tak** $f(x) \geq -6$**.**

18. Nájdite všetky funkcie $f: y = ax^2; a \neq 0$**, pre ktoré platí: ak** $x \in \langle -2, 2 \rangle$**, tak** $f(x) \in \langle -5, 5 \rangle$

19. Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = \frac{3x-6}{x-3}$ b) $y = \left|\frac{x-1}{x-2}\right|$ c) $y = \left|\frac{3x-6}{2x+5}\right|$

20. Pre funkciu $f: y = \frac{ax+b}{cx+b}$ **platí** $f(1) = 2,\ f(-2) = 5,\ f(2) = \frac{5}{3}$**. Určite rovnicu a načrtnite graf.**

21. Určite lineárnu lomenú funkciu, ak prechádza bodom $A[3, -1]$ **a** $1 \notin D(f), -2 \notin H(f)$**.**

13. MOCNINY A MOCNINOVÉ FUNKCIE

1. Prirodzený mocniteľ
- definícia mocniny s prirodzeným mocniteľom, definičný obor, vlastnosti
- mocninové funkcie s prirodzeným mocniteľom
- binomická veta, vzorce $a^n \pm b^n$

2. Celočíselný mocniteľ
- definícia mocniny s celočíselným mocniteľom, definičný obor, vlastnosti
- mocninové funkcie s celočíselným mocniteľom

3. Odmocniny
- definícia n-tej odmocniny
- vlastnosti odmocnín
- odmocninové funkcie

4. Inverzné funkcie

5. Racionálny mocniteľ
- definícia mocniny s racionálnym mocniteľom, definičný obor, vlastnosti
- funkcie s racionálnym mocniteľom

.....

Def.

Mocninová funkcia je každá funkcia určená rovnicou $y = x^r; r \in R$.
(x je základ mocniny a r je exponent (mocniteľ))

$y = x^3, y = x^{\frac{3}{7}}, y = x^{-3}, y = x^{\sqrt{2}}, \ldots$

- mocniny a mocninové funkcie s prirodzeným exponentom

Def.

$\forall n \in N \ \forall a \in R$ definujeme:

1. $a^1 = a$
2. $a^{n+1} = a^n.a$

$a^2 = a.a \qquad a^3 = a.a.a \qquad a^n = \underbrace{a.a.\cdots.a}_{n}$

Veta

$\forall r, s \in N \ \forall a, b \in R$:

1. $a^r.a^s = a^{r+s}$
2. $(a^r)^s = a^{r.s}$
3. $(ab)^r = a^r b^r$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}; b \neq 0$

Dôkaz

1. a) $s = 1 \ldots a^r.a^1 = a^r.a = a^{r+1}$ platí

b) $\forall s \in N : a^r a^s = a^{r+s} \Rightarrow a^r a^{s+1} = a^{r+s+1}$

$a^r a^{s+1} = a^r a^s a = a^{r+s} a = a^{r+s+1}$

2. a) $s=1\ldots\left(a^r\right)^1=a^r=a^{r.1}$ platí

b) $\forall\, s\in N:\left(a^r\right)^s=a^{rs}\Rightarrow\left(a^r\right)^{s+1}=a^{r(s+1)}$

$\left(a^r\right)^{s+1}=\left(a^r\right)^s.a^r=a^{rs}a^r=a^{rs+r}=a^{r(s+1)}$

c) $r=1\ldots\left(a^1\right)^s=a^s=a^{1.s}$ platí

d) $\forall\, r\in N:\left(a^r\right)^s=a^{rs}\Rightarrow\left(a^{r+1}\right)^s=a^{(r+1)s}$

$\left(a^{r+1}\right)^s=\left(a^r a\right)^s=\left(a^r\right)^s a^s=a^{rs}a^s=a^{rs+s}=a^{(r+1)s}$

3. a) $r=1\ldots(ab)^1=ab=a^1b^1$ platí

b) $\forall\, r\in N:(ab)^r=a^rb^r\Rightarrow(ab)^{r+1}=a^{r+1}b^{r+1}$

$(ab)^{r+1}=(ab)^r ab=a^rb^rab=a^rab^rb=a^{r+1}b^{r+1}$

4. a) $r=1\ldots\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}=\frac{a^1}{b^1}$ platí

b) $\forall\, r\in N:\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^{r+1}=\frac{a^{r+1}}{b^{r+1}}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{r+1}=\left(\frac{a}{b}\right)^r\frac{a}{b}=\frac{a^r}{b^r}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^ra}{b^rb}=\frac{a^{r+1}}{b^{r+1}}$

<u>Pr.</u>

Zjednodušte:

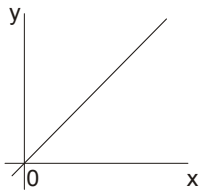
a) $2^3.2^4.2^5.2^6.2^7$ $\qquad 2^{25}$

b) $2^a.2^{2a}.2^{3a}$ $\qquad 2^{6a}$

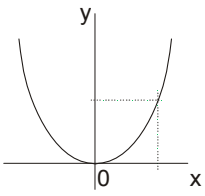
c) $3.2^{k+3}-2.2^{k+2}+2^{k+4}$ $\qquad 3.2^{k+3}-2^{k+3}+2.2^{k+3}=4.2^{k+3}=2^2.2^{k+3}=2^{k+5}$

$f_n:y=x^n$

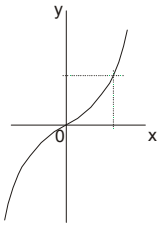
$f_1:y=x$



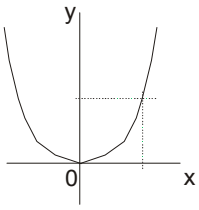
$f_2:y=x^2$



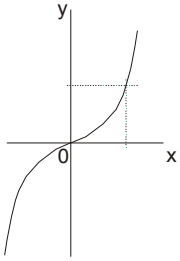
$f_3:y=x^3$



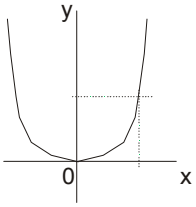
$f_4:y=x^4$



$f_5:y=x^5$

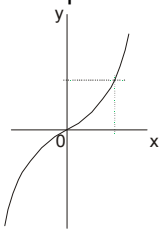


$f_6:y=x^6$



$f_n : y = x^n$

n nepárne



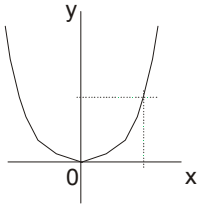
$D(f) = R$

$H(f) = R$

nepárna

prostá

n párne



$D(f) = R$

$H(f) = R$

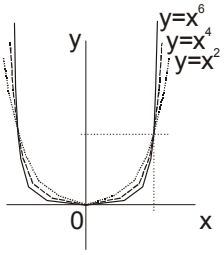
párna

nie je prostá

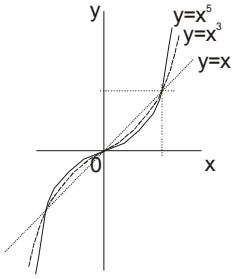
Pr.

Do jednej súradnicovej sústavy nakreslite:

a) $y = x^2, y = x^4, y = x^6$



b) $y = x, y = x^3, y = x^5$



Veta

$\forall a, b \in R \ \forall n \in N$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Dôkaz

1. $n = 1 \ldots (a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a + b$ platí

2. $\forall k \in N : (a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \Rightarrow (a+b)^{k+1} =$

$$= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \cdots + \binom{k}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b) = \left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right).$$

$$.(a+b) = \left(\binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \cdots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k\right) +$$

$$+\left(\binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}\right)$$

- ďalej využijeme: $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0} \wedge \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1} \wedge \binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1}$

- teda: $\binom{k}{0}a^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1}; \binom{k}{k}b^{k+1} = \binom{k+}{k+1}b^{k+1};$

$$\binom{k}{i}a^{k-i+1}b^i + \binom{k}{i-1}a^{k-i+1}b^i = \binom{k+1}{i}a^{k-i+1}b^i$$

- potom:

$$\binom{k}{0}a^{k+1} + \left(\binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^k b\right) + \cdots + \left(\binom{k}{k}ab^k + \binom{k}{k-1}ab^k\right) +$$

$$+\binom{k}{k}b^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \cdots + \binom{k}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

- vzorec: $(a-b)^n$ si ľahko odvodíme: $(a-b)^n = (a+(-b))^n$ a môžeme použiť vzorec pre $(a+b)^n$ s rozdielom, že členy, v ktorých má b nepárny exponent budú záporné

- členy binomického rozvoja $(a+b)^n$ môžeme očíslovať: $a_0, a_1, \ldots a_n$, pričom platí:

$$a_k = \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k; k = 0,1,2,\ldots,n$$

- čiže, keď chceme zistiť i-ty člen rozvoja $(a+b)^n$, tak ho vypočítame takto:

$$a_i = \binom{n}{i-1}a^{n-i+1}.b^{i-1}; i = 1,2,\ldots,n,n+1$$

- <u>mocniny a mocninové funkcie s celočíselným exponentom</u>

$a^n; n \in Z$ $\quad a^2, a^3, a^{-2}, a^{-5}, a^0$

$$a^n; n \in Z$$

$n > 0$	$n = 0$	$n < 0$
$n \in N$	$a^0 = 1; a \neq 0$	$n = -k; k \in N$
		$a^{-k} = \frac{1}{a^k}; a \neq 0$

<u>Veta</u>

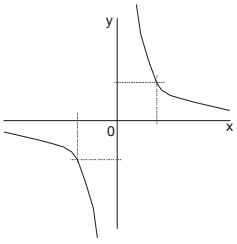
$\forall r, s \in Z \ \forall a, b \in R - \{0\}$:

1. $a^r.a^s = a^{r+s}$
2. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
3. $(a^r)^s = a^{r.s}$
4. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
5. $(ab)^r = a^r b^r$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}; b \neq 0$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \frac{b^r}{a^r}$

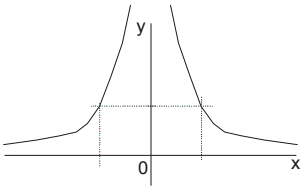
- dôkazy sú podobné ako pri prirodzenom exponente (pre 4. sa použije $a^{-r} = a^{-1.r}$ a potom sa dokáže 2. vlastnosť)

$f_n : y = x^{-n}; n \in N$

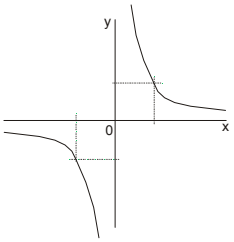
$f_1 : y = \frac{1}{x}$



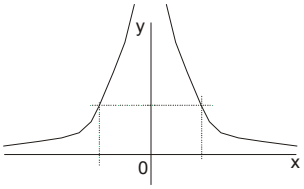
$f_2 : y = \frac{1}{x^2}$



$f_3 : y = \frac{1}{x^3}$

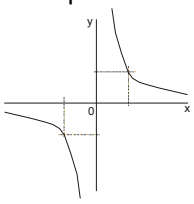


$f_4 : y = \frac{1}{x^4}$



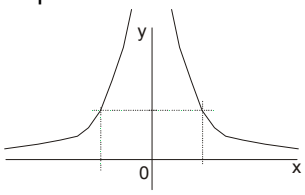
$f_n : y = x^{-n}$

n nepárne



$D(f) = R - \{0\}$
$H(f) = R - \{0\}$
nepárna
prostá

n párne



$D(f) = R - \{0\}$
$H(f) = R - \{0\}$
párna
nie je prostá

- <u>odmocniny</u>

<u>Def.</u>

Druhou odmocninou $a \in R; a \geq 0$ nazývame číslo $x \in R; x \geq 0$, pre ktoré platí $x^2 = a$.

$x = \sqrt{a}$

$$\sqrt{9} = 3, \sqrt{4} = 2, \sqrt{0} = 0, \ldots$$

- označenie $\sqrt{\ }$ vzniklo používaním: najprv sa odmocnina označovala $\mathrm{radix}(a)$, potom $\mathrm{r}(a)$ a z toho potom vzniklo $\sqrt{a}$

<u>Veta</u>

$\forall a, b \in R_0^+$:

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

- dôkaz si uvedieme pri n-tej odmocnine

Pr.

Vyjadrite pomocou odmocniny z čo najmenšieho prirodzeného čísla:

a) $\sqrt{8}$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$$

b) $\sqrt{24}$

$$\sqrt{24} = \sqrt{6.4} = \sqrt{4}.\sqrt{6} = 2.\sqrt{6}$$

c) $\sqrt{45}$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9.5} = \sqrt{9}.\sqrt{5} = 3.\sqrt{5}$$

Def.

Tretia odmocnina $a \in R; a \geq 0$ je číslo $x \in R; x \geq 0$, pre ktoré platí $x^3 = a$.

$x = \sqrt[3]{a}$

$$\sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{512} = 8, \ldots$$

Veta

$\forall\, a, b \in R_0^+$:

1. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$
2. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$
3. $a\sqrt[3]{b} = \sqrt{a^3 b}$

- dôkaz si uvedieme pri n-tej odmocnine

Pr.

Zjednodušte:

a) $5\sqrt{2} - \sqrt{8} - 3\sqrt{2}$

$$5\sqrt{2} - \sqrt{8} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(5 - 2 - 3) = 0\sqrt{2} = 0$$

b) $\sqrt{50} - \sqrt{98} + \sqrt{32}$

$$\sqrt{50} - \sqrt{98} + \sqrt{32} = \sqrt{2.25} - \sqrt{49.2} + \sqrt{16.2} = 5.\sqrt{2} - 7.\sqrt{2} +$$
$$+ 4.\sqrt{2} = 2..\sqrt{2}$$

c) $\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)^2$

$$\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)^2 = 12 - 12\sqrt{6} + 18 = 30 - 12\sqrt{6}$$

Pr.

Usmernite (upravte, tak aby v menovateli nebola odmocnina):

a) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{2-2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} - 1$$

b) $\frac{3}{2-\sqrt{5}}$

$$\frac{3}{2-\sqrt{5}} = \frac{3}{2-\sqrt{5}}\frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{6+3\sqrt{5}}{4-5} = -6 - 3\sqrt{5}$$

c) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

d) $\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$$\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -4\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$$

Def.

n-tá odmocnina $a \in R; a \geq 0$ je číslo $x \in R; x \geq 0$, pre ktoré platí $x^n = a$.

$x = \sqrt[n]{a}$

Veta

$\forall\, a,b \in R_0^+ \;\; \forall m,n \in N \;\; \forall\, s \in Z$:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; b \neq 0$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
4. $\sqrt[n]{a^s} = \sqrt[n.m]{a^{s.m}}$
5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$
6. $\sqrt[n]{a^n} = a$

Dôkaz

1. $\sqrt[n]{a} = x \ldots a = x^n$

   $\sqrt[n]{b} = y \ldots b = y^n$

   $a.b = x^n.y^n = (x.y)^n$

   $\sqrt[n]{ab} = x.y = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{a} = x \ldots a = x^n$

   $\sqrt[n]{b} = y \ldots b = y^n$

   $\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$

   $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $\sqrt[m]{a} = x \ldots a = x^m$

   $\sqrt[n]{x} = y \ldots x = y^n$

   $a = x^m = \left(y^n\right)^m = y^{nm}$

   $\sqrt[nm]{a} = y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

4. $\sqrt[n]{a^s} = x \ldots a^s = x^n$

   $\sqrt[n]{a^s}$

   $a^s = x^n \;\Big|\; m$

   $\left(a^s\right)^m = \left(x^n\right)^m$

   $x^{nm} = a^{sm}$

   $\sqrt[nm]{a^{sm}}$

6. $a^n = x$

   $\sqrt[n]{x} = y \ldots x = y^n$

   $a^n = y^n$

   $a = y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n}$

5. $a^s = x \ldots a = \sqrt[s]{x}$

   $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \left(\sqrt[n]{\sqrt[s]{x}}\right)^s =$

   $= \left(\sqrt[ns]{x}\right)^s = \left(\sqrt[ns]{a^s}\right)^s =$

   $= \left(\sqrt[s]{\sqrt[n]{a^s}}\right)^s$

- <u>inverzné funkcie</u>

$f = \{[1,3];[2,2];[3,5];[4,1]\}$ prostá

$f^{-1} = \{[3,1];[2,2];[5,3];[1,4]\}$ je funkcia

$g = \{[1,3];[2,2];[3,5];[4,1]\}$ nie je prostá

$g^{-1} = \{[3,1];[2,2];[5,3];[1,4]\}$ nie je funkcia

Veta

Pre každú funkciu f platí: f^{-1} je funkcia práve vtedy, keď f je prostá.

Dôkaz

- obmena: f^{-1} nie je funkcia práve vtedy, keď f nie je prostá

Nech f nie je prostá, tak existujú x_1, x_2, ktoré sa zobrazujú na y_1, y_2 a platí $y_1 = y_2$. Potom pre f^{-1} bude platiť, že y_1, y_2 ($y_1 = y_2$) sa zobrazujú na x_1, x_2, keďže tieto sú rôzne, tak f^{-1} nie je funkcia.

Def.

Inverzná funkcia k prostej funkcii f je funkcia $f^{-1} = \{[y,x]; y = f(x)\}[x,y] \in f$.

- vlastnosti inverzných funkcií:

1. $D(f^{-1}) = H(f); H(f^{-1}) = D(f)$
2. ak f je rastúca (klesajúca), tak f^{-1} je rastúca (klesajúca)
3. grafy f a f^{-1} sú súmerne združené podľa priamky $y = x$

Pr.

Nájdite inverzné funkcie (ak existujú) a zostrojte graf:

a) $f: y = 3x - 2; x \in \langle -1, 2 \rangle$

- určíme si definičný obor a obor hodnôt

$f(-1) = -5 \qquad f(2) = 4$

$D(f) = \langle -1, 2 \rangle = H(f^{-1})$

$H(f) = \langle -5, 4 \rangle = D(f^{-1})$

- na to, aby sme určili rovnicu inverznej funkcie, nám postačí v rovnici funkcie f, vymeniť x s y

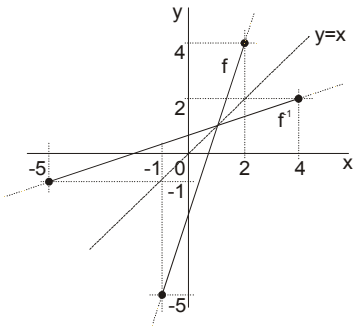
$f: y = 3x - 2$

$f^{-1}: x = 3y - 2$

$3y = x + 2$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$f^{-1}: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}; x \in \langle -5, 4 \rangle$



b) $f: y = 3x - 5; x \in (1, 3\rangle$

$f(1) = -2 \qquad f(3) = 4$

$D(f) = (1, 3\rangle = H(f^{-1})$

$H(f) = (-2, 4\rangle = D(f^{-1})$

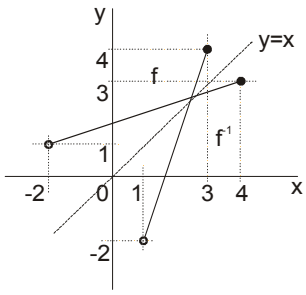
$f: y = 3x - 5$

$f^{-1}: x = 3y - 5$

$3y = x + 5$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

$f^{-1}: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}; x \in (-2, 4\rangle$



c) $f: y = \frac{1-x}{1+x}$

$y = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x-1)}{1+x} = \frac{-(x+1-1-1)}{1+x} = \frac{-(x+1-2)}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}$ $\qquad O'[-1, -1]$

$D(f) = R - \{-1\} = H(f^{-1})$

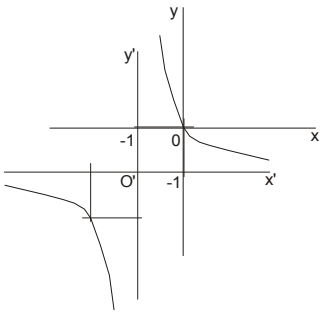
$H(f) = R - \{-1\} = D(f^{-1})$

$f: y = \frac{1-x}{1+x}$

$f^{-1}: x = \frac{1-y}{1+y} = \frac{2}{y+1} - 1$

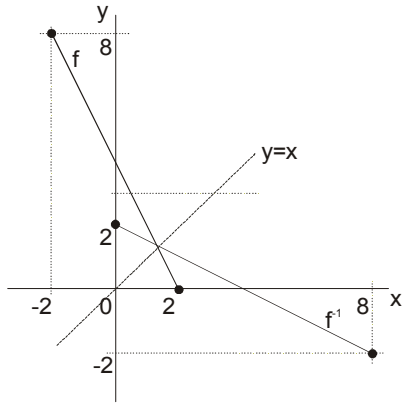
$x + 1 = \frac{2}{y+1}$

$y = \frac{2}{x+1} - 1 \qquad f^{-1} = f$



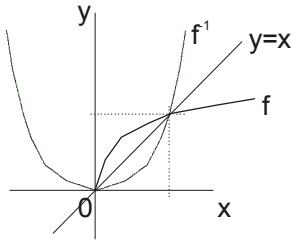
d) $f: y = -2x + 4; x \in \langle -2, 2 \rangle$

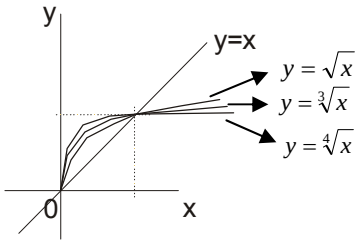
$$f(-2) = 8 \qquad f(2) = 0$$
$$D(f) = \langle -2, 2 \rangle = H(f^{-1})$$
$$H(f) = \langle 0, 8 \rangle = D(f^{-1})$$
$$f: y = -2x + 4$$
$$f^{-1}: x = -2y + 4$$
$$-2y = x - 4$$
$$y = -\tfrac{1}{2}x + 2$$
$$f^{-1}: y = -\tfrac{1}{2}x + 2; x \in \langle 0, 8 \rangle$$



- <u>odmocninové funkcie</u>

$$f: y = \sqrt{x}; x \in \langle 0, \infty)$$
$$f^{-1}: x = \sqrt{y}$$
$$f^{-1}: y = x^2; x \in \langle 0, \infty)$$
$$D(f) = \langle 0, \infty) = H(f^{-1})$$
$$H(f) = \langle 0, \infty) = D(f^{-1})$$



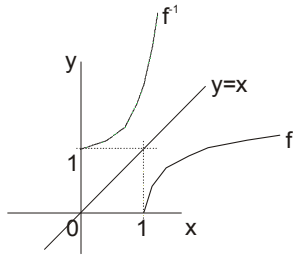


<u>Pr.</u>

Nakreslite grafy:

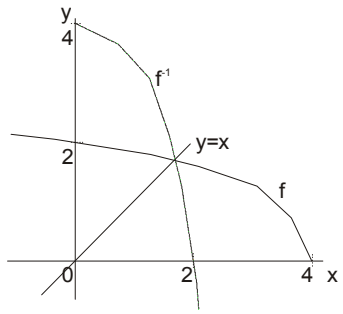
a) $f: y = \sqrt{x-1}$

$$D(f) = \langle 1, \infty) = H(f^{-1})$$
$$H(f) = \langle 0, \infty) = D(f^{-1})$$
$$f^{-1}: x = \sqrt{y-1}$$
$$x^2 = y - 1$$
$$f^{-1}: y = x^2 + 1; x \in \langle 0, \infty)$$



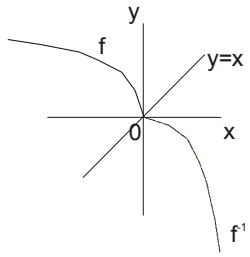
b) $f: y = \sqrt{4-x}$

$$D(f) = (-\infty, 4\rangle = H(f^{-1})$$
$$H(f) = \langle 0, \infty) = D(f^{-1})$$
$$f^{-1}: x = \sqrt{4-y}$$
$$x^2 = 4 - y$$
$$f^{-1}: y = 4 - x^2; x \in \langle 0, \infty)$$



c) $f: y = \sqrt{-x}$

$$D(f) = (-\infty, 0\rangle = H(f^{-1})$$
$$H(f) = \langle 0, \infty) = D(f^{-1})$$
$$f^{-1}: x = \sqrt{-y}$$
$$x^2 = -y$$
$$f^{-1}: y = -x^2; x \in \langle 0, \infty)$$



- <u>mocniny s racionálnym exponentom</u>

<u>Def.</u>

$\forall a \in R, a > 0 \ \forall m \in Z \ \forall n \in N$ definujeme $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

<u>Veta</u>

$\forall a, b \in R^+ \ \forall r, s \in Q$:

1. $a^r . a^s = a^{r+s}$
2. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
3. $(a^r)^s = a^{r.s}$
4. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
5. $(ab)^r = a^r b^r$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}; b \neq 0$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \frac{b^r}{a^r}$

- dôkazy sú ľahko odvoditeľné

napr.: 1. $a^r . a^s = a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} . \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} . a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} =$
$= a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+s}$

<u>Pr.</u>

Vypočítajte $81^{1,75}$:

$$81^{1,75} = 81^{\frac{175}{100}} = 81^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{81^7} = \sqrt[4]{3^{28}} = 3^7 = 2187$$

<u>Pr.</u>

Zjednodušte:

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$

- sú možné dva spôsoby:

1. $\sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{a^2}\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{a^2 a}} = \sqrt{\sqrt{a^3}} = \sqrt[4]{a^3}$
2. $\sqrt{a\sqrt{a}} = \left(a . a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$

b) $\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[6]{a^5}}$

1. $\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[6]{a^5}} = \frac{\sqrt[12]{a^6}\sqrt[12]{a^4}\sqrt[12]{a^3}}{\sqrt[12]{a^8}\sqrt[12]{a^{10}}} = \frac{\sqrt[12]{a^{13}}}{\sqrt[12]{a^{18}}} = \sqrt[12]{a^{-5}}$
2. $\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[6]{a^5}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{1}{3}} . a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{2}{3}} . a^{\frac{5}{6}}} = \frac{a^{\frac{6}{12}} . a^{\frac{4}{12}} . a^{\frac{3}{12}}}{a^{\frac{8}{12}} . a^{\frac{10}{12}}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{a^{\frac{18}{12}}} = a^{\frac{13}{12}} a^{-\frac{18}{12}} = a^{-\frac{5}{12}}$

Cvičenia

1. Vypočítajte:

a) $\left(2^3.2^{-2}\right)^4$ b) $\left[2\left(2^2.2^3\right)^2\right]^4$ c) $2^{-4}.\left(2^{-2}\right)^{-3}$ d) $9^3.3^3.\frac{1}{81}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ e) $25.\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}.\left(2^{-3}\right)^{-1}$

2. Zjednodušte:

a) $\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{a^5}$ b) $\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}$ c) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}$ d) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$

Neriešené úlohy

1. Zjednodušte:

a) $\frac{\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a}}$ b) $\frac{\sqrt{a^{1-x}}.\sqrt[3]{a^{1+x}}}{\sqrt[6]{a^{5x-1}}}$ c) $\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[12]{a^3}}$ d) $\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}$ e) $\sqrt[5]{a^4\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}$ f) $\frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[8]{a^3}}$

g) $\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}$ h) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$

2. Ktoré číslo je väčšie:

a) $27^3, 9^6$ b) $4^{300}, 3^{400}$ c) $3^{34}, 2^{51}$ d) $202^{303}, 303^{202}$

3. Vypočítajte:

a) $\frac{2}{3}.6^{23}$ b) $\sqrt{2^{1000}+2^{1000}+2^{1001}}$ c) $64^{-\frac{2}{3}}$ d) $3^{-2}.81^{1,5}$ e) $3.2^{n+3}-2.2^{n+2}+2^{n+4}$

4. Rozložte na súčin:

a) $a^{3n}+a^{2n}-a^n-1$ b) $\sqrt{a}+\sqrt{a^2}+\sqrt{a^3}+\sqrt{a^4}+\sqrt{a^5}+\sqrt{a^6}$

c) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^5}+\sqrt[3]{a^6}$

5. Nakreslite graf:

a) $f: y=\sqrt{4-x}$ b) $f: y=\sqrt{2x-8}$ c) $f: y=2+\sqrt{x-2}$ d) $f: y=\sqrt[3]{x+2}+1$

6. Vypočítajte hodnotu výrazu: $V=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

7. Koľký člen rozvoja výrazu:

a) $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$ obsahuje x^3 b) $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^9$ neobsahuje x

8. Nakreslite grafy funkcií:

a) $f: y=x^3+2$ b) $f: y=\frac{1}{x^3}-1$ c) $f: y=x^{-4}+2$ d) $f: y=-2x^{-2}-1$

e) $f: y=\left|x^3+3x^2+3x+2\right|$

14. EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE

1. Exponenciálne funkcie
- definícia, definičný obor, graf, vlastnosti
- exponenciálne rovnice

2. Logaritmické funkcie
- definícia logaritmu
- vlastnosti logaritmov
- dekadické a prirodzené logaritmy
- zmena základu
- definícia logaritmickej funkcie
- vlastnosti, graf
- logaritmické rovnice

.....

- <u>exponenciálne funkcie</u>

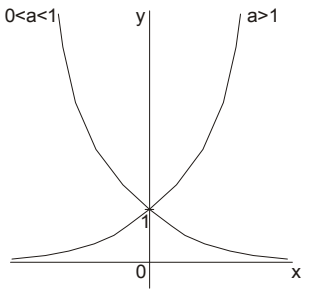
<u>Def.</u>

Exponenciálna funkcia so základom $0 < a \neq 1$ je každá funkcia určená rovnicou $y = a^x$.

$D(f) = R \qquad H(f) = (0, \infty)$

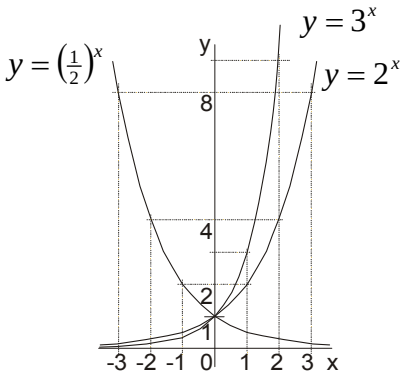
- graf je exponenciálna krivka

- ak $a > 1$, tak funkcia je rastúca
- ak $0 < a < 1$, tak funkcia je klesajúca



<u>Pr.</u>

Do jednej súradnicovej sústavy nakreslite grafy: $y = 2^x, y = 3^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



<u>Pr.</u>

Určite všetky $a \in R$, pre ktoré je funkcia $f : y = \left(\frac{b}{b+2}\right)^x$ rastúca, resp. klesajúca.

$a = \frac{b}{b+2}$

a) $a > 1$ rastúca

$\frac{b}{b+2} > 1 \qquad \frac{b}{b+2} - 1 > 0 \qquad \frac{b-b-2}{b+2} > 0 \qquad \frac{-2}{b+2} > 0$

$b + 2 < 0 \qquad b < -2$

$b \in (-\infty, -2)$

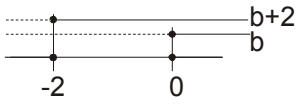
b) $0 < a < 1$ klesajúca

1. $0 < a$

$0 < \frac{b}{b+2}$

$b = 0 \quad b = -2$

$P_1 = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$



2. $a < 1$

$\frac{b}{b+2} < 1$

$\frac{-2}{b+2} < 0$

$b + 2 > 0$

$b > -2$

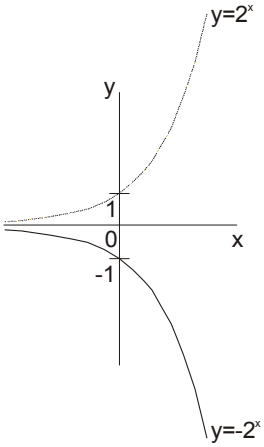
$P_2 = (-2, \infty)$

$P = P_1 \cap P_2 = (0, \infty)$

Pr.

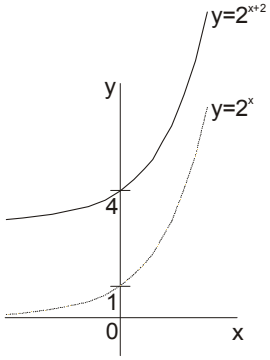
Nakreslite grafy funkcií:

a) $y = -2^x$



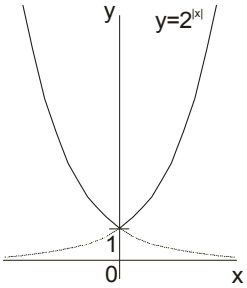
b) $y = 2^{x+2}$

$y = 2^{x+2} = 2^x.2^2 = 4.2^x$



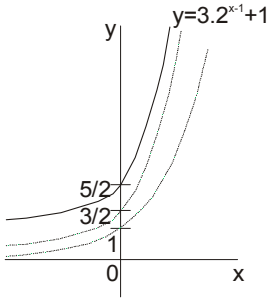
c) $y = 2^{|x|}$

1. $x \geq 0 \ldots y = 2^x$
2. $x < 0 \ldots y = 2^{-x}$



d) $y = 3.2^{x-1} + 1$

$y = 3.2^{x-1} + 1 = 3.2^x.2^{-1} + 1 = \frac{3}{2}.2^x + 1$



- <u>exponenciálne rovnice</u>

- sú to rovnice, ktoré obsahujú neznámu v exponente

Pr.

Riešte v R:

$2^{3x+1}.2^{2x+3} = 2^{5x+1}.2^{x+2}$

- upravíme si rovnicu tak, aby sme dostali tvar: $a^{p(x)} = a^{q(x)}$;

kde $1 \neq a > 0$ je konštanta a $p(x), q(x)$ sú polynómy.
Potom riešime rovnicu tvaru $p(x) = q(x)$

$$2^{5x+4} = 2^{6x+3}$$
$$5x + 4 = 6x + 3$$
$$x = 1$$
$$P = \{1\}$$

- pre lepšie osvojenie si riešenia exponenciálnych rovníc si uvedieme zopár rôznych typov takýchto rovníc aj s riešením:

a) $3^x = 9$
$3^x = 3^2$
$x = 2$
$P = \{2\}$

b) $25^{x-1} = \frac{1}{5}$
$\left(5^2\right)^{x-1} = 5^{-1}$
$5^{2x-2} = 5^{-1}$
$2x - 2 = -1$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$
$P = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $0{,}25^x = 16$
$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^2$
$4^{-x} = 4^2$
$-x = 2$
$x = 2$
$P = \{2\}$

d) $3^{x^2-5x+6} = 1$
$3^{x^2-5x+6} = 3^0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$
$x = 2 \vee x = 3$
$P = \{2, 3\}$

e) $10^{x-2} = 0{,}1$
$10^{x-2} = 10^{-1}$
$x - 2 = -1$
$x = 1$
$P = \{1\}$

f) $2^u.3^u = 216$
$6^u = 6^3$
$u = 3$
$P = \{3\}$

g) $5^x.\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$
$5^x.5^{-x+3} = 5^{-3x}$
$5^3 = 5^{-3x}$
$3 = -3x$
$x = -1$
$P = \{-1\}$

h) $2^x.5^x = 0{,}1.\left(10^{x-1}\right)^5$
$10^x = 10^{-1}.10^{5x-5}$
$10^x = 10^{5x-6}$
$x = 5x - 6$
$4x = 6$
$x = \frac{3}{2}$
$P = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

i) $3^{2x} - 12.3^x + 27 = 0$
$\left(3^x\right)^2 - 12.3^x + 27 = 0$
$3^x = y$
$y^2 - 12y + 27 = 0$
$(y-9)(y-3) = 0$
$y = 9 \vee y = 3$
$3^x = 9 \quad 3^x = 3$
$x = 2 \quad x = 1$
$P = \{1, 2\}$

j) $2^x + 2^{x+1} = 24$
$2^x + 2.2^x = 24$
$3.2^x = 24$
$2^x = 8$
$2^x = 2^3$
$x = 3$
$P = \{3\}$

k) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$
$3^x.3^{-1} + 3^x 3^{-2} + 3^x 3^{-3} = 13$
$3^x\left(3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3}\right) = 13$
$3^x.\frac{13}{27} = 13$
$3^x = 27 = 3^3$
$x = 3$
$P = \{3\}$

l) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$
$3^x.3^2 + \left(3^x\right)^2.3^2 = 810$
$3^x = y$
$9y^2 + 9y - 810 = 0$
$y^2 + y - 90 = 0$
$(y-9)(y+10) = 0$
$y = 9 \vee y = -10$

$3^x = 9 \quad 3^x = -10$
$3^x = 3^2 \quad \theta$
$x = 2$
$P = \{2\}$

m) $4^{\sqrt{x+1}} = 64.2^{\sqrt{x+1}}$

$2^{2\sqrt{x+1}} = 2^6.2^{\sqrt{x+1}}$

$2^{2\sqrt{x+1}} = 2^{6+\sqrt{x+1}}$

$2\sqrt{x+1} = 6 + \sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1} = 6 \;\Big|\; ^2$

$x+1 = 36$

$x = 35$

$P = \{35\}$

n) $3.4^x + 2.25^x = 5.10^x$

$3.2^{2x} + 2.5^{2x} = 5.2^x.5^x \;\Big|\; .\frac{1}{5^{2x}}$

$3.\frac{2^{2x}}{5^{2x}} + 2 = 5.\frac{2^x}{5^x}$

$3.\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]^2 - 5.\left(\frac{2}{5}\right)^x + 2 = 0$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x = y$

$3y^2 - 5y + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1$

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{6}$ $\quad y_1 = 1, y_2 = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$ $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{3}$

$x = 0$ $\quad x = \frac{\log\frac{2}{3}}{\log\frac{2}{5}} \doteq 0{,}4425$

$P = \left\{0, \frac{\log\frac{2}{3}}{\log\frac{2}{5}}\right\}$

- <u>logaritmus</u>

- logaritmy vznikli začiatkom 17. storočia

<u>Def.</u>

Logaritmus reálneho čísla $b > 0$ pri základe $1 \neq a > 0$ je číslo $l \in R$, pre ktoré platí:
$a^l = b \ldots \log_a b = l$.

$\log_3 9 = 2 \qquad 3^2 = 9$

$\log_2 8 = 3 \qquad 2^3 = 8$

$\log_{\sqrt{2}} 4 = 4 \qquad \sqrt{2}^4 = 4$

$\vdots$

<u>Veta</u>

$\forall x, y \in R^+ \;\; \forall 1 \neq a > 0 \;\; \forall s \in R$:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $a^{\log_a x} = x$
4. $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a x^s = s.\log_a x$

Dôkaz

1. $a^0 = 1 \ldots 0 = \log_a 1$
2. $a^1 = a \ldots 1 = \log_a a$
3. $\log_a x = l \ldots a^l = x \ldots a^{\log_a x} = x$

4. $x = a^{\log_a x}, y = a^{\log_a y}$

   $x.y = a^{\log_a x}.a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$

   - označme si $x.y = b$ a $\log_a x + \log_a y = l$, potom platí:

   $b = a^l \ldots \log_a b = l$ a odtiaľ

   $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

5. $x = a^{\log_a x}, y = a^{\log_a y}$

   $\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$

   - označme si $\frac{x}{y} = b$ a $\log_a x - \log_a y = l$, potom platí:

   $b = a^l \ldots \log_a b = l$ a odtiaľ

   $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

6. $x = a^{\log_a x}$

   $x^s = \left(a^{\log_a x}\right)^s = a^{s.\log_a x}$

   - označme si $x^s = b$ a $s.\log_a x$, potom platí:

   $b = a^l \ldots \log_a b = l$ a odtiaľ

   $\log_a x^s = s.\log_a x$

Pr.

Vypočítajte:

a) $\log_{10} 0{,}01$

$$\log_{10} 0{,}01 = \log_{10} 10^{-2} = -2.\log_{10} 10 = -2.1 = -2$$

b) $10^{\log_3 27}$

$$10^{\log_3 27} = 10^{\log_3 3^3} = 10^{3.\log_3 3} = 1000$$

c) $7^{2.\log_{49} 3}$

$$7^{2.\log_{49} 3} = 49^{\log_{49} 3} = 3$$

d) $\log_4 (\log_4 4) = \log_4 1 = 0$

- logaritmy pri základe 10 sa nazývajú **dekadické logaritmy** a označujeme ich skrátene: $\log x$ ($\log x = \log_{10} x$)

$\log 2 \doteq 0{,}30103$ 1 číslica

$\log 2 \doteq 0 + 0{,}30103$

$\log 20 = \log 10 + \log 2 \doteq 1{,}030103$ 2 číslice

$\log 20 \doteq 1 + 0{,}030103$

$\log 200 = \log 100 + \log 2 \doteq 2{,}030103$ 3 číslice

$\log 200 \doteq 2 + 0{,}030103$

rád prvej platnej číslice (0, 1, 2,…)

> pomocou dekadického logaritmu čísla môžeme určiť počet cifier v desiatkovej pozičnej sústave

Pr.

Koľko číslic má v DPS číslo:

2^{100} $\log 2^{100} = 100.\log 2 = 100.0{,}30103 = 30{,}103$ - rád prvej číslice je 30, teda číslo 2^{100} je 31-ciferné

- logaritmy pri základe e sa nazývajú **prirodzené logaritmy** a označujeme ich skrátene: $\ln x$ ($\ln x = \log_e x$)

Pr.

Hmotnosť rádioaktívnej látky závisí od vzorca $m = m_0.e^{-\lambda t}$, kde m_0 je začiatočná hmotnosť, λ (lambda) je rozpadová konštanta a t je čas. Za aký čas sa premení polovica daného množstva rádia ak $\lambda = 1{,}42.10^{-11}\ s^{-1}$?

$$m = m_0.e^{-\lambda t}$$

$$m = m_0.\left(\tfrac{1}{e}\right)^{\lambda t}$$ bude to klesajúca funkcia

$$\tfrac{m_0}{2} = m_0.e^{-\lambda t}$$

$$\tfrac{1}{2} = e^{-\lambda t}$$

$$\ln\tfrac{1}{2} = \ln e^{-\lambda t}$$

$$\ln 2^{-1} = \ln e^{-\lambda t}$$

$$-\ln 2 = -\lambda t \ln e \qquad (\ln e = 1)$$

$$\ln 2 = \lambda t$$

$$t = \tfrac{\ln 2}{\lambda} \doteq 4{,}88.10^{10}\ s$$

Polčas rozpadu rádia je 1547 rokov 312 dní 9 hodín 8 minút 49 sekúnd.

Veta

$\forall 1 \neq a > 0, 1 \neq b > 0\ \forall x \in R^+ : \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Dôkaz

$$x = a^{\log_a x}$$

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x}$$

$$\log_b x = \log_a x.\log_b a$$

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a x$$

Pr.

Viete, že $\log_2 x = a$. Určite:

a) $\log_4 x$

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{a}{\log_2 2^2} = \frac{a}{2.\log_2 2} = \frac{a}{2}$$

b) $\log_8 x$

$$\log_8 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{a}{\log_2 2^3} = \frac{a}{3.\log_2 2} = \frac{a}{3}$$

c) $\log_{\frac{1}{2}} x$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{a}{\log_2 2^{-1}} = \frac{a}{-1.\log_2 2} = -a$$

d) $\log_{\sqrt{2}} x$

$$\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{a}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{\frac{1}{2}.\log_2 2} = 2a$$

- <u>logaritmická funkcia</u>

<u>Def.</u>

Logaritmická funkcia so základom $1 \neq a > 0$ je každá funkcia určená rovnicou $y = \log_a x$.

$D(f) = (0, \infty) \quad H(f) = R$

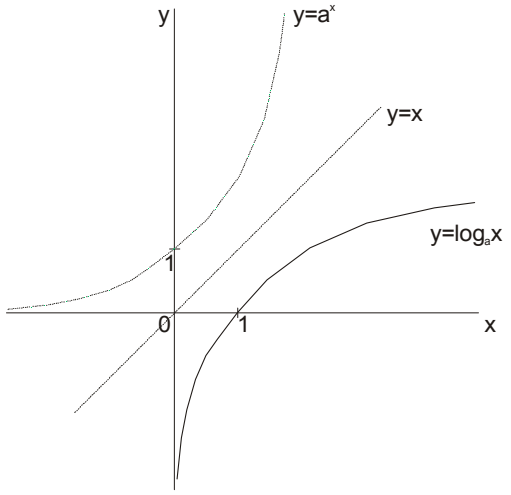
$f: y = \log_a x$

$f: x = a^y$

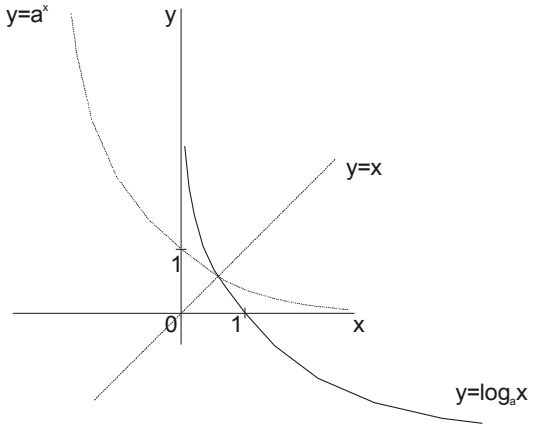
$f^{-1}: y = a^x$

- logaritmická funkcia je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii s tým istým základom

$a > 1$



$0 < a < 1$



<u>Pr.</u>

Dokážte: $\log_3 5 < \log_3 8$

- funkcia $f: y = \log_3 x$ je rastúca, keďže $3 > 1$, teda platí:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ a odtiaľ máme:

$5 < 8 \Rightarrow \log_3 5 < \log_3 8$

<u>Pr.</u>

Určite definičný obor:

a) $y = \log_{10}(x+3)$

$x \in D(f) \Leftrightarrow x + 3 > 0$

$x + 3 > 0 \qquad x > -3 \qquad D(f) = (-3, \infty)$

b) $y = \log_{0,5}(-x)$

$x \in D(f) \Leftrightarrow -x > 0$

$-x > 0 \qquad x < 0 \qquad D(f) = (\infty, 0)$

c) $y = \log_5 \sqrt{x-4}$

$x \in D(f) \Leftrightarrow \sqrt{x-4} > 0$

$\sqrt{x-4} > 0 \qquad x - 4 > 0 \ldots x > 4 \qquad D(f) = (4, \infty)$

d) $y=\sqrt{\log_3 x}$

$x \in D(f) \Leftrightarrow \log_3 x \geq 0$

$\log_3 x \geq 0 \qquad x \geq 1 \qquad D(f)=\langle 1,\infty)$

e) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}$

$x \in D(f) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x \geq 0$

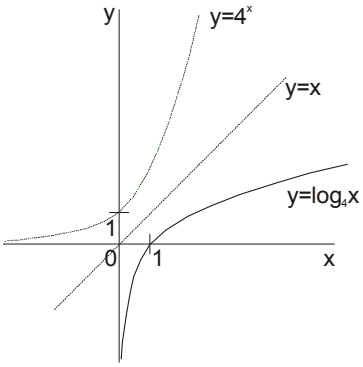
$\log_{\frac{1}{3}} x \geq 0 \qquad 1 \geq x > 0 \qquad D(f)=(0,1\rangle$

Pr.

Nakreslite grafy:

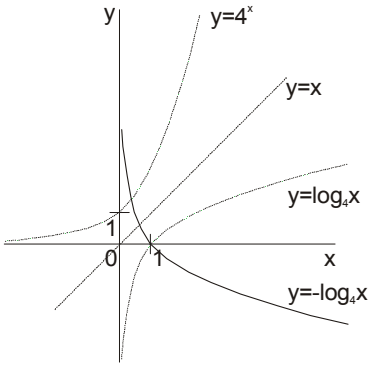
a) $y=\log_4 x$

$f^{-1}: y=4^x$



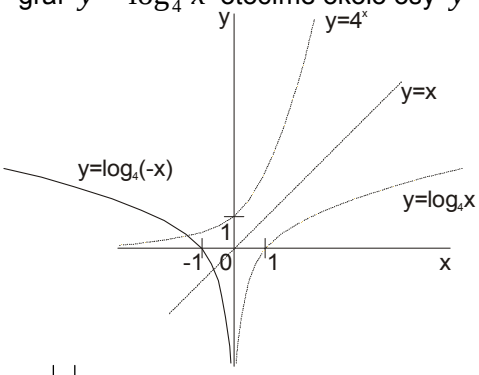
b) $y=-\log_4 x$

- graf $y=\log_4 x$ otočíme okolo osy x

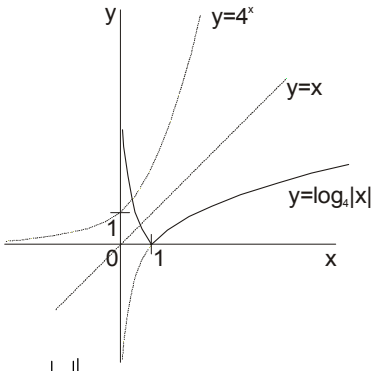


c) $y=\log_4(-x)$

- graf $y=\log_4 x$ otočíme okolo osy y

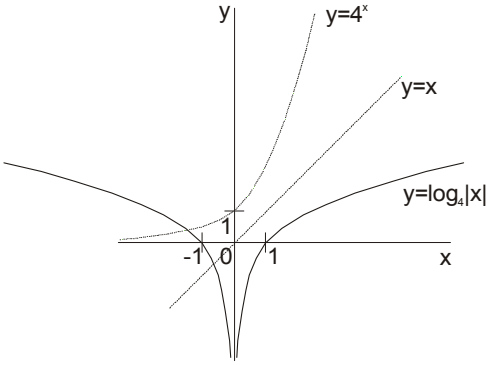


d) $y=|\log_4 x|$

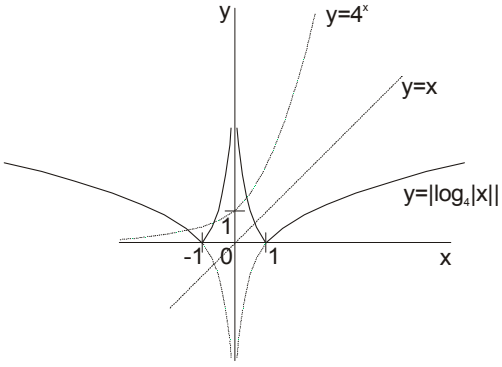


e) $y=\log_4|x|$

1. $x>0 \ldots y=\log_4 x$
2. $x<0 \ldots y=\log_4(-x)$



f) $|y=\log_4|x||$

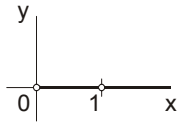


Pr.

Nakreslite grafy:

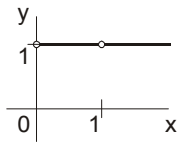
a) $y = \log_x 1$

$$y = \log_x 1 = 0; x > 0, x \neq 1$$



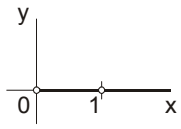
b) $y = \log_x x$

$$y = \log_x x = 1; x > 0, x \neq 1$$



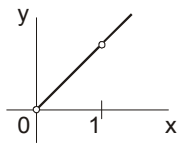
c) $y = \log_x (\log_x x)$

$$y = \log_x (\log_x x) = 1; x > 0, x \neq 1$$



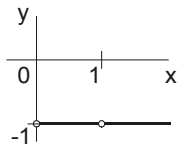
d) $y = x^{\log_x x}$

$$y = x^{\log_x x} = x; x > 0, x \neq 1$$



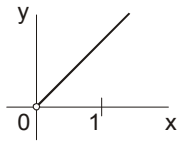
e) $y = \log_x \left(\frac{1}{x}\right)$

$$y = \log_x \left(\frac{1}{x}\right) = -1; x > 0, x \neq 1$$



f) $y = 2^{\log_2 x}$

$$y = 2^{\log_2 x} = x; x > 0$$



- <u>logaritmické rovnice</u>

- sú to rovnice, ktoré obsahujú logaritmus v neznámej

Pr.

Riešte v R:

$$\log(x-2) + \log x = \log 8$$

- upravíme si rovnicu tak, aby sme dostali tvar: $\log_a p(x) = \log_a q(x)$; kde $1 \neq a > 0$ je konštanta a $p(x), q(x)$ sú polynómy. Potom riešime rovnicu tvaru $p(x) = q(x)$

$$\log(x(x-2)) = \log 8$$
$$\log(x^2 - 2x) = \log 8$$
$$x^2 - 2x = 8$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x+2)(x-4) = 0$$
$$x = -2 \qquad x = 4$$

SKÚŠKA:

$$l(4) = \log 2 + \log 4 = \log 8 = p(4)$$
$$l(-2) = \log(-4) + \log 4 = \log(-16) \ldots nie\ je\ definované$$

$$P = \{4\}$$

- pre lepšie osvojenie si riešenia logaritmických rovníc si uvedieme zopár rôznych typov takýchto rovníc aj s riešením:

a) $\log x^2 + \log 8x = 1 + \log x$

$\log x^2 + \log 8x = \log 10 + \log x$

$\log 8x^2 = \log 10x$

$8x^3 = 10x$

$8x^2 = 10$

$8x^2 - 10 = 0$

$2x(4x^2 - 5) = 0$

$2x(2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5}) = 0$

$x = 0 \quad x = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$x > 0$

$P = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

$\frac{\log_2 x}{\log_2 16} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 2} = 7$

$\frac{\log_2 x}{4} + \frac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = 7$

$\frac{\log_2 x + 2\log_2 x + 4\log_2 x}{4} = 7$

$\frac{7\log_2 x}{4} = 7$

$7\log_2 x = 28$

$\log_2 x = 4$

$x = 2^4$

$x = 16$

$P = \{16\}$

c) $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 10 = 0$

$\log_3 x = y$

$y^2 - 3y - 10 = 0$

$(y+2)(y-5) = 0$

$y = -2 \quad \vee \quad y = 5$

$\log_3 x = -2 \qquad \log_3 x = 5$

$x = 3^{-2} \qquad x = 3^5$

$P = \{3^{-2}, 3^5\}$

d) $\log x + \frac{1}{\log x} = 2$

$\log x = y$

$y + \frac{1}{y} = 2$

$y^2 + 1 = 2y$

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$(y-1)(y-1) = 0$

$y = 1 \quad \log x = 1$

$x = 10$

$P = \{10\}$

e) $\log_5 x^3 + \log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right) = 1$

$\log_5 x^3 + \frac{\log_5\left(\frac{5}{x}\right)}{\log_5 5x} = 1$

$3.\log_5 x + \frac{\log_5 5 - \log_5 x}{\log_5 5 + \log_5 x} = 1$

$3.\log_5 x + \frac{1 - \log_5 x}{1 + \log_5 x} = 1$

$\log_5 x = y$

$3y + \frac{1-y}{1+y} = 1$

$3y + 3y^2 + 1 - y = 1 + y$

$3y^2 + y = 0$

$y(3y+1) = 0$

$y = 0 \quad \vee \quad y = -\frac{1}{3}$

$\log_5 x = 0 \qquad \log_5 x = -\frac{1}{3}$

$x = 5^0 = 1 \qquad x = 5^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

$P = \left\{1, \sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right\}$

f) $2^x = 100$ - takúto rovnicu budeme riešiť tak, že ju „zlogaritmujeme“

$\log 2^x = \log 100$

$x \log 2 = 2$

$x = \frac{2}{\log 2} \doteq 6{,}64$

$P = \left\{\frac{2}{\log 2}\right\}$

g) $3^{2x-1} = 5^{3-x}$

$\log 3^{2x-1} = \log 5^{3-x}$

$(2x-1)\log 3 = (3-x)\log 5$

$2x\log 3 - \log 3 = 3\log 5 - x\log 5$

$2x\log 3 + x\log 5 = 3\log 5 + \log 3$

$x(2\log 3 + \log 5) = 3\log 5 + \log 3$

$x = \frac{3\log 5 + \log 3}{2\log 3 + \log 5} \doteq 1{,}55$

$P = \left\{\frac{3\log 5 + \log 3}{2\log 3 + \log 5}\right\}$

h) $3.5^{x-2} = 10$

$5^{x-2} = \frac{10}{3}$

$\log 5^{x-2} = \log \frac{10}{3}$

$(x-2)\log 5 = \log \frac{10}{3}$

$x\log 5 - 2\log 5 = \log \frac{10}{3}$

$x\log 5 = \log \frac{10}{3} + 2\log 5$

$x = \frac{\log \frac{10}{3} + 2\log 5}{\log 5} \doteq 2{,}748$

$P = \left\{ \frac{\log \frac{10}{3} + 2\log 5}{\log 5} \right\}$

i) $x^{\log x} = 100x$

$\log x^{\log x} = \log 100x$

$\log x.\log x = \log 100 + \log x$

$\log^2 x - \log x - 2 = 0$

$\log x = y$

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y+1)(y-2) = 0$

$y = -1 \quad \vee \quad y = 2$

$\log x = -1 \qquad \log x = 2$

$x = \frac{1}{10} \qquad x = 100$

$P = \left\{ \frac{1}{10}, 100 \right\}$

j) $\log_7(\log_3(\log_2(\log_2 x))) = 0$

$\log_7 \underbrace{(\log_3(\log_2(\log_2 x)))}_{1} = 0$

$\log_3 \underbrace{(\log_2(\log_2 x))}_{3} = 1$

$\log_2 \underbrace{(\log_2 x)}_{8} = 3$

$\log_2 x = 8$

$x = 2^8 = 256$

$P = \{256\}$

k) $\log^2_{\sqrt{2}} x + 3.\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$

$\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}}\right)^2 + 3.\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = 2$

$(2\log_2 x)^2 + 3\log_2 x - \log_2 x - 2 = 0$

$\log_2 x = y$

$4y^2 + 2y - 2 = 0$

$2y^2 + y - 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 9 \qquad \sqrt{D} = 3$

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{4} \qquad y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{2}$

$\log_2 x = -1 \qquad \log_2 x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \qquad x = \sqrt{2}$

$P = \left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right\}$

- na záver si ukážeme ako by sa riešila logaritmická nerovnica:

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+7}{2x+3} < \log_{\frac{1}{2}}(5-x)$

$0 < \frac{1}{2} < 1$ … klesajúca, teda $\frac{x+7}{2x+3} > 5 - x$, ďalej:

$x \in D(f) \Leftrightarrow \left(\frac{x+7}{2x+3} > 0 \wedge 5 - x > 0\right)$

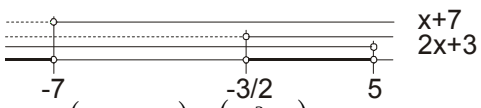
- naše riešenie sa nám rozpadlo na dve časti, z ktorých na konci riešenia spravíme prienik:

1. $\frac{x+7}{2x+3} > 0 \wedge 5 - x > 0$

- túto podmienku jednoducho vyriešime pomocou nulových bodov

$x + 7 = 0 \qquad 2x + 3 = 0 \qquad 5 - x > 0$

$x = -7 \qquad x = -\frac{3}{2} \qquad x < 5$



$P_1 = (-\infty, -7) \cup \left(-\frac{3}{2}, 5\right)$

2. $\frac{x+7}{2x+3} > 5 - x$ - anulujeme a dáme na spoločného menovateľa

$\frac{x+7}{2x+3} - 5 + x > 0$

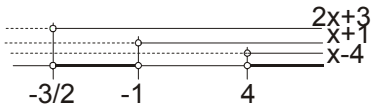
$\frac{x+7-10x-15+2x^2+3x}{2x+3} > 0$

$\frac{2x^2-6x-8}{2x+3} > 0$

$\frac{x^2-3x-4}{2x+3} > 0$

$\frac{(x+1)(x-4)}{2x+3} > 0$

$x = -1, x = 4, x = -\frac{3}{2}$



$P_2 = \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (4, \infty)$

$P = P_1 \cap P_2 = (4, 5)$

Cvičenia

1. Zistite, ktoré číslo je väčšie z čísel: $\left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{2}{5}\right)^5$**.**

2. Nakreslite grafy funkcií:

a) $y = 3^{2-x}$ b) $y = 3 - 2^{x+1}$ c) $y = 2^{-|x|}$

3. Vypočítajte:

a) $\log_2 32$ b) $\log_2 \sqrt[3]{4}$ c) $8^{1+\log_8 5}$ d) $\log_2(\log_3(\log_4 64))$

Neriešené úlohy

1. Určite všetky $a \in R$**, pre ktoré sú rastúce, resp. klesajúce funkcie:**

a) $f: y = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^x$ b) $f: y = \left(\frac{2a-1}{a}\right)^x$ c) $f: y = \left(\frac{2a+1}{2a-1}\right)^x$

2. Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{-x}$ c) $y = 2^{x+1}$ d) $y = 2^{|x|}$ e) $y = 2^{2-|x|}$

3. Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = \log_x x$ b) $y = \log_x(\log_x x)$ c) $y = \log_x x^x$ d) $y = |\log_2 x|$ e) $y = |\log_2 |x||$

f) $y = \frac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}$ g) $y = \log_2(8x^2)$

4. Určite definičné obory funkcií:

a) $y = \log \frac{1}{x-4}$ b) $y = \log \frac{\sqrt{x}}{1-x}$ c) $y = \log_5 \left|\frac{x-1}{x}\right|$ d) $y = \sqrt{\log_2 x}$ e) $y = \sqrt{\log_{0,5} x}$

f) $y = \log_5 \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-4}$ g) $y = \sqrt{\log_2 \frac{x-2}{x-3}}$ h) $y = \frac{1}{\log_2(x-4)}$ i) $y = \frac{7}{3-\log_2 x}$

5. Určite všetky $a \in R$**, pre ktoré je funkcia** $y = \log_{\frac{a-1}{a}} x$**:**

a) rastúca
b) klesajúca

6. Nájdite inverznú funkciu k funkcii:

a) $f: y = 10^{x+1}$ b) $f: y = \frac{2^x}{1+2^x}$ c) $f: y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$ d) $f: y = \frac{1}{2}\log\frac{x}{2-x}$

e) $f: y = 1 + \log(x+2)$ f) $f: y = 10^x - 2$ g) $f: y = \frac{\log_3 x}{2}$ h) $f: y = 2 - \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

7. Určite $a, b \in R$ **tak, aby graf funkcie** $f: y = b + \log x^a$ **prechádzal bodmi** $A[10,2]; B[100,5]$.

8. Určite reálne parametre $a, b \in R^+$ **tak, aby graf funkcie** $f: y = a.b^x$ **prechádzal bodmi** $A[2,1]$; $B[0,4]$. **Čomu sa rovná** $f(-2)$**?**

9. Do tej istej sústavy súradníc nakreslite grafy funkcií: $y = \log_2 x, y = \log_2 \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, $y = |\log_2(x+3) - 1|$.

10. Vypočítajte $x \in R$**, ak:**

a) $\log_5 x = \frac{1}{2}\log_5 6$ b) $\log_4 x = \log_4 2 + \log_4 3$ c) $\log_2 x = \log_2 7 + 3\log_2 5 + 3$

d) $\log_3 x = \frac{1}{2}(\log_3 a + 3\log_3 b) - 2$

11. Nech $1 \neq a, b, c > 0$**. Vypočítajte:**

a) $\log_b a.\log_a b$ b) $\log_a b.\log_b c.\log_c a$

12. Pri pohybe hmotného bodu platí $m.\ln v + 3t = 2m$**. Vyjadrite** v **ako funkciu** t**.**

13. Výška stromu závisí od času podľa vzorca $h = 100.e^{0,3t} - 30$**, kde** h **je výška v cm,** t **je vek stromu v rokoch. Aký je vek stromu vysokého 8 m?**

14. Riešte v R:

a) $2^x.5^x = 0,1(10^{x-1})^5$ b) $5^x.(\frac{1}{5})^{x-3} = (\frac{1}{125})^x$ c) $27^{5x-8}.81^{2x+3} = 9^{4x-2}.3^{7x-2}$

d) $4^x + 2^x - 6 = 0$ e) $3^{2x} - 12.3^x + 27 = 0$ f) $3.4^x + 2.25^x = 5.10^x$

g) $2^{4x} - 50^{2x} = 896$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64.2^{\sqrt{x+1}}$ i) $\sqrt{3^{x-56}} - 7\sqrt{3^{x-60}} = 162$

j) $5^{2x-3} - 2.5^{x-2} = 3$ k) $3^{x+2} - 3^{x-1} = 702$

15. Riešte v R:

a) $1 + \log^3 x = \frac{10}{\log x}$ b) $\log(x+3) = \log x + \log 3$ c) $x^{\log x} = 100x$ d) $1 + \log x^3 = \frac{20}{\log x^2}$

e) $\log_3(\log_8(\log_2(x+9))) = \log_3 2 - 1$ f) $\log_6(\log_5(\log_4 x + \frac{4}{\log_4 x})) = 0$ g) $2^x = 100$

h) $\log^2_{\sqrt{2}} x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$ i) $\frac{1}{5-\log x} + \frac{2}{1+\log x} = 1$ j) $3^{2x-1} = 5^{3-x}$ k) $x^{\log_2(x+2)} = 8$

l) $\log(\frac{1}{2} + x) = \log\frac{1}{2} - \log x$ m) $\frac{2+\log x}{\log x} - \frac{1}{1-\log x} = 1$ n) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

o) $\log_2(x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 9$ p) $\log_5 x^3 + \log_{5x}\frac{5}{x} = 1$ r) $\log_{4x} 2.\log_{\frac{x}{4}} 2 = \log_{\frac{x}{16}} 2$

16. Riešte v R:

a) $3^x > \frac{1}{9}$ b) $(\frac{1}{3})^{x^2} < \frac{1}{3^2}$ c) $\log_2 \frac{3x+1}{x+1} \leq -1$ d) $\log_2 x > \log_2 4$ e) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 4$

15. GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

1. Goniometrické funkcie v trojuholníku

2. Uhly
- definície
- stupňová miera
- oblúková miera
- jednotková kružnica a zobrazenie množiny R do nej

3. Funkcie sínus a kosínus
- definícia funkcií
- definičné obory a obory hodnôt
- znamienka, periodickosť, párnosť
- prevody do 1. kvadrantu, grafy

4. Funkcie tangens a kotangens
- definícia funkcií
- definičné obory a obory hodnôt
- znamienka, periodickosť, párnosť
- prevody do 1. kvadrantu, grafy.

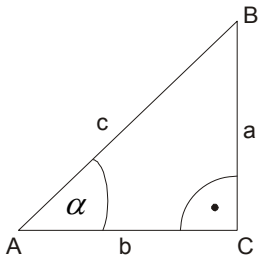
5. Goniometrické rovnice

6. Grafy zložených funkcií
- grafy funkcií typu $y = a.f(bx + c) + d$, kde f je niektorá z goniometrických funkcií

7. Cyklometrické funkcie

.....

- <u>goniometrické funkcie v trojuholníku</u>



<u>Veta</u>

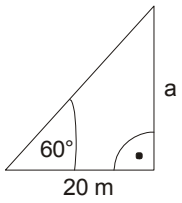
$\forall \Delta ABC, \measuredangle C \cong R$ definujeme:

1. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ … sínus uhla je podiel protiľahlej odvesny a prepony
2. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ … kosínus uhla je podiel priľahlej odvesny a prepony
3. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ … tangens uhla je podiel protiľahlej a priľahlej odvesny
4. $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$ … kotangens uhla je podiel priľahlej a protiľahlej odvesny
5. $\sec\alpha = \frac{c}{b}$ … sekans uhla je podiel prepony a priľahlej odvesny
6. $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$ … kosekans uhla je podiel prepony a protiľahlej odvesny

uhol α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{cotg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Pr.

Vypočítajte výšku stromu, ak z miesta vzdialeného od stromu 20 m vidíme jeho vrchol pod uhlom 60°.



$$\mathrm{tg}60° = \frac{a}{20}$$

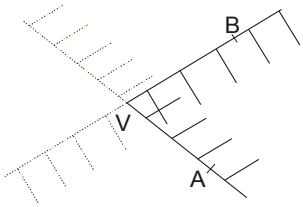
$$a = 20\mathrm{tg}60° \doteq 34{,}64$$

- uhly

Def.

Konvexný uhol AVB je prienik polrovín $\overrightarrow{AVB}$ a $\overrightarrow{BVA}$.

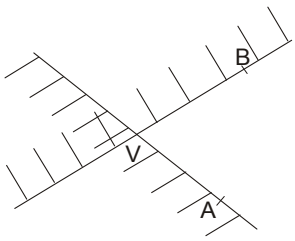
$$\boxed{\measuredangle AVB = \overrightarrow{AVB} \cap \overrightarrow{BVA}}$$



Def.

Nekonvexný uhol AVB je zjednotenie polrovín opačných ku $\overrightarrow{AVB}$ a $\overrightarrow{BVA}$.

$$\boxed{\measuredangle AVB = \overrightarrow{AVB}^{+} \cup \overrightarrow{BVA}^{+}}$$



Def.

Nulový uhol je polpriamka.

Def.

Priamy uhol je polrovina.

Def.

Plný uhol je rovina.

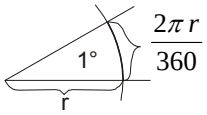
1. stupňová miera uhla

- jednotkou je 1° (jeden stupeň)

Def.

1° je veľkosť uhla, ktorému na kružnici, so stredom vo vrchole uhla a polomerom r, prislúcha kružnicový oblúk dĺžky $\frac{2\pi r}{360}$.

$$1° = \frac{2\pi r}{360}$$



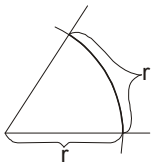
2. oblúková miera uhla

- jednotkou je 1 rad (jeden radián)

Def.

1 radián je veľkosť uhla, ktorému na kružnici, so stredom vo vrchole uhla a polomerom r, prislúcha kružnicový oblúk dĺžky r.

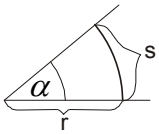
$$1 \text{ rad} \doteq 57°17'44''$$



Def.

Veľkosť uhla v oblúkovej miere je číslo $\alpha = \frac{s}{r}$, kde r je polomer kružnice so stredom vo vrchole uhla a s je dĺžka oblúka, ktorý danému uhlu prislúcha.

$$\alpha = \frac{s}{r}$$



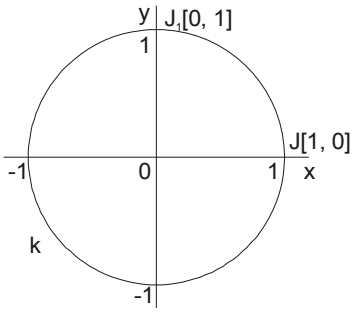
- prevody z jednej miery do druhej:

1. $\alpha_r = \frac{\pi}{180°}.\alpha°$ 2. $\alpha° = \frac{180°}{\pi}.\alpha_r$

- zobrazenie množiny R do jednotkovej kružnice

Def.

Jednotková kružnica k so stredom 0 je kružnica zostrojená v súradnicovej sústave $(0xy)$ s polomerom 1.



Veta

Polpriamka $\overrightarrow{0J}$, ktorá splýva s kladnou časťou osy x, sa môže otáčať okolo svojho začiatku v kladnom zmysle (proti smeru hodinových ručičiek) alebo v zápornom smere (v smere hodinových ručičiek)

- číslu 2π je prirodzené priradiť bod J, ktorý je priradený aj číslu 0, pretože 2π je plný uhol, čiže celá otáčka

$\frac{11}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi + 2.2\pi$ … $\overrightarrow{0J}$ sa otočí o dve celé otáčky a potom o uhol $\frac{3}{2}\pi$

- číslu -2π priradíme bod, ktorý získame otočením $\overrightarrow{0J}$ v zápornom smere o 2π, teda zase bod 0

$-3{,}5\pi = -1{,}5\pi - 2\pi$ … $\overrightarrow{0J}$ sa otočí o jednu otáčku v zápornom smere a potom o uhol $1{,}5\pi$ v zápornom smere

alebo:

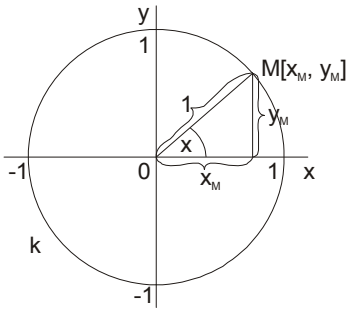
$-3{,}5\pi = \frac{\pi}{2} - 2.2\pi$ … $\overrightarrow{0J}$ sa otočí o dve otáčky v zápornom smere a potom naspäť o uhol $\frac{\pi}{2}$ v kladnom smere

Def.

Zobrazenie U množiny R do množiny všetkých bodov jednotkovej kružnice k:

1. každému reálnemu číslu $x \in \langle 0, 2\pi)$ priradí bod $M \in k$, pre ktorý platí:
   a) ak $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$, tak $\sphericalangle J0M$ je časťou $\sphericalangle J0J_1$
      ak $x \in \langle \frac{\pi}{2}, 2\pi)$, tak $\sphericalangle J0M$ obsahuje $\sphericalangle J0J_1$ ako svoju časť
   b) dĺžka oblúka $JM = x_0$; vzhľadom na to, že k je jednotková kružnica, x_0 je zároveň číselnou hodnotou veľkosti $\sphericalangle J0M$ v oblúkovej miere
2. každému reálnemu číslu $x \in R - \langle 0, 2\pi)$ priradí bod $M \in k$, ktorý je priradený číslu $x \in \langle 0, 2\pi)$, pre ktoré platí $x = x_0 + k.2\pi; k \in Z$

- funkcie sínus a kosínus



$x \in R$

$\sin x = \frac{y_M}{1} = y_M$

$\cos x = \frac{x_M}{1} = x_M$

- definovať funkcie sínus a kosínus znamená vymyslieť predpis, ako každému $x \in R$ priradiť hodnotu $\sin x$ alebo $\cos x$

Def.

Sínus je funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x priradí y-ovú súradnicu bodu M na jednotkovej kružnici.

Def.

Kosínus je funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x priradí x-ovú súradnicu bodu M na jednotkovej kružnici.

- vlastnosti:

1. definičný obor:

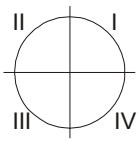
$D(\sin) = R$ $\qquad$ $D(\cos) = R$

2. obor hodnôt:

$H(\sin) = \langle -1,1 \rangle$ $H(\cos) = \langle -1,1 \rangle$

3. znamienka:

	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+



4. význačné hodnoty:

stupne	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

5. periodickosť:

Veta

$\forall x \in R \ \forall k \in Z$:

1. $\sin(x + k.2\pi) = \sin x$
2. $\cos(x + k.2\pi) = \cos x$

Dôkaz

Ľahko nahliadneme, že použitím jednotkovej kružnice túto vlastnosť dokážeme.

- najmenšia perióda je 2π

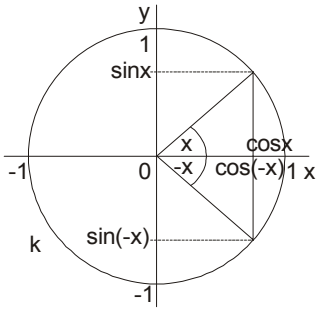
6. párnosť a nepárnosť:

Veta

$\forall x \in R$:

1. $\sin(-x) = -\sin x$ … nepárna funkcia
2. $\cos(-x) = \cos x$ … párna funkcia

Dôkaz

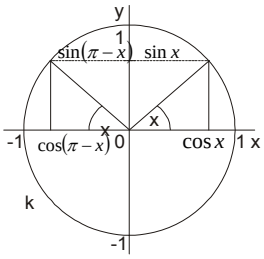


7. prevody do prvého kvadrantu:

II → I

$\sin(\pi - x) = \sin x$

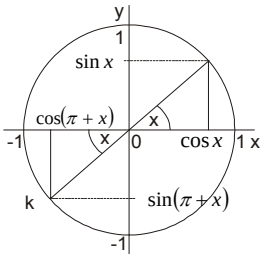
$\cos(\pi - x) = -\cos x$



III → I

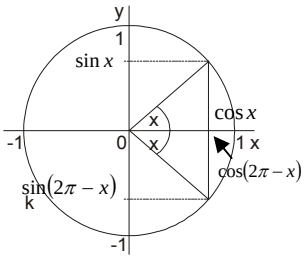
$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$



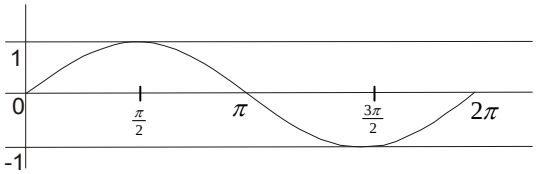
IV $\rightarrow$ I

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x$$
$$\cos(2\pi - x) = \cos x$$



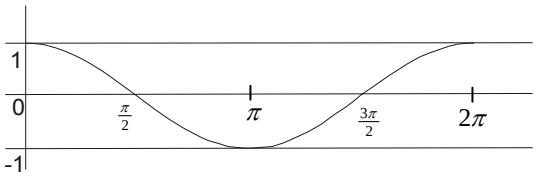
8. grafy:

$\sin x$



sínusoida

$\cos x$

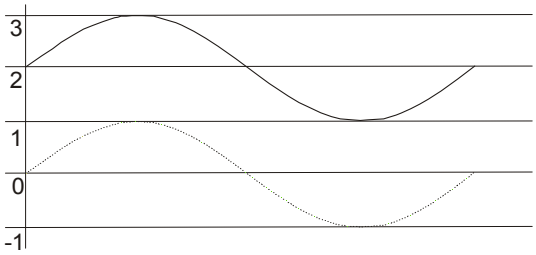


kosínusoida

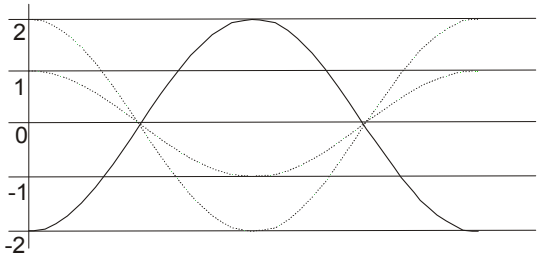
<u>Pr.</u>

Nakreslite grafy:

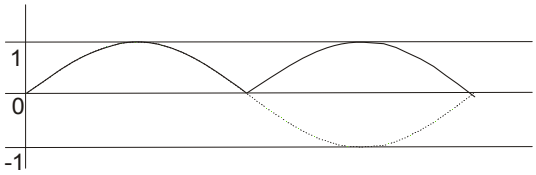
a) $y = 2 + \sin x$



b) $y = -2\cos x$

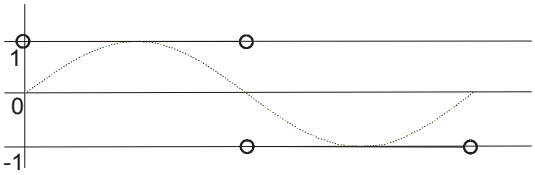


c) $y = |\sin x|$

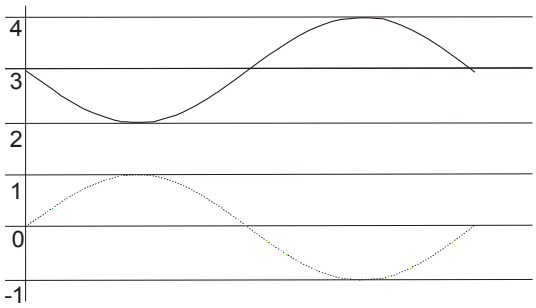


d) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$

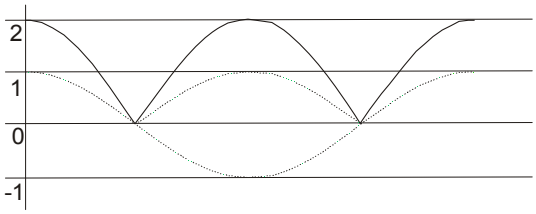
1. $\sin x > 0 \ldots y = \frac{\sin x}{\sin x} = 1$
2. $\sin x < 0 \ldots y = \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$



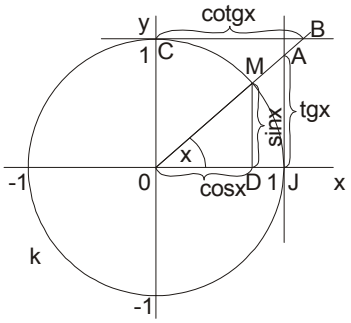
e) $y = 3 - \sin x$



f) $y = 2|\cos x|$



- <u>funkcie tangens a kotangens</u>



- z podobnosti $\Delta 0JA \sim \Delta 0DM$ máme $\frac{\mathrm{tg}x}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}$, teda $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- z podobnosti $\Delta BC0 \sim \Delta 0DM$ máme $\frac{\mathrm{cotg}x}{1} = \frac{\cos x}{\sin x}$, teda $\mathrm{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$

<u>Def.</u>

Tangens je funkcia určená rovnicou $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

<u>Def.</u>

Kotangens je funkcia určená rovnicou $\mathrm{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

- vlastnosti:

1. definičný obor:

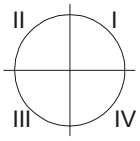
$$D(\mathrm{tg}) = R - \{(2k-1).\tfrac{\pi}{2}; k \in Z\}$$
$$D(\mathrm{cotg}) = R - \{k\pi; k \in Z\}$$

2. obor hodnôt:

$$H(\mathrm{tg}) = R \qquad H(\mathrm{cotg}) = R$$

3. znamienka:

	I	II	III	IV
$\mathrm{tg}x$	+	-	+	-
$\mathrm{cotg}x$	+	-	+	-



4. význačné hodnoty:

stupne	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
tg$x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	0	*
cotg$x$	1	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	*	0

5. periodickosť:

Veta

$\forall x \in R \ \forall k \in Z$:

1. $\mathrm{tg}(x + k.2\pi) = \mathrm{tg}x$
2. $\mathrm{cotg}(x + k.2\pi) = \mathrm{cotg}x$

- perióda je 2π

Veta

$\forall x \in R \ \forall k \in Z$:

1. $\mathrm{tg}(x + k.\pi) = \mathrm{tg}x$
2. $\mathrm{cotg}(x + k.\pi) = \mathrm{cotg}x$

- najmenšia perióda je π

6. párnosť a nepárnosť:

Veta

1. $\forall x \in D(\mathrm{tg}) : \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$
2. $\forall x \in D(\mathrm{cotg}) : \mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}x$

- obe sú nepárne

Dôkaz

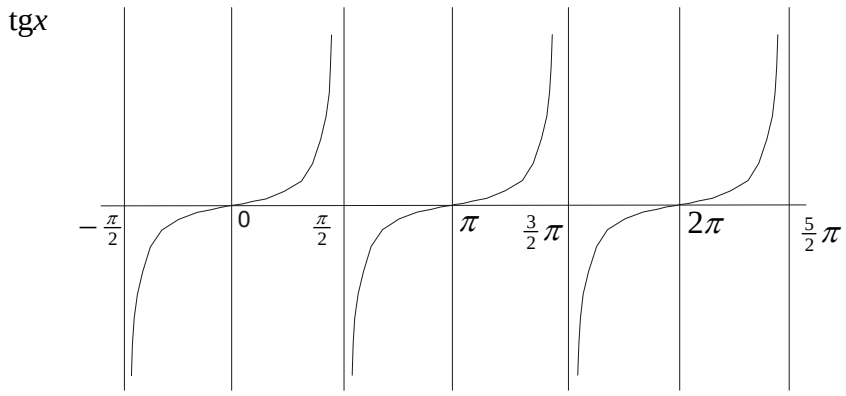
1. $\mathrm{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg}x$
2. $\mathrm{cotg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\mathrm{cotg}x$

7. prevody do prvého kvadrantu:

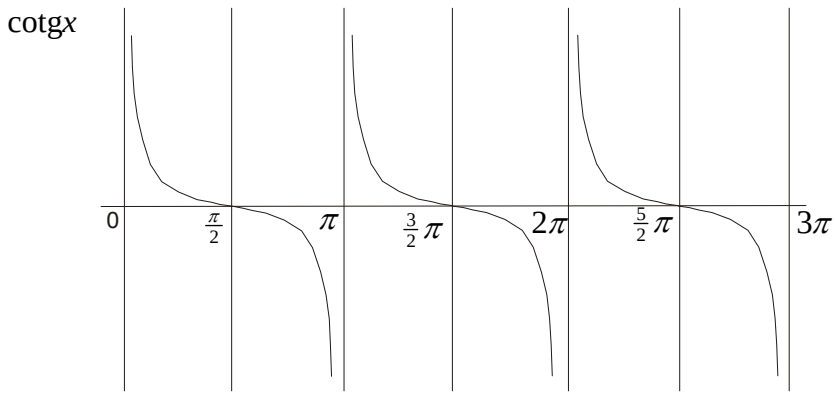
II $\rightarrow$ I

$$\mathrm{tg}(\pi - x) = -\mathrm{tg}x$$
$$\mathrm{cotg}(\pi - x) = -\mathrm{cotg}x$$

8. grafy:



tangentoida



kotangentoida

- <u>goniometrické rovnice</u>

<u>Def.</u>

Goniometrická rovnica je rovnica, v ktorej je neznáma v argumente goniometrickej funkcie.

<u>Veta</u>

Základným koreňom goniometrickej rovnice nazývame každý koreň z intervalu $\langle 0,\ 2\pi)$ ($\langle 0,\ \pi)$).

<u>Pr.</u>

Riešte v R:

$\sin x = \frac{1}{2}$

- pri riešení si musíme určiť, o ktoré kvadranty ide: sínus je kladný v I a II kvadrante
- ďalej si vždy musíme určiť pomocnú hodnotu z I kvadrantu; v tomto prípade bude aj riešením

$x_1 = \frac{\pi}{6}$, potom pre II kvadrant platí: $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

- teda máme $x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k.2\pi$, takže:

$P = \left\{\frac{\pi}{6} + k.2\pi, \frac{5}{6}\pi + k.2\pi; k \in Z\right\}$

<u>Pr.</u>

Riešte v R:

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

- kosínus je záporný v II a III kvadrante
- $x_1 = \frac{\pi}{4}$ je pomocná hodnota z I kvadrantu

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ a $x_3 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

$P = \left\{\frac{3}{4}\pi + k.2\pi, \frac{5}{4}\pi + k.2\pi; k \in Z\right\}$

b) $\cos x = \frac{3}{2}$

- je zrejmé, že $P = \theta$, keďže $\cos x \in \langle -1, 1\rangle$

c) $\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{\pi}{3}$

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ $\qquad P = \left\{\frac{2}{3}\pi + k.2\pi; k \in Z\right\}$

d) $\sin x = 2\sin x\cos x$

$\sin x = 2\sin x\cos x$

$\sin x - 2\sin x\cos x = 0$

$\sin x(1 - 2\cos x) = 0$

$\sin x = 0 \vee 1 - 2\cos x = 0$

$x = k\pi \qquad \cos x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{3} \qquad x_4 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

$P = \{k\pi, \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{5}{3}\pi + k2\pi; k \in Z\}$

e) $\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}x - 3 = 0$

$\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}x - 3 = 0$

$\mathrm{tg}x = y$

$y^2 + 2y - 3 = 0$

$(y+3)(y-1) = 0$

$y = -3 \quad \vee \quad y = 1$

$\mathrm{tg}x = -3 \qquad \mathrm{tg}x = 1$

$x \doteq -71{,}56 \qquad x = \frac{\pi}{4}$

$P = \{\frac{\pi}{4} + k\pi, -71{,}56 + k\pi; k \in Z\}$

f) $1 + \sin x = 3(1 - \sin x)$

$1 + \sin x = 3 - 3\sin x$

$4\sin x = 2$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x_1 = 30° \qquad x_2 = 150°$

$P = \{30° + k.360°, 150° + k.360°; k \in Z\}$

g) $\sin x + \cos x = 2$

$\sin x = 1 \wedge \cos x = 1$ - to nie je možné

$P = \theta$

h) $2\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$

$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x - \frac{\pi}{4} = y$

$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_1 = \frac{\pi}{3} \qquad y_2 = \frac{2}{3}\pi$

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \qquad 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi$

$2x = \frac{7}{12}\pi \qquad 2x = \frac{11}{12}\pi$

$x = \frac{7}{24}\pi + k.2\pi \qquad x = \frac{11}{24}\pi + k.2\pi$

$P = \{\frac{7}{24}\pi + k.2\pi, \frac{11}{24}\pi + k.2\pi; k \in Z\}$

i) $\cos 3x = \frac{1}{2}$

$3x = y$

$\cos y = \frac{1}{2}$

$y_1 = \frac{\pi}{3}$ $\quad$ $y_4 = \frac{5}{3}\pi$

$3x = \frac{\pi}{3}$ $\quad$ $3x = \frac{5}{3}\pi$

$x = \frac{\pi}{9} + k.2\pi$ $\quad$ $x = \frac{5}{9}\pi + k.2\pi$

$P = \left\{\frac{\pi}{9} + k.2\pi, \frac{5}{9}\pi + k.2\pi; k \in Z\right\}$

j) $\sin 2x = \cos 3x \sin 2x$

$\sin 2x - \cos 3x \sin 2x = 0$

$\sin 2x(1 - \cos 3x) = 0$

$2x = y$ $\quad$ $3x = z$

$\sin y(1 - \cos z) = 0$

$\sin y = 0 \ \vee \ 1 - \cos z = 0$

$y = k\pi$ $\quad$ $\cos z = 1$

$z = k.2\pi$

$2x = k\pi$ $\quad$ $3x = k.2\pi$

$x = \frac{k\pi}{2} + k.2\pi$ $\quad$ $x = \frac{k.2\pi}{3} + k.2\pi$

$P = \left\{\frac{k\pi}{2} + k.2\pi, \frac{k.2\pi}{3} + k.2\pi; k \in Z\right\}$

k) $\cos x = \sin 2x \cos x$

$\cos x - \sin 2x \cos x = 0$

$\cos x(1 - \sin 2x) = 0$

$\cos x = 0 \ \vee \ 1 - \sin 2x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad$ $\sin 2x = 1$

$\sin y = 1$

$y = \frac{\pi}{2}$

$2x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{4} + k.2\pi$

$P = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k.2\pi; k \in Z\right\}$

l) $\mathrm{cotg}^2 x + \mathrm{cotg} x = 0$

$\mathrm{cotg} x = y$

$y^2 + y = 0$

$y(y+1) = 0$

$y = 0 \quad \vee \quad y = -1$

$\mathrm{cotg} x = 0$ $\quad$ $\mathrm{cotg} x = -1$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad$ $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

$P = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi; k \in Z\right\}$

- <u>grafy zložených funkcií</u>

$$y = a.f(bx + c) + d \qquad (f \in \{\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}\})$$

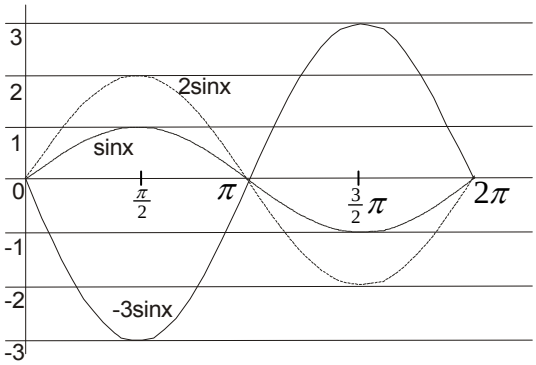
<u>Pr.</u>

Nakreslite grafy funkcií:

$y = \sin x$

$y = 2\sin x$

$y = -3\sin x$



- vidíme, že perióda sa pri násobení celej funkcie nenulovým reálnym číslom nemení, rozdielne bude násobenie argumentu v goniometrickej funkcii

<u>Pr.</u>

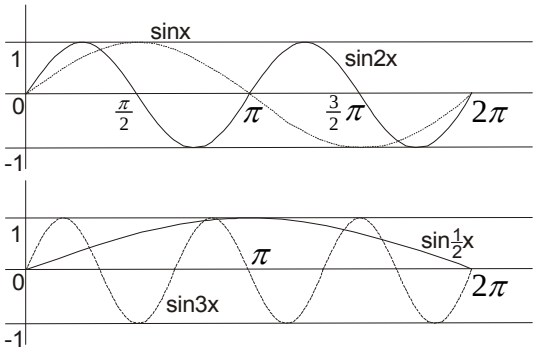
Nakreslite grafy funkcií:

$y = \sin x$

$y = \sin 2x$

$y = \sin 3x$

$y = \sin \frac{1}{2} x$



$\sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi))$ … $\sin 2x$ je periodická s najmenšou periódou $p = \pi$

$\sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin(3(x + \frac{2}{3}\pi))$ … $p = \frac{2}{3}\pi$

$\sin \frac{1}{2} x = \sin(\frac{1}{2} x + 2\pi) = \sin(\frac{1}{2}(x + 4\pi))$ … $p = 4\pi$

- pre periódu goniometrických funkcií budú platiť nasledovné vzťahy:

1. $y = \sin \omega x$ … $p = \frac{2\pi}{\omega}$
2. $y = \cos \omega x$ … $p = \frac{2\pi}{\omega}$
3. $y = \mathrm{tg}\, \omega x$ … $p = \frac{\pi}{\omega}$
4. $y = \mathrm{cotg}\, \omega x$ … $p = \frac{\pi}{\omega}$

Veta

Zostrojiť graf funkcie $y = \sin(x-\varphi)$ $[y = \sin(x-\varphi)]$ znamená posunúť graf funkcie $y = \sin x$ o φ doprava [doľava].

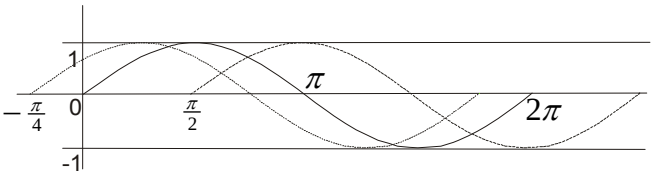
Pr.

Nakreslite grafy funkcií:

$y = \sin x$

$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



- cyklometrické funkcie

- goniometrické funkcie nie sú prosté, takže nemôžu mať inverzné funkcie

- uvažujme preto takto:

1. zoberme si funkciu $\sin x$ na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, na tomto intervale je prostá a zobrazuje sa na interval $\langle -1,1 \rangle$, teda existuje inverzná funkcia

Def.

Funkcia arkussínus je inverzná funkcia k funkcii sínus na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. $y = \arcsin x$

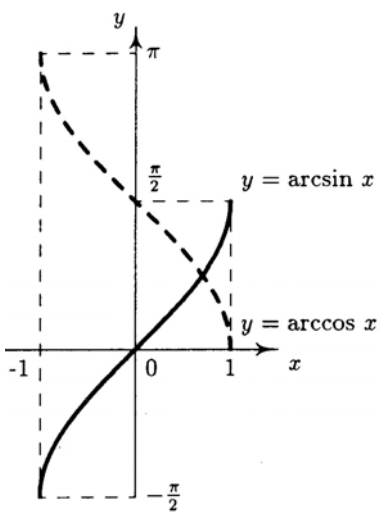
$D(\arcsin) = \langle -1,1 \rangle \qquad H(\arcsin) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

2. zoberme si funkciu $\cos x$ na intervale $\langle 0, \pi \rangle$, na tomto intervale je prostá a zobrazuje sa na interval $\langle -1,1 \rangle$, teda existuje inverzná funkcia

Def.

Funkcia arkuskosínus je inverzná funkcia k funkcii kosínus na intervale $\langle 0, \pi \rangle$. $y = \arccos x$

$D(\arccos) = \langle -1,1 \rangle \qquad H(\arccos) = \langle 0, \pi \rangle$



3. zoberme si funkciu $\mathrm{tg}x$ na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, na tomto intervale je prostá a zobrazuje sa na interval $\langle -\infty, \infty \rangle$, teda existuje inverzná funkcia

Def.

Funkcia arkustangens je inverzná funkcia k funkcii tangens na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. $y = \mathrm{arctg}x$

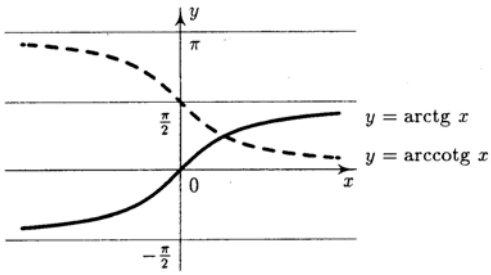
$$D(\mathrm{arctg}) = \langle -\infty, \infty \rangle \qquad H(\mathrm{arctg}) = \left\langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \right\rangle$$

4. zoberme si funkciu $\mathrm{cotg}x$ na intervale $\langle 0, \pi \rangle$, na tomto intervale je prostá a zobrazuje sa na interval $\langle -\infty, \infty \rangle$, teda existuje inverzná funkcia

Def.

Funkcia arkuskotangens je inverzná funkcia k funkcii kotangens na intervale $\langle 0, \pi \rangle$. $y = \mathrm{arccotg}x$

$$D(\mathrm{arccotg}) = \langle -\infty, \infty \rangle \quad H(\mathrm{arccotg}) = \langle 0, \pi \rangle$$



Neriešené úlohy

1. Vypočítajte:

a) $\sin\left(-\frac{21}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{22}{3}\pi\right)$ b) $\sin 3825° + \cos 660°$ c) $\sin\left(\frac{55}{3}\pi\right) - \cos\left(-\frac{37}{6}\pi\right)$

d) $\mathrm{tg}\left(\frac{55}{3}\pi\right) - \mathrm{cotg}\left(-\frac{37}{6}\pi\right)$

2. Určite znamienka hodnôt $\sin x$ **a** $\cos x$**, ak** $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

3. Vypočítajte hodnotu výrazu $\frac{3\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$**, ak** $tgx = -7$

4. Nakreslite grafy funkcií na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$**:**

a) $y = |\sin x|, y = |-2\sin x|, y = \sin|x|, y = -2.|\sin x|, y = 2.|\sin|x||, y = |\cos x|, y = |\mathrm{tg}x|$

b) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}, y = -\frac{\cos x}{|\cos x|}, y = \frac{2\cos^2 x}{\cos x - |\cos x|}, y = \frac{\sin x}{\sin + |\sin x|}, y = \frac{2\sin x}{\cos x + |\cos x|}$

c) $y = \sin^2 x, y = \cos^2 x, y = \mathrm{tg}^2 x, y = \sin^3 x, y = \cos^3 x$

d) $y = |\mathrm{tg}x|, y = \mathrm{tg}x + |\mathrm{tg}x|, y = \sqrt{\sin^2 x}, y = \mathrm{tg}x.|\cos x|, y = \sin x + |\sin x|,$

$y = \sin x - \sin|x| + |\sin x|$

5. Nájdite všetky $a, b \in R$ **také, že graf funkcie** $f : y = a\sin x + b$ **prechádza bodmi** $A[0, -1]$; $B\left[\frac{3}{2}, 2\right]$**. Nakreslite graf funkcie** f **.**

6. **Nájdite všetky** $a,b \in R$ **také, že graf funkcie** $f: y = a\cos x + b$ **prechádza bodmi** $A[0,-3]$; $B[\frac{\pi}{2},-4]$. **Nakreslite graf funkcie** f **.**

7. Je daná funkcia $f: y = \mathrm{tg}(ax+b); a \geq 0, b \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ **.Určite** a,b **, ak perióda funkcie je** 6π **a** $f(0) = \sqrt{3}$ **.**

8. Koľkokrát sa pretnú grafy funkcií $f: y = \cos x, g: y = \sin 2x$ **na intervale** $\langle 0, 100\pi \rangle$ **?**

9. Ktoré z funkcií $f: y = \sin|x|, g: y = \cos|x|, h: y = |\sin x|, i: y = |\cos x|$ **sú periodické? Aká je ich najmenšia perióda?**

10. Nakreslite grafy funkcií na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ **:**

a) $y = \sin(2x-\pi), y = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x), y = \cos(3x-\pi), y = \sin(2x+\pi)$

b) $y = 3\sin(2x-\pi)+1, y = -2\sin(3x+2\pi)-2, y = -\sin(\frac{1}{2}x-\pi), y = -\cos(2x+\pi)+2$

c) $y = \mathrm{tg}(2x-\frac{\pi}{2}), y = \mathrm{cotg}\,\frac{x-\pi}{2}, y = (\sin x + \cos x)^2$

11. Určite definičný obor funkcie:

a) $y = \sqrt{\sin x}$ b) $y = \sqrt{\cos x}$ c) $y = \sqrt{\sqrt{2} - 2\sin x}$ d) $y = \sqrt{\mathrm{tg}x - 1}$

e) $y = \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}$

12. Riešte v R:

a) $\sin x = |\sin x|$ b) $\cos x = -|\cos x|$ c) $\sin x + \cos x = 2$ d) $\sin x + \sin 2x = 2$

e) $\sin x = \cos x$ f) $\sin x = -\cos x$ g) $\sin x = \cos(-x)$ h) $\mathrm{tg}x = -\mathrm{tg}x$

13. Riešte v R:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$ d) $\sin x = 2\sin x\cos x$ e) $\cos 3x = \frac{1}{2}$

f) $1 + \sin x = 3(1 - \sin x)$ g) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$ h) $2\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$

i) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1$ j) $\cos x = \sin 2x \cos x$ k) $\mathrm{cotg}2x + \mathrm{cotg}x = 0$ l) $\sin 2x \cos 3x = \sin 2x$

m) $\frac{\mathrm{cotg}x+1}{\mathrm{cotg}x-1} = 2 + \sqrt{3}$ n) $\frac{\mathrm{tg}x+1}{\mathrm{tg}x-1} = 2 + \sqrt{3}$ o) $3\cos x - 1 = \frac{2\cos x + 1}{3}$

14. Nájdite všetky $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ **tak, aby čísla:**

a) $\mathrm{tg}x, \frac{1}{\cos x}, \mathrm{cotg}x$ b) $\mathrm{cotg}x, \frac{1}{\sin x}, \mathrm{tg}x$

tvorili za sebou nasledujúce členy a) aritmetickej, b) geometrickej postupnosti.

16. GONIOMETRIA

1. Základné vzťahy medzi goniometrickými funkciami

2. Súčtové vzorce

3. Goniometrické funkcie premennej $2x$ a $\frac{x}{2}$

4. Súčet a rozdiel hodnôt goniometrických funkcií

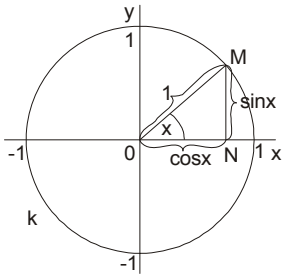
.....

- <u>základné vzťahy medzi goniometrickými funkciami</u>

<u>Veta</u>

$\forall x \in R : \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Dôkaz



- z $\Delta 0NM$ použitím Pytagorovej vety dostávame:

$$1^2 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

- teda máme: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

<u>Veta</u>

$\forall x \in R$:

1. $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$
2. $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

Dôkaz

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
   $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
   $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
   $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
   $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

<u>Veta</u>

$\forall x \in R, x \neq k.\frac{\pi}{2} : \mathrm{tg}x.\mathrm{cotg}x = 1$

Dôkaz

$$\mathrm{tg}x.\mathrm{cotg}x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 1$$

<u>Pr.</u>

Určite hodnoty ostatných goniometrických funkcií, ak platí:

a) $\sin x = 0{,}6; x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ - je to v II kvadrante, tak $\cos x < 0$

$\cos x = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8$

$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4}$

$\mathrm{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3}$

b) $\mathrm{tg}x = -2{,}4; x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$$\mathrm{cotg}x = \frac{1}{\mathrm{tg}x} = -\frac{5}{12}$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

$$\mathrm{tg}^2 x\left(1-\sin^2 x\right) = \sin^2 x$$

$$\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}^2 x \sin^2 x = \sin^2 x$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \sin^2 x + \mathrm{tg}^2 x \sin^2 x$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \sin^2 x\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)$$

$$\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

$$\sin x = \frac{\mathrm{tg}x}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$$ - II kvadrant, teda: $\sin x > 0$

$$\sin x = -\frac{-2{,}4}{\sqrt{1+5{,}76}} = \frac{2{,}4}{\sqrt{6{,}76}} = \frac{2{,}4}{2{,}6} = \frac{12}{13}$$

$$\cos x = \frac{\sin x}{\mathrm{tg}x} = -\frac{5}{13}$$

Pr.

Zjednodušte:

a) $\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x}$

$$\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x} = \frac{\sin x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos x\left(1-\cos^2 x\right)} = \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos x \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{cotg}x$$

$$\cos x \neq 0 \wedge \sin x \neq 0 \ldots x \neq k.\frac{\pi}{2}$$

b) $\frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$$\frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}x$$

$$\cos x \neq 0 \wedge \sin x \neq 0 \ldots x \neq k.\frac{\pi}{2}$$

c) $\frac{\mathrm{tg}^2 x+1}{\mathrm{cotg}^2 x+1}$

$$\frac{\mathrm{tg}^2 x+1}{\mathrm{cotg}^2 x+1} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+1} = \frac{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x$$

$$\cos x \neq 0 \wedge \sin x \neq 0 \ldots x \neq k.\frac{\pi}{2}$$

d) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

$$\frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x} = 1+\sin x$$

$$\sin x \neq 1 \ldots x \neq \frac{\pi}{2} + k.2\pi$$

e) $\frac{\mathrm{tg}x \cos^2 x}{1-\cos^2 x}$

$$\frac{\mathrm{tg}x \cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}{\sin^2 x} = \mathrm{cotg}x$$

$$\cos x \neq 0 \wedge \sin x \neq 0 \ldots x \neq k.\frac{\pi}{2}$$

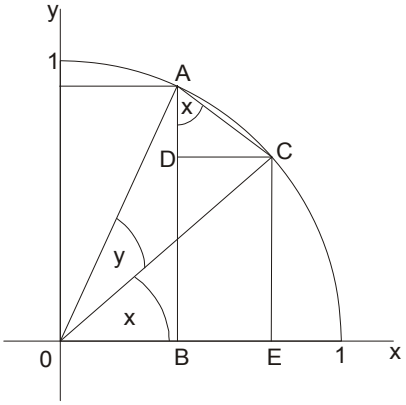
- <u>súčtové vzorce</u>

<u>Veta</u>

$\forall\, x, y \in R$:

$$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$$

Dôkaz



$$\Delta 0CA: \sin y = |AC|$$
$$\cos y = |0C|$$
$$\Delta ADC: \cos x = \frac{|AD|}{|AC|}$$
$$|AD| = \cos x.|AC| = \cos x.\sin y$$
$$\Delta 0EC: \sin x = \frac{|CE|}{|0C|}$$
$$|CE| = \sin x|0C| = \sin x\cos y = |BD|$$

$$\sin(x+y) = |AB| = |AD| + |BD| = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin[x+(-y)] = \sin x\cos(-y) + \cos x\sin(-y) =$$
$$= \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right) = \sin\tfrac{\pi}{2}\cos x + \cos\tfrac{\pi}{2}\sin x = 1.\cos x + 0.\sin x = \cos x$$

$$\cos(x+y) = \sin\left[\tfrac{\pi}{2}+(x+y)\right] = \sin\left[\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right)+y\right] =$$
$$= \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right)\cos y + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right)\sin y =$$
$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+a\right) = \cos a$$
$$a = \tfrac{\pi}{2}+x$$
$$\sin(\pi+x) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right)$$
$$-\sin x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\cos(x-y) = \cos[x+(-y)] = \cos x\cos(-y) - \sin y\sin(-y) =$$
$$= \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

<u>Veta</u>

1. $\forall\, x \in R - \left\{(2k-1).\tfrac{\pi}{2}; k \in Z\right\}$:

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y}$$
$$\mathrm{tg}(x-y) = \frac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y}$$

2. $\forall\, x \in R - \{k\pi; k \in Z\}$:

$$\mathrm{cotg}(x+y) = \frac{\mathrm{cotg}x.\mathrm{cotg}y - 1}{\mathrm{cotg}x + \mathrm{cotg}y}$$
$$\mathrm{cotg}(x-y) = \frac{\mathrm{cotg}x.\mathrm{cotg}y + 1}{\mathrm{cotg}x - \mathrm{cotg}y}$$

Dôkaz

1. $\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=\frac{\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y}$

   $\mathrm{tg}(x-y)=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}=\frac{\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y}$

2. $\cot g(x+y)=\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\sin x\cos y+\cos x\sin y}=\frac{\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\sin x\sin y}}{\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\sin y}}=\frac{\mathrm{cotg}x.\mathrm{cotg}y-1}{\mathrm{cotg}x+\mathrm{cotg}y}$

   $\cot g(x-y)=\frac{\cos(x-y)}{\sin(x-y)}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}=\frac{\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\sin x\sin y}}{\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\sin x\sin y}}=\frac{\mathrm{cotg}x.\mathrm{cotg}y+1}{\mathrm{cotg}x-\mathrm{cotg}y}$

- <u>goniometrické funkcie premennej</u> $2x$ **<u>a</u>** $\frac{x}{2}$

<u>Veta</u>

1. $\forall x\in R:\sin 2x=2\sin x.\cos x$
2. $\forall x\in R:\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$
3. $\forall x\in R, x\neq(2k-1)\frac{\pi}{4}, x\neq(2k-1)\frac{\pi}{2}:\mathrm{tg}2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$
4. $\forall x\in R, x\neq k.\frac{\pi}{2}:\mathrm{cotg}2x=\frac{\mathrm{cotg}^2x-1}{2\mathrm{cotg}x}$

Dôkaz

1. $\sin 2x=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x=2\sin x\cos x$
2. $\cos 2x=\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x$
3. $\mathrm{tg}2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$
4. $\mathrm{cotg}2x=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x}}=\frac{\mathrm{cotg}^2x-1}{2\mathrm{cotg}x}$

<u>Veta</u>

1. $\forall x\in R:\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
2. $\forall x\in R:\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
3. $\forall x\in R, x\neq(2k-1)\pi:\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
4. $\forall x\in R, x\neq k.2\pi:\mathrm{cotg}2x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Dôkaz

1. $\frac{x}{2}=y$

   $\cos 2y=\cos^2 y-\sin^2 y\ \ldots\ \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

   $\cos x=1-\sin^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x}{2}$

   $2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x\ \ldots\ \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$

   $\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\ \ldots\ \sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

2. $\frac{x}{2} = y$

$\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y \ldots \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - 1 + \cos^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$

$2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x \ldots \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

$\left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \ldots \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

3. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

4. $\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1+\cos x}{2}}{\frac{1-\cos x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

- <u>súčet a rozdiel hodnôt goniometrických funkcií</u>

<u>Veta</u>

$\forall x, y \in R$:

1. $\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2}.\cos \frac{x-y}{2}$
2. $\sin x - \sin y = 2\cos \frac{x+y}{2}.\sin \frac{x-y}{2}$
3. $\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2}.\cos \frac{x-y}{2}$
4. $\cos x + \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2}.\sin \frac{x-y}{2}$

Dôkaz

$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \qquad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$

1. $\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2}\sin \frac{x-y}{2} +$
$+ \sin \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2}\sin \frac{x-y}{2} = 2\sin \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2}$
2. $\sin x - \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2}\sin \frac{x-y}{2} -$
$- \sin \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2}\sin \frac{x-y}{2} = 2\cos \frac{x+y}{2}.\sin \frac{x-y}{2}$
3. $\cos x + \cos y = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \cos \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2}\sin \frac{x-y}{2} +$
$+ \cos \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2}\sin \frac{x-y}{2} = 2\cos \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2}$
4. $\cos x - \cos y = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \cos \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2}\sin \frac{x-y}{2} -$
$- \cos \frac{x+y}{2}\cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2}\sin \frac{x-y}{2} = -2\sin \frac{x+y}{2}\sin \frac{x-y}{2}$

<u>Neriešené úlohy</u>

1. Určite hodnoty ostatných goniometrických funkcií, ak platí:

a) $\cos x = -0{,}6; x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ b) $\operatorname{cotg} x = -\frac{1}{3}; x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$

c) $\cos x = \frac{a-b}{a+b}; 0 < a > b,\ x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ d) $\cos x = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}; k \in R, x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$

e) $\operatorname{tg} x = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}; x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

2. Vypočítajte:

a) $\sin 75°$ b) $\cos 15°$ c) $\sin 195°$ d) $\sin 15°$ e) $\sin \frac{3}{8}\pi$ f) $\cos \frac{5}{15}\pi$

3. Vyjadrite $\frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}$ **pomocou** $\mathrm{tg}x$ **a** $\mathrm{tg}y$ **.**

3. Vyjadrite $\frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$ **pomocou** $\mathrm{cotg}x$ **a** $\mathrm{cotg}y$ **.**

4. Dokážte, že pre všetky $x, y \in R$ **platí:**

a) $\sin x - \sin y = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

c) $\cos(x+y)\cos(x-y) = 2\cos^2 x - 1$

d) $\sin(x+y) + \cos(x-y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y)$

5. Vypočítajte $\sin 2x, \cos 2x, \sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}, \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ **, ak:**

6. Zjednodušte:

a) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ b) $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ c) $\frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{\cos 2x}$ d) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ e) $\frac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x}$ f) $\frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos x + \cos 2x}$

g) $\frac{\sin x(1+\sin x - \cos^2 x)}{\cos^2 x(1+\sin x)}$ h) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} + \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ i) $\frac{1}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{1+\sin x}$ j) $\cos 2x + \sin 2x.\mathrm{tg}x$

k) $\frac{\sin x \cos x}{1-2\sin^2 x}$ l) $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos^2 x \sin x + \cos^3 x}$ m) $1 + \frac{\cos^4 x - 1}{\sin^2 x} - \mathrm{cotg}^2 x \sin^2 x$

17. NEURČITÝ INTEGRÁL

1. Pojem primitívnej funkcie

2. Fyzikálne aplikácie neurčitého integrálu

3. Integrovanie substitúciou a per partes

.....

Def.

Funkcia $F(x)$ sa nazýva primitívna funkcia funkcie $f(x)$ na intervale (a,b) ak platí:
$\forall\ x \in (a,b): F'(x) = f(x)$.

- miesto názvu primitívna funkcia sa používa **neurčitý integrál** a označuje sa $\int f(x)dx$

$F(x) = \int f(x)dx$ - dx určuje premennú

- funkcia $f(x)$ nemusí mať primitívnu funkciu, ale ak má jednu, tak ich má nekonečne veľa, líšia sa iba o konštantu

Veta

Ak $F(x), G(x)$ sú primitívne funkcie ku funkcii $f(x)$, tak $F(x), G(x)$ sa líšia o konštantu.
$\exists c \in R\ \forall x \in (a,b): G(x) = F(x) + c$.

Dôkaz

$F(x)$ je primitívna ku $f(x)$, teda $F'(x) = f(x)$, tak isto aj $G(x)$, čiže $G'(x) = f(x)$

- nech platí: $F(x) - G(x) = c$ potom: $\underbrace{[F(x) - G(x)]}_{c}' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, čo platí, pretože derivácia konštanty nula
- teda dve primitívne funkcie k tej istej funkcii sa líšia o konštantu

Integrál funkcie

1. $y = 1 \ldots \int 1dx = x + c; x \in R$

2. $y = x^n \ldots \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \in N, x \in R$

3. $y = x^r \ldots \int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c; r \in R - \{-1\}, x \in R^+$

4. $y = \frac{1}{x} \ldots \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c; x \in (0, \infty)$

5. $y = \frac{1}{x} \ldots \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c; x \in (-\infty, 0)$

6. $y = \frac{1}{x} \ldots \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c; x \in R - \{0\}$

7. $y = \sin x \ldots \int \sin x\, dx = -\cos x + c; x \in R$

8. $y = \cos x \ldots \int \cos x\, dx = \sin x + c; x \in R$

9. $y = \mathrm{tg}x \ldots \int \mathrm{tg}x\,dx = -\ln|\cos x| + c; x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$

10. $y = \mathrm{cotg}x \ldots \int \mathrm{cotg}x\,dx = \ln|\sin x| + c; x \neq k\frac{\pi}{2}$

11. $y = \frac{1}{\cos^2 x} \ldots \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}x + c; x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$

12. $y = \frac{1}{\sin^2 x} \ldots \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{cotg}x + c; x \neq k\pi$

13. $y = e^x \ldots \int e^x\,dx = e^x + c; x \in R$

14. $y = a^x \ldots \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c; 0 < a \neq 1,\ x \in R$

15. $y = \ln x \ldots \int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + c; x \in R^+$

16. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ldots \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$

17. $y = \frac{1}{1+x^2} \ldots \int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}x$

18. <u>Veta</u>

Nech $F(x)$ je primitívna funkcia ku funkcii $f(x)$ na intervale (a,b) a nech $c \in R$. Potom $c.F(x)$ je primitívna funkcia ku funkcii $c.f(x)$ na intervale (a,b).

$$\boxed{c.\int f(x)dx = \int c.f(x)dx}$$

Dôkaz

$F(x)$ je primitívna ku $f(x)$, teda $F'(x) = f(x)$ a tiež $F(x) = \int f(x)dx$. Potom platí:

$[cF(x)]' = c.F'(x) = c.f(x)$ a dostávame $c.F(x) = \int c.f(x)dx$, ale

$c.F(x) = c.\int f(x)dx$ a máme $c.\int f(x)dx = \int c.f(x)dx$.

19. <u>Veta</u>

Nech $F(x), G(x)$ sú primitívne funkcie ku $f(x), g(x)$ na intervale (a,b). Potom $F(x) \pm G(x)$ je primitívna funkcia ku funkcii $f(x) \pm g(x)$ na intervale (a,b).

$$\boxed{\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int (f(x) \pm g(x))dx}$$

Dôkaz

$F(x)$ je primitívna ku $f(x)$, teda $F'(x) = f(x)$ a tiež $F(x) = \int f(x)dx$.

$G(x)$ je primitívna ku $g(x)$, teda $G'(x) = g(x)$ a tiež $G(x) = \int g(x)dx$. Potom platí:

$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$ a dostávame

$F(x) \pm G(x) = \int (f(x) \pm g(x))dx$, ale $F(x) \pm G(x) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ a máme

$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int (f(x) \pm g(x))dx$.

20. $y = \log_a x \ldots \int \log_a x\,dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}\int \ln x\,dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + c; x > 0$

Pr.

Vypočítajte:

a) $\int \left(2x^2 - 3x^5\right)dx$

$$\int \left(2x^2 - 3x^5\right)dx = 2\int x^2\,dx - 3\int x^5\,dx = 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^6}{6} + c = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^6 + c$$

b) $\int \frac{x^2-4}{x^4}dx$

$$\int \frac{x^2-4}{x^4}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^4} - \frac{4}{x^4}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - 4.\frac{1}{x^4}\right)dx = \int x^{-2}\,dx - 4\int x^{-4}\,dx =$$

$$= -x^{-1} - 4\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right) + c = -\frac{1}{x} + \frac{4}{3}.\frac{1}{x^3} + c; x \neq 0$$

c) $\int (x-2)^2\,dx$

$$\int (x-2)^2\,dx = \int \left(x^2 - 4x + 4\right)dx = \int x^2\,dx - 4\int x\,dx + 4\int 1dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x + c = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + c$$

d) $\int \frac{-3}{2\cos^2 x}dx$

$$\int \frac{-3}{2\cos^2 x}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = -\frac{3}{2}\operatorname{tg}x + c; x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$$

e) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int 1dx =$$

$$= -\operatorname{cotg}x - x + c; x \neq k\pi$$

- <u>fyzikálne aplikácie neurčitého integrálu</u>

$s(t) = \int v(t)dt$ - dráha je primitívna funkcia ku rýchlosti

$v(t) = \int a(t)dt$ - rýchlosť je primitívna funkcia ku zrýchleniu

1. rovnomerný priamočiary pohyb

$a = 0$

$$v = \int a(t)dt = \int 0\,dt = c$$

$$s = \int v(t)dt = \int v\,dt = v\int 1dt = vt + c$$

$$s = vt + c$$

$$t = 0 \ldots s = c = s_0$$

$$s = vt + s_0$$

2. rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb

$a = \text{konšt}$

$$v = \int a(t)dt = a\int 1dt = at + c$$

$$s = \int v(t)dt = \int (at + v_0)dt = a\int t\,dt + v_0\int 1dt = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + c$$

$$s = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + c$$

$$t = 0 \ldots s = c = s_0$$

$$s = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0$$

- <u>integrovanie substitúciou</u>

<u>Veta</u>

Nech $F(u)$ je primitívna funkcia ku funkcii $f(u)$ na intervale (a,b). Nech funkcia $u=\varphi(x)$ má deriváciu na intervale (α,β), kde φ zobrazuje (α,β) do (a,b). Potom funkcia $F(\varphi(x))$ je primitívna funkcia ku funkcii $f(\varphi(x)).\varphi'(x)$ na intervale (α,β).

$$\boxed{F(\varphi(x))=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)}$$

Dôkaz

$F(u)$ je primitívna ku $f(u)$, teda $F'(u)=f(u)$

$u=\varphi(x)$

$[F(\varphi(x))]'=[F(u)]'[\varphi(x)]'=f(u).\varphi'(x)=f(\varphi(x)).\varphi'(x)$ a máme

$F(\varphi(x))=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)$

<u>Pr.</u>

Vypočítajte:

a) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx=\int \underbrace{(\sin x)}_{u}{}^3\underbrace{\cos x\,dx}_{du}=\int u^3\,du=\tfrac{u^4}{4}+c=\tfrac{\sin^4 x}{4}+c$$

$u=\sin x$

$u'=\cos x$

$\frac{du}{dx}=\cos x$

$du=\cos x\,dx$

b) $\int x\sin x^2\,dx$

$$\int x\sin\underbrace{x^2}_{u}\,dx=\tfrac{1}{2}\int \sin u\,du=-\tfrac{1}{2}\cos u+c=-\tfrac{1}{2}\cos x^2+c$$

$u=x^2$

$u'=2x$

$\frac{du}{dx}=2x$

$du=2x\,dx\ \ldots\ \frac{1}{2}du=x\,dx$

c) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,dx=\tfrac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\tfrac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+c$$

$u=1+x^2$

$u'=2x$

$\frac{du}{dx}=2x$

$du=2x\,dx\ \ldots\ \frac{1}{2}du=x\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx$

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx=\int u^{\frac{1}{3}}\,du=\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{u^4}+c=\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{\ln x^4}+c;x>0$$

$u=\ln x \qquad u'=\frac{1}{x} \qquad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \qquad du=\frac{1}{x}dx$

e) $\int \cos(2x+3)dx$

$$\int \cos\underbrace{(2x+3)}_{u}dx = \tfrac{1}{2}\int \cos u\, du = \tfrac{1}{2}\sin u + c = \tfrac{1}{2}\sin(2x+3)+c$$

$$u = 2x+3$$

$$u' = 2$$

$$\tfrac{du}{dx} = 2$$

$$du = 2\,dx$$

f) $\int (2x+1)^5\, dx$

$$\int \underbrace{(2x+1)}_{u}{}^5\, dx = \tfrac{1}{2}\int u^5\, du = \tfrac{1}{2}.\tfrac{u^6}{6} + c = \tfrac{1}{12}(2x+1)^6 + c$$

$$u = 2x+1$$

$$u' = 2$$

$$\tfrac{du}{dx} = 2$$

$$du = 2\,dx$$

g) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx = \tfrac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{3}}\, du = \tfrac{1}{4}\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \tfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} + c$$

$$u = x^4+1$$

$$u' = 4x^3$$

$$\tfrac{du}{dx} = 4x^3$$

$$du = 4x^3\, dx$$

h) $\int xe^{-x^2}\, dx$

$$\int xe^{-x^2}\, dx = -\tfrac{1}{2}\int e^u\, du = -\tfrac{1}{2}e^u + c - \tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$$u = -x^2 \qquad u' = -2x \qquad \tfrac{du}{dx} = -2x \qquad du = -2x\,dx$$

- <u>integrovanie metódou per partes</u>

<u>Veta</u>

Ak funkcie $u(x), v(x)$ majú derivácie na intervale (a,b) a existuje $\int u'(x).v(x)dx$, tak existuje aj $\int u(x).v'(x)dx$ a platí: $\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx$.

$$\boxed{\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx}$$

Dôkaz

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$$

$$\int u(x)v'(x)dx = \int [u(x)v(x)]'dx - \int u'(x)v(x)dx$$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Pr.

Vypočítajte:

a) $\int xe^x\,dx$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1.e^x\,dx = xe^x - e^x = e^x.(x-1)+c$$

$u = x \ldots u' = 1$

$v' = e^x \ldots v = e^x$

b) $\int x\sin x\,dx$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = \sin x - x\cos x + c$$

$u = x \ldots u' = 1$

$v' = \sin x \ldots v = -\cos x$

c) $\int x\ln x\,dx$

$$\int x\ln x\,dx = \tfrac{x^2}{2}\ln x - \int \tfrac{1}{x}\tfrac{x^2}{2}\,dx = \tfrac{x^2}{2}\ln x - \tfrac{1}{2}\int x\,dx = \tfrac{x^2}{2}\ln x - \tfrac{1}{2}\tfrac{x^2}{2} + c =$$

$u = \ln x \ldots u' = \tfrac{1}{x}$ $\qquad = x^2\left(\tfrac{1}{2}\ln x - \tfrac{1}{4}\right) + c; x > 0$

$v' = x \ldots v = \tfrac{x^2}{2}$

d) $\int \ln x\,dx$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \tfrac{1}{x}x\,dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c; x > 0$$

$u = \ln x \ldots u' = \tfrac{1}{x}$

$v' = 1 \ldots v = x$

e) $\int x^2e^x\,dx$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x\,dx =$$

$u = x^2 \ldots u' = 2x$ $\qquad u = 2x \ldots u' = 2$

$v' = e^x \ldots v = e^x$ $\qquad v' = e^x \ldots v = e^x$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c =$$

$$= e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$$

f) $\int x^3e^{x^2}\,dx$ - najskôr použijeme substitúciu a potom per partes

$$\int x^3e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int s.e^s\,ds = \tfrac{1}{2}\left(s.e^s - \int 1.e^s\,ds\right) = \tfrac{1}{2}\left(s.e^s - e^s\right) = \tfrac{1}{2}e^s(s-1) =$$

$s = x^2$ $\qquad u = s \ldots u' = 1$ $\qquad = \tfrac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2 - 1\right)$

$s' = 2x$ $\qquad v' = e^s \ldots v = e^s$

$ds = 2x\,dx$

g) $\int e^x\sin x\,dx$

$$\int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx =$$

$u = e^x \ldots u' = e^x$ $\qquad u = e^x \ldots u' = e^x$

$v' = \sin x \ldots v = -\cos x$ $\qquad v' = \cos x \ldots v = \sin x$

$$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx$$

- dostali sme vo výpočte taký istý integrál, tak postupujme takto:

$$2\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \tfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

h) $\int \ln^2 x\,dx$

$$\int \ln^2 x\,dx = \ln x(x\ln x - x) - \int \tfrac{1}{x} x(\ln x - 1)dx =$$

$$u = \ln x \ldots u' = \tfrac{1}{x}$$

$$v' = \ln x \ldots v = x(\ln x - 1)$$

$$= \ln x(x\ln x - x) - x\ln x + 2x + c = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c =$$

$$= x(\ln^2 x - 2\ln x + 2); x > 0$$

Neriešené úlohy

1. Nájdite funkciu $f(x)$, ak:

a) $f'(x) = 5e^x$ a $f(0) = 4$

b) $f''(x) = 6x + 2,\ f'(1) = 5,\ f(0) = 10$

2. Nájdite krivku, ktorej dotyčnica v každom bode má smernicu $4x^2 + 4$ a prechádza bodom $A[1, 2]$.

3. Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2x$, ktorá prechádza bodom $A[1, 2]$.

4. Nájdite rovnicu rýchlosti a dráhy priamočiareho pohybu, ak:

a) $a(t) = 2t - 1, v(0) = 1, s(0) = 5$ b) $a(t) = t^2 + t, v(0) = 2, s(0) = 5$

5. Vypočítajte:

a) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ b) $\int \frac{x^2-4}{x^4}dx$ c) $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+7}dx$ d) $\int \frac{(x-3)^2}{x^2}dx$ e) $\int \frac{1}{3x+2}dx$ f) $\int \frac{x-3}{x+2}dx$

6. Vypočítajte:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ b) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$ c) $\int \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx$ d) $\int \left(3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{3}x\right)dx$ e) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

f) $\int 6x\sqrt{x^2+1}dx$ g) $\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+5}}dx$ h) $\int \frac{2x^3-3\sqrt{x}-5x}{x}dx$ i) $\int \sqrt{2x-3}dx$ j) $\int \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$

7. Vypočítajte:

a) $\int \sin 2x dx$ b) $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$ c) $\int \sin^5 x dx$ d) $\int x\sin x dx$ e) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$ f) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$

g) $\int \mathrm{cotg}^2 x dx$ h) $\int 2x\sin(x^2+1)dx$ i) $\int \cos^7 x dx$ j) $\int \sin x\cos x dx$

k) $\int \sin^3 x\cos x dx$ l) $\int \mathrm{cotg} x dx$ m) $\int \mathrm{tg} x dx$ n) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$ o) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

p) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ q) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ r) $\int \frac{1}{1+\cos x}dx$ s) $\int \frac{1}{1-\sin x}dx$ t) $\int \frac{\cos x}{1-\sin x}dx$ u) $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$

v) $\int x^2 \sin x dx$

8. Vypočítajte:

a) $\int xe^x dx$ b) $\int x^2 e^x dx$ c) $\int \ln x dx$ d) $\int x\ln x dx$ e) $\int e^x \cos x dx$ f) $\int x^5 \ln x dx$

g) $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$ h) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$ i) $\int \frac{1}{2x\ln x}dx$ j) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$ k) $\int \frac{e^x}{1-2e^x}dx$ l) $\int 5xe^{3x^2+2}dx$

m) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$ n) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ o) $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$ p) $\int \frac{1-\ln x}{x\ln x}dx$ q) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ r) $\int \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$

18. URČITÝ INTEGRÁL A JEHO APLIKÁCIE

1. Určitý integrál
- delenie intervalu
- integrálne súčty a ich vlastnosti
- dolný a horný integrál, určitý integrál

2. Newtonova - Leibnizova veta
- vlastnosti určitého integrálu

3. Použitie určitého integrálu na výpočet obsahov

4. Použitie určitého integrálu na výpočet objemov rotačných telies

5. Použitie určitého integrálu na výpočet dĺžky krivky a na výpočet obsahu plášťa rotačného telesa

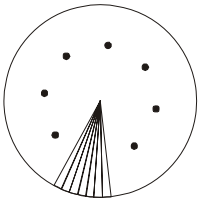
6. Fyzikálne aplikácie určitého integrálu

7. Diferenciálne rovnice

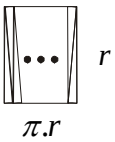
.....

- <u>určitý integrál</u>

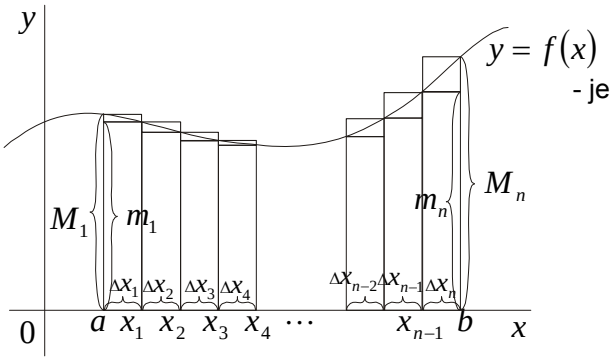
- integrál môžeme chápať ako sčitovanie nekonečne veľa malých čísel
- sú tri hlavné problémy, ktoré integrály pomohli vyriešiť: kvadratúra kruhu, duplicita kocky a trisekcia uhla
- Kepler tvrdil, že ak nevieme vypočítať objem alebo obsah nejakého telesa, či útvaru, stačí ho rozrezať na nekonečne veľa nekonečne malých častí, ktoré potom preskupíme na také teleso (útvar), ktorého objem (obsah) vieme vypočítať.
  napr.: kruh



- obvod je $\pi.r$, teda ak kruh rozrežeme a preskupíme, dostaneme takýto útvar:



> jeho obsah bude $S = \pi.r^2$, teda obsah kruhu je $\pi.r^2$



- je ohraničená na $\langle a,b \rangle$

<u>Def.</u>

Delením D intervalu $\langle a,b \rangle$ chápeme množinu čísel $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, kde:

$s(f,D) = m_1.\Delta x_1 + m_2.\Delta x_2 + \cdots + m_n.\Delta x_n$ je dolný súčet prislúchajúci funkcii f a deleniu D

$S(f,D) = M_1.\Delta x_1 + M_2.\Delta x_2 + \cdots + M_n.\Delta x_n$ je horný súčet prislúchajúci funkcii f a deleniu D

- delenie sa dá urobiť pre hocijakú ohraničenú funkciu
- ak má jedno dolné ohraničenie, tak ich má nekonečne veľa a môžeme nájsť najväčšie dolné ohraničenie **infimum**, to isté platí aj pre horné ohraničenie, tu vieme nájsť najmenšie horné ohraničenie **suprémum**

Veta

Pre každé delenie D intervalu $\langle a,b\rangle$ platí: $s(f,D)\le S(f,D)$.

Dôkaz

- je zrejmé, že $\forall i\in\{1,2,3,\dots,n-1,n\}: m_i \le M_i \wedge \Delta x_i > 0$, potom platí:

$$\begin{array}{lcl}
m_1 \le M_1 & & \\
 & & m_1\Delta x_1 \le M_1\Delta x_1 \\
m_2 \le M_2 & & + \\
 & & m_2\Delta x_2 \le M_2\Delta x_2 \\
 & & + \\
 & & \vdots \\
m_n \le M_n & & + \\
 & & m_n\Delta x_n \le M_n\Delta x_n \\
\hline
 & & s(f,D)\le S(f,D)
\end{array}$$

Def.

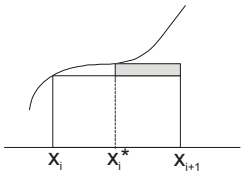
Zjemnenie delenia D nazývame delenie D^*, ktoré obsahuje všetky body delenia D a prípadne nejaké navyše.

Veta

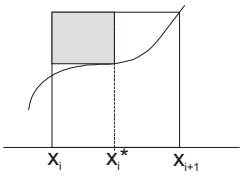
Pre každé delenie D a jeho zjemnenie D^* platí: $s(f,D)\le s(f,D^*)\le S(f,D^*)\le S(f,D)$.

- stručne povedané zjemňovaním sa horný a dolný súčet približujú

Dôkaz



- pri zjemnení delenia sa dolný súčet môže zväčšiť (ale nemusí), určite nič neubudne
- tu sa zväčšil o šedú časť



- pri zjemnení delenia sa horný súčet môže zmenšiť (ale nemusí), určite nič nepribudne
- tu sa zmenšil o šedú časť

- teda dolný súčet sa pri zjemňovaní môže zväčšovať a horný súčet sa môže zmenšovať, to znamená, že sa ich hodnoty približujú

Veta

Pre každé dve delenia D_1, D_2 intervalu $\langle a,b\rangle$ platí: $s(f,D_1)\le S(f,D_2)$.

Dôkaz

- zoberme si zjemnenie $D^* = D_1 \cup D_2$, potom platí:

$$s(f,D_1)\le s(f,D^*)\le S(f,D^*)\le S(f,D_1)$$
$$s(f,D_2)\le s(f,D^*)\le S(f,D^*)\le S(f,D_2)$$

- teda $s(f,D_1)\le s(f,D^*)\le S(f,D^*)\le S(f,D_2)$ a máme $s(f,D_1)\le S(f,D_2)$

Def.

Dolný integrál funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ je suprémum množiny dolných súčtov a označujeme ho $\underline{\int_a^b} f(x)dx$.

Def.

Horný integrál funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ je infimum množiny horných súčtov a označujeme ho $\overline{\int_a^b} f(x)dx$.

- keďže pre súčty platí: $s(f,D) \le S(f,D)$, potom pre integrály bude platiť: $\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < \overline{\int_a^b} f(x)dx \qquad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

- nie je integrovateľná
  nekonečne veľa určitých integrálov

Def.

Funkcia f sa nazýva integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ ak platí: $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$

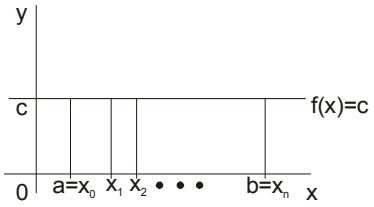
Def.

Určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ je spoločná hodnota horného a dolného integrálu funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ a označujeme ho $\int_a^b f(x)dx$.

- rozdiel medzi neurčitým a určitým integrálom je ten, že ***neurčitý integrál je funkcia*** a **určitý integrál je číslo**

Pr.

Zistite, či konštantná funkcia $f(x)=c$ je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$.



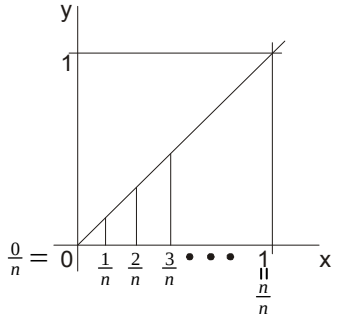
$$s(f,D) = c.\Delta x_1 + c.\Delta x_2 + \cdots + c.\Delta x_n =$$
$$= c(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = c(b-a)$$

$$S(f,D) = c.\Delta x_1 + c.\Delta x_2 + \cdots + c.\Delta x_n =$$
$$= c(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = c(b-a)$$

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, teda funkcia je integrovateľná

Pr.

Zistite, či $f(x)=x$ je integrovateľná na intervale $\langle 0,1\rangle$.



- obsah trojuholníka určeného osou x, funkciou $f(x)=x$ a intervalom $\langle 0,1\rangle$ je $\frac{1}{2}$ a to by mal byť aj integrál, tak poďme počítať
- interval $\langle 0,1\rangle$ si rozdelíme na n rovnakých dielikov

$$s(f,D)=0.\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n}.\tfrac{1}{n}+\tfrac{2}{n}.\tfrac{1}{n}+\cdots+\tfrac{n-1}{n}.\tfrac{1}{n}=\tfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=$$

$$=\tfrac{1}{n^2}.\tfrac{(1+n-1).(n-1)}{2}=\tfrac{1}{n^2}.\tfrac{n.(n-1)}{2}=\tfrac{n^2-n}{2n^2}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2n}$$

- súčet je vľavo od $\frac{1}{2}$ zjemňovaním sa bude približovať, ale nikdy $\frac{1}{2}$ neprekročí, teda $\frac{1}{2}$ môžeme prehlásiť za suprémum: $\underline{\int_0^1} x\,dx=\frac{1}{2}$

$$S(f,D)=\tfrac{1}{n}.\tfrac{1}{n}+\tfrac{2}{n}.\tfrac{1}{n}+\cdots+\tfrac{n}{n}.\tfrac{1}{n}=\tfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=$$

$$=\tfrac{1}{n^2}.\tfrac{(1+n).n}{2}=\tfrac{n^2+n}{2n^2}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2n}$$

- súčet je vpravo od $\frac{1}{2}$ zjemňovaním sa bude približovať, ale nikdy $\frac{1}{2}$ neprekročí, teda $\frac{1}{2}$ môžeme prehlásiť za infimum: $\overline{\int_0^1} x\,dx=\frac{1}{2}$

$$\underline{\int_0^1} x\,dx=\overline{\int_0^1} x\,dx=\int_0^1 x\,dx=\tfrac{1}{2}$$ - funkcia je integrovateľná

- ak by sme mali funkciu $f(x)=x^2$ na intervale $\langle 0,1\rangle$, tak tá bude tiež integrovateľná a $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$; ale ak by sme mali funkciu $f(x)=\begin{smallmatrix}1;\,x\in R\\0;\,x\in Q\end{smallmatrix}$, tak táto by na intervale $\langle 0,1\rangle$ nebola integrovateľná, pretože $\underline{\int_0^1} f(x)dx=0\neq 1=\overline{\int_0^1} f(x)dx$; to nás privádza ku nasledujúcim vetám:

Veta

Každá spojitá funkcia na intervale $\langle a,b\rangle$ je integrovateľná.

Veta

Každá funkcia, ktorá má konečný počet bodov nespojitosti je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$.

Veta

Každá monotónna funkcia je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$.

<u>Veta</u> (Newtonova-Leibnizova)

Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech F je k nej primitívna funkcia. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

<u>Pr.</u>

Vypočítajte:

a) $\int_2^3 x^2\,dx$

$$\int_2^3 x^2\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_2^3 = \tfrac{3^3}{3} - \tfrac{2^3}{3} = \tfrac{27-8}{3} = \tfrac{19}{3}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

c) $\int_e^{e^2} \tfrac{1}{x}\,dx$

$$\int_e^{e^2} \tfrac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$$

d) $\int_e^{e^2} \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx$

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx = \int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3\sqrt[3]{\ln^4 x}}{4}$$

$u = \ln x$

$u' = \tfrac{1}{x}$

$du = \tfrac{1}{x}\,dx$

$$\int_e^{e^2} \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx = \left[\frac{3\sqrt[3]{\ln^4 x}}{4}\right]_e^{e^2} = \frac{3\sqrt[3]{(\ln e^2)^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{(\ln e)^4}}{4} = \frac{3\sqrt[3]{16}-3}{4} = \tfrac{3}{4}\left(2\sqrt[3]{2} - 1\right)$$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$$

$u = x \ldots u' = 1$

$v' = \cos x \ldots v = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \left[x\sin x - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi}{2} + \cos\tfrac{\pi}{2} + \cos 0 = \tfrac{\pi}{2} + 1$$

f) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

$$\int e^{-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int e^u\,du = -\tfrac{1}{2}e^u = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2}$$

$u = -x^2$

$u' = -2x$

$du = -2x\,dx$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[e^{-x^2}\right]_0^1 = -\tfrac{1}{2e} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{e} + 1\right)$$

- <u>vlastnosti určitého integrálu</u>

<u>Veta</u>

Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech $c \in R$. Potom $\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx$.

Dôkaz

$$\int_a^b c.f(x)dx = [c.F(x)]_a^b = c.F(b) - c.F(a) = c.[F(b) - F(b)] = c.[Fx]_a^b = c.\int_a^b f(x)dx$$

<u>Veta</u>

Nech funkcie F,G sú spojité na intervale $\langle a,b\rangle$. Potom platí:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Dôkaz

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = [F(x) \pm G(x)]_a^b = (F(b) \pm G(b)) - (F(a) \pm G(a)) =$$

$$= (F(b) - F(a)) \pm (G(b) - G(a)) = [F(x)]_a^b \pm [G(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

<u>Veta</u>

Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech $a < c < b$. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Dôkaz

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$$

$$= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx$$

- definíciu integrálu môžeme rozšíriť o dve vlastnosti:

1. $a = b \ldots \int_a^a fx\,dx = 0$

2. $a > b \ldots \int_a^b fx\,dx = -\int_b^a fx\,dx$

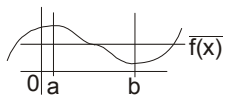
- dôkazy sú ľahko odvoditeľné z predchádzajúcich viet, ponechávajú sa pre čitateľa

- <u>stredná hodnota funkcie</u>

- strednú hodnotu na intervale $\langle a,b\rangle$ môžeme vypočítať podľa vzorca pre aritmetický priemer:

$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$, ale uznajme, že čím väčšie je n, tak tým je priemer presnejší a pri spojitej funkcii by sme mohli uvažovať $n \to \infty$, čo je prakticky nevypočítateľné. Preto je efektívnejšie používať nasledujúci vzorec:

$$\boxed{\overline{f(x)} = \frac{1}{(b-a)}.\int_a^b f(x)dx}$$



Pr.

Vypočítajte strednú hodnotu funkcie, ak:

a) $f(x) = x; x \in \langle 0,1 \rangle$

$$\overline{f(x)} = \tfrac{1}{(b-a)} . \int_a^b f(x)dx = \tfrac{1}{(1-0)} . \int_0^1 x\,dx = \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

b) $f(x) = x^2; x \in \langle 0,1 \rangle$

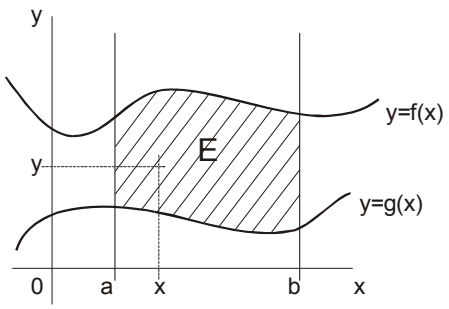
$$\overline{f(x)} = \tfrac{1}{(1-0)} . \int_0^1 x^2\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}$$

c) $f(x) = \sin x; x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$\overline{f(x)} = \tfrac{1}{2\pi} . \int_0^1 \sin x\,dx = \tfrac{1}{2\pi} . [-\cos x]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{2\pi}(-\cos 2\pi + \cos 0) =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}(-1+1) = 0$$

- <u>plošný obsah</u>



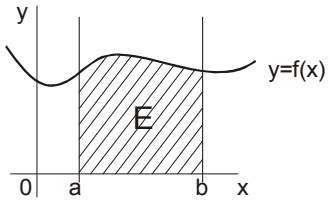
<u>Def.</u>

Elementárna oblasť je každá množina $E = \{[x, y]; a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$, kde funkcie $f(x), g(x)$ sú spojité na intervale $\langle a, b \rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí: $f(x) \le g(x)$.

<u>Def.</u>

Plošný obsah elementárnej oblasti E je číslo $S(E)$, pre ktoré platí:

1. $\forall E : S(E) \ge 0$
2. ak $\forall E, E_1, E_2 : E = E_1 \cup E_2$ a oblasti E_1, E_2 sa neprekrývajú (nemajú spoločný bod), tak potom platí: $S(E) = S(E_1 \cup E_2) = S(E_1) + S(E_2)$
3. $\forall E_1, E_2 : E_1 \cong E_2 \Rightarrow S(E_1) = S(E_2)$
4. pre každú elementárnu oblasť $E = \{[x, y]; a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ (je ohraničená zdola osou x) platí: $S(E) = \int_a^b f(x)dx$

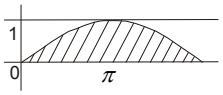


$$\boxed{S(E) = \int_a^b f(x)dx}$$

Pr.

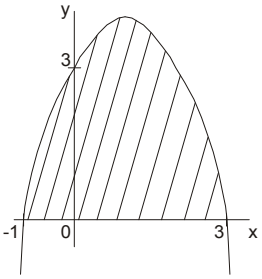
Vypočítajte plošný obsah, ak:

a) elementárna oblasť je ohraničená jedným oblúkom sínusoidy a osou x



$$S(E)=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0=2$$

b) elementárna oblasť je ohraničená grafom $y=-x^2+2x+3$ a osou x



$$-x^2+2x+3=0$$

$$x^2-2x-3=0$$

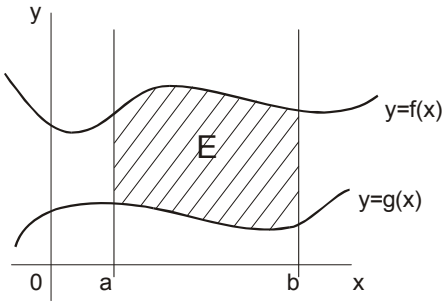
$$(x-3)(x+1)=0$$

$$x=3\vee x=-1$$

$$S(E)=\int_{-1}^{3}-x^2+2x+3\,dx=\left[-\tfrac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=$$

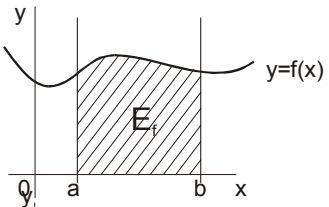
$$=9+\left(2-\tfrac{1}{3}\right)=\tfrac{32}{3}$$

- ďalej uvažujme elementárnu oblasť, ktorá nie je zdola ohraničená osou x a poďme skúmať jej obsah:



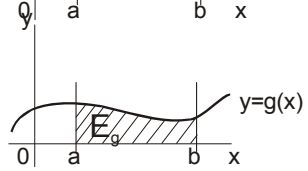
- ak si uvedomíme, že ak by sme zobrali elementárnu oblasť E_f, tak jej obsah vieme vypočítať:

$$S(E_f)=\int_a^b f(x)dx$$



- ďalej si zoberme elementárnu oblasť E_g, jej obsah bude:

$$S(E_g)=\int_a^b g(x)dx$$



- je zrejmé, že platí: $E=E_f-E_g$, tak potom musí platiť: $S(E)=S(E_f)-S(E_g)$,

teda sme zistili: $S(E)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)-g(x)dx$

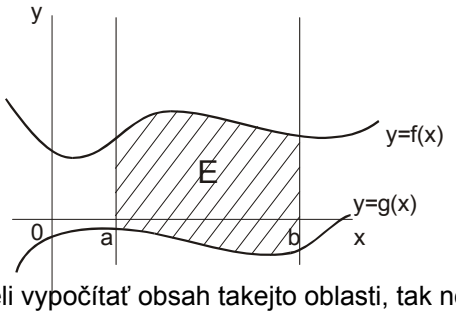
> túto úvahu môžeme považovať za dôkaz nasledujúcej vety:

Veta

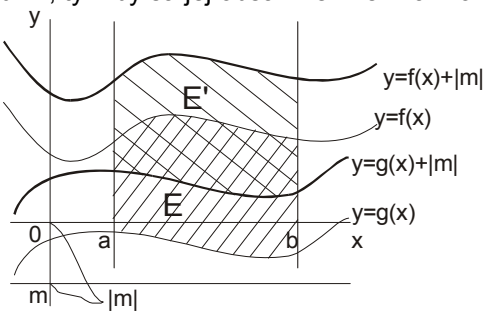
Majme elementárnu oblasť E, ktorá je zhora ohraničená funkciou $f(x)$ a zdola je ohraničená funkciu $g(x)$, nech sú funkcie $f(x), g(x)$ spojité na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech platí: $E=\{[x,y];a\le x\le b, g(x)\le y\le f(x)\}$. Potom pre plošný obsah elementárnej oblasti platí:

$$S(E)=\int_a^b f(x)-g(x)dx\,.$$

- teraz uvažujme takúto elementárnu oblasť:



- ak by sme chceli vypočítať obsah takejto oblasti, tak nemáme si ako rozdeliť našu oblasť na dve ako tomu bolo v predchádzajúcom prípade; ale uvažujme nasledovné, čo ak by sme obe funkcie zväčšili o rovnakú konštantu, tak aby elementárna oblasť bola nad osou x, tým by sa jej obsah nezmenil a môžeme ho vypočítať:



- bude platiť: $S(E)=S(E')=\int_a^b f(x)+|m|\,dx-\int_a^b g(x)+|m|\,dx=$

$$=\int_a^b f(x)+|m|\,dx-\int_a^b g(x)+|m|\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b |m|\,dx-$$

$$-\left(\int_a^b g(x)dx+\int_a^b |m|\,dx\right)=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b |m|\,dx-\int_a^b g(x)dx-\int_a^b |m|\,dx=$$

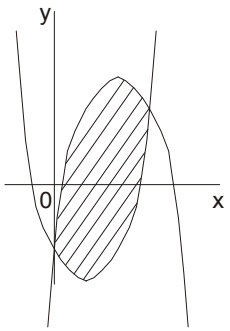
$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)-g(x)dx$$

> aj v tomto prípade obsah bude integrál rozdielu funkcií $f(x), g(x)$

<u>Pr.</u>

Vypočítajte obsah:

a) elementárnej oblasti ohraničenej funkciami $y=x^2-2x-2,\ y=-x^2+4x-2$



- aby sme zistili hranice integrálu, stačí nám určiť, v ktorých bodoch x sú funkčné hodnoty rovnaké:

$$x^2-2x-2=-x^2+4x-2$$

$$2x^2-6x=0$$

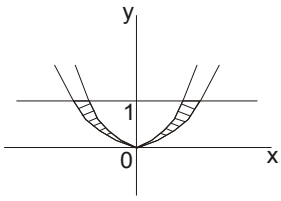
$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0 \qquad x=0 \vee x=3$$

$$S(E)=\int_0^3 -x^2+4x-2-x^2+2x+2\,dx=$$

$$=\int_0^3 -2x^2+6x\,dx=\left[-\tfrac{2x^3}{3}+3x^2\right]_0^3=9$$

b) elementárnej oblasti ohraničenej funkciami $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = 1$



$$S(E) = S(E_1) - S(E_2)$$

1. $y = \frac{1}{2}x^2, y = 1$

$$y = 1 \ldots x = \pm\sqrt{2}$$

$$S(E_1) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1 - \tfrac{1}{2}x^2\, dx = \left[x - \tfrac{x^3}{6}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2} - \tfrac{\sqrt{2}^3}{6} + \sqrt{2} - \tfrac{\sqrt{2}^3}{6} = 2.\sqrt{2}\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)$$

2. $y = x^2, y = 1$

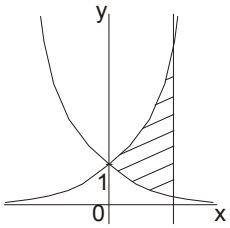
$$y = 1 \ldots x = \pm 1$$

$$S(E_1) = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\, dx = \left[x - \tfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + 1 - \tfrac{1}{3} = 2\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)$$

$$S(E) = S(E_1) - S(E_2) = 2\sqrt{2}\left(1 - \tfrac{1}{3}\right) - 2\left(1 - \tfrac{1}{3}\right) = \left(2\sqrt{2} - 2\right)\left(1 - \tfrac{1}{3}\right) = \left(2\sqrt{2} - 2\right)\tfrac{2}{3}$$

c) elementárnej oblasti ohraničenej funkciami $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$

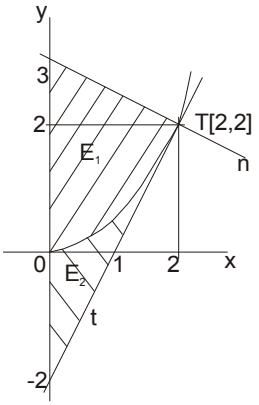


$$S(E) = \int_0^1 e^x - e^{-x}\, dx = \int_0^1 e^x\, dx - \int_0^1 e^{-x}\, dx =$$

$$= \left[e^x\right]_0^1 - \left[-e^{-x}\right]_0^1 = e - 1 + e^{-1} - 1 = e + \tfrac{1}{e} - 2$$

<u>Pr.</u>

Vypočítajte pomer obsahov útvarov, na ktoré delí parabola $y = 0{,}5x^2$ trojuholník ohraničený osou y, dotyčnicou a normálou paraboly v bode $T[2,2]$.



$$t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = 2(x - 2) + 2$$

$$t: y = 2x - 2 \quad \ldots \quad 2x - y - 2 = 0$$

$$\vec{n}_t = [2,-1] \ldots \vec{n}_n = [1,2] \ldots n: x + 2y + c = 0$$

$$2 + 4 = -c \qquad c = -6 \qquad n: x + 2y - 6 = 0$$

$$n: y = -\tfrac{x}{2} + 3$$

$$S(E_1) = \int_0^2 -\tfrac{x}{2} + 3 - 0{,}5x^2\, dx = \left[-\tfrac{x^3}{6} - \tfrac{x^2}{4} + 3x\right]_0^2 =$$

$$= -\tfrac{8}{6} - 1 + 6 = \tfrac{-4-3+18}{3} = \tfrac{11}{3}$$

$$S(E_2) = \int_0^2 0{,}5x^2 - 2x + 2\, dx = \left[\tfrac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right]_0^2 =$$

$$= \tfrac{8}{6} - 4 + 4 = \tfrac{8}{6} = \tfrac{4}{3}$$

$$S(E_1) : S(E_2) = \tfrac{11}{3} : \tfrac{4}{3} = 11 : 4$$

- pomer obsahov je $11 : 4$

- <u>objem rotačných telies</u>

<u>Def.</u>

Rotačné teleso T je teleso, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo priamky ležiacej v tej istej rovine ako oblasť.

<u>Def.</u>

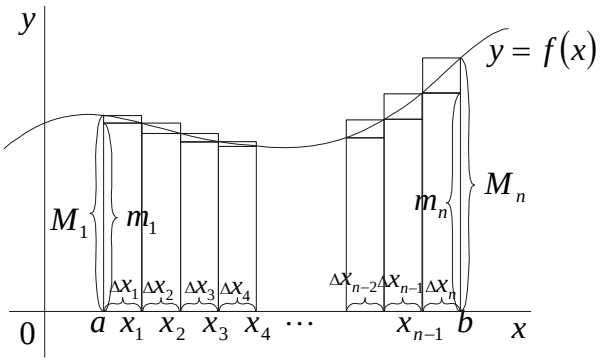
Objem rotačného telesa T je číslo $V(T)$, pre ktoré platí:

1. $\forall T : V(T) \geq 0$

2. ak $\forall T, T_1, T_2 : T = T_1 \cup T_2$ a telesá T_1, T_2 sa neprestupujú (nemajú spoločný bod), tak potom platí:
$V(T) = V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

3. $\forall T_1, T_2 : T_1 \cong T_2 \Rightarrow V(T_1) = V(T_2)$

4. ak teleso T je valec, tak $V(T) = Sp.v = \pi.r^2.v$



- ak by sme brali dolný súčet objemov valcov s rozmermi: $r = m_i, v = \Delta x_i$, tak dostaneme:

$$s(\pi.f^2, D) = \pi.m_1^2.\Delta x_1 + \pi.m_2^2.\Delta x_2 + \cdots + \pi.m_n^2.\Delta x_n$$

- to isté spravíme aj pri hornom súčte:

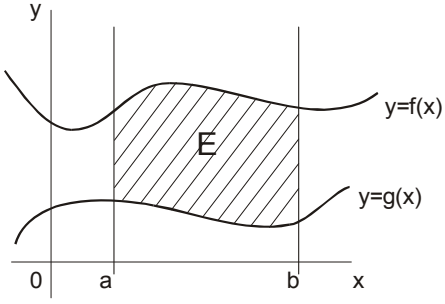
$$S(\pi.f^2, D) = \pi.M_1^2.\Delta x_1 + \pi.M_2^2.\Delta x_2 + \cdots + \pi.M_n^2.\Delta x_n$$

- teda bude platiť: $s(\pi.f^2, D) \leq V(T) \leq S(\pi.f^2, D)$, potom pre objem rotačného telesa T, ohraničeného zdola osou x platí:

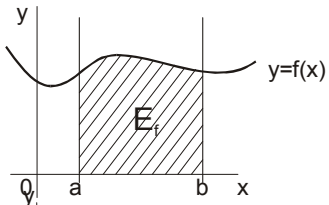
$$V(T) = \int_a^b \pi.f^2(x)dx = \pi.\int_a^b f^2(x)dx$$

$$\boxed{V(T) = \pi.\int_a^b f^2(x)dx}$$

- ak by sme uvažovali teleso, ktoré vznikne rotáciou elementárnej plochy ohraničenej dvomi funkciami (zhora $f(x)$ a zdola $g(x)$, tak sa výpočet objemu zmení:

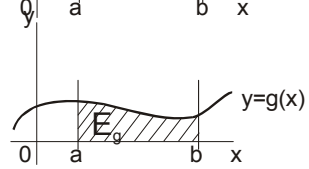


- ak si uvedomíme, že ak by sme zobrali elementárnu oblasť E_f, tak objem telesa T_f vieme vypočítať:



$$V(T_f) = \pi.\int_a^b f^2(x)dx$$

- ďalej si zoberme elementárnu oblasť E_g, objem bude:



$$V(T_g) = \pi.\int_a^b g^2(x)dx$$

- je zrejmé, že platí: $E = E_f - E_g$, tak potom musí platiť: $V(T) = V(T_f) - V(T_g)$,

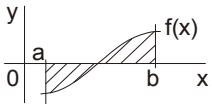
teda sme zistili: $V(T) = \pi.\int_a^b f^2(x)dx - \pi.\int_a^b g^2(x)dx = \pi.\int_a^b f^2(x) - g^2(x)dx$

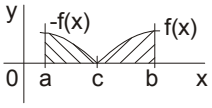
> túto úvahu môžeme považovať za dôkaz nasledujúcej vety:

<u>Veta</u>

Majme elementárnu oblasť E, ktorá je zhora ohraničená funkciou $f(x)$ a zdola je ohraničená funkciu $g(x)$, nech sú funkcie $f(x), g(x)$ spojité na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech platí: $E = \{[x,y]; a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$. Potom pre objem rotačného telesa T, vzniknutého rotáciou elementárnej oblasti okolo osi x platí:

$$V(T) = \pi.\int_a^b f^2(x) - g^2(x)dx.$$

- ak by sme mali takúto oblasť: 

, tak si ju upravíme takto: 

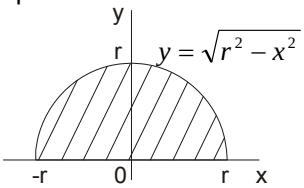
.

Potom pre objem rotačného telesa bude platiť: $V(T) = \pi.\int_a^c (-f(x))^2\,dx + \pi.\int_c^b f^2(x)dx$

<u>Pr.</u>

Odvoďte vzorec pre objem:

a) gule s polomerom r



$$f: x^2 + y^2 = r^2$$
$$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}$$
$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

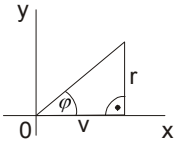
- zoberieme si len pravú polovicu a objem vynásobíme dvomi:

$$V(G) = 2.\pi.\int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2.\pi.\int_0^r r^2 - x^2\,dx = 2.\pi.\int_0^r r^2\,dx - 2.\pi.\int_0^r x^2\,dx =$$

$$= 2.\pi.r^2.\int_0^r 1dx - 2.\pi.\int_0^r x^2\,dx = 2.\pi.r^2.[x]_0^r - 2.\pi.\left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^r = 2.\pi.r^3 - 2.\pi.\tfrac{r^3}{3} =$$

$$= 2.\pi.r^3\left(1 - \tfrac{1}{3}\right) = 2.\pi.r^3.\tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3}.\pi.r^3$$

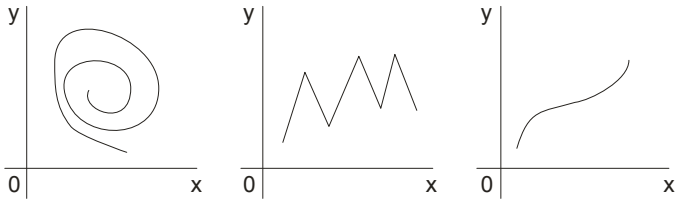
b) rotačného kužeľa



$$y = kx + q$$
$$k = \mathrm{tg}\varphi = \tfrac{r}{v}$$
$$q = 0$$
$$y = \tfrac{r}{v}x$$

$$V(T) = \pi.\int_0^v \left(\tfrac{r}{v}x\right)^2 dx = \pi.\tfrac{r^2}{v^2}\left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^v = \pi.\tfrac{r^2}{v^2}\tfrac{v^3}{3} = \tfrac{1}{3}r^2 v$$

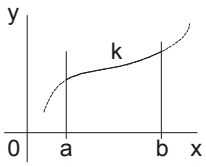
- <u>dĺžka krivky a obsah rotačnej plochy</u>



krivka

<u>Def.</u>

Krivka je graf funkcie $y = f(x)$, ktorá má spojitú deriváciu na intervale $\langle a,b\rangle$.

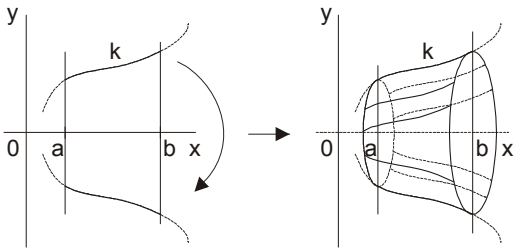


- pre dĺžku krivky k na intervale $\langle a,b\rangle$ platí:

$$\boxed{l(k) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

<u>Def.</u>

Rotačná plocha P je množina bodov v priestore, ktorú opíše krivka pri rotácii okolo osi x.



- pre obsah rotačnej plochy P na intervale $\langle a,b\rangle$ platí:

$$\boxed{S(P) = 2\pi.\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

> tento vzorec môžeme použiť aj pri výpočte obsahu plášťa rotačného telesa

Pr.

Vypočítajte dĺžku krivky (reťazovky) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ na intervale $\langle 0,1 \rangle$:

$$l(k) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]'\right)^2}\, dx \qquad \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \left[\frac{e^x}{2}\right]' + \left[\frac{e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

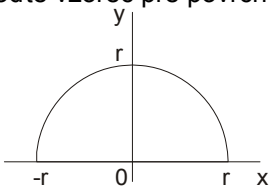
$$1 + \left(\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]'\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^x\right)^2 + 2 + \left(e^{-x}\right)^2\right] = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2$$

$$l(k) = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x + e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2}$$

Pr.

Odvoďte vzorec pre povrch gule s polomerom r:



$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

- zoberieme si len pravú polovicu a povrch vynásobíme dvomi:

$$S(G) = 4\pi.\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]'\right)^2}\, dx$$

$$\left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]' = \left[u^{\frac{1}{2}}\right]'.\left[r^2 - x^2\right]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}.(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

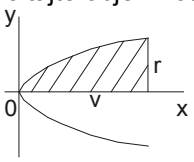
$$S(G) = 4\pi.\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 4\pi.\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi.\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 4\pi.\int_0^r r\, dx = 4\pi.r.\int_0^r 1 dx = 4\pi.r.[x]_0^r = 4\pi.r^2$$

Pr.

Vypočítajte objem rotačného paraboloidu s polomerom podstavy r a výškou v:



$$y^2 = 2px$$

$$r^2 = 2pv \qquad p = \frac{r^2}{2v}$$

$$y = \sqrt{\frac{r^2}{v}x}$$

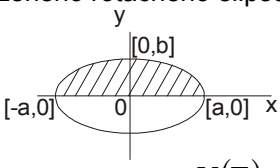
$$V(T) = \pi.\int_0^v \left(\sqrt{\frac{r^2}{v}x}\right)^2 dx = \pi.\int_0^v \frac{r^2}{v}x\, dx = \pi.\frac{r^2}{v}.\int_0^v x\, dx = \pi.\frac{r^2}{v}.\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^v =$$

$$= \pi.\frac{r^2}{v}.\frac{v^2}{2} = \frac{\pi.r^2 v}{2}$$

Pr.

Odvoďte vzorec na výpočet objemu:

a) predlženého rotačného elipsoidu



$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$V(T) = \pi.\int_a^b f^2(x)dx$$

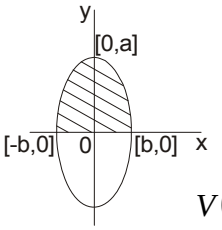
- zoberieme si len pravú časť a vynásobíme objem dvomi:

$$V(T) = 2\pi.\int_0^a b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}dx = 2\pi.\left(\int_0^a b^2\,dx - \int_0^a \frac{b^2x^2}{a^2}dx\right) =$$

$$= 2\pi.\left(b^2.\int_0^a 1dx - \frac{b^2}{a^2}\int_0^a x^2\,dx\right) = 2\pi.\left(b^2.[x]_0^a - \frac{b^2}{a^2}.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a\right) =$$

$$= 2\pi.\left(b^2a - \frac{b^2}{a^2}.\frac{a^3}{3}\right) = 2\pi.\left(b^2a - \frac{b^2a}{3}\right) = 2\pi.\frac{3b^2a - b^2a}{3} = \frac{4}{3}\pi.b^2a$$

b) splošteného rotačného elipsoidu



$$E: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$y^2 = a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2}$$

$$V(T) = \pi.\int_a^b f^2(x)dx$$

- zoberieme si len pravú časť a vynásobíme objem dvomi:

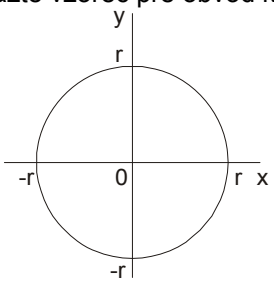
$$V(T) = 2\pi.\int_0^b a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2}dx = 2\pi.\left(\int_0^b a^2\,dx - \int_0^b \frac{a^2x^2}{b^2}dx\right) =$$

$$= 2\pi.\left(a^2.\int_0^b 1dx - \frac{a^2}{b^2}\int_0^b x^2\,dx\right) = 2\pi.\left(a^2.[x]_0^b - \frac{a^2}{b^2}.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b\right) =$$

$$= 2\pi.\left(a^2b - \frac{a^2}{b^2}.\frac{b^3}{3}\right) = 2\pi.\left(a^2b - \frac{a^2b}{3}\right) = 2\pi.\frac{3a^2b - a^2b}{3} = \frac{4}{3}\pi.a^2b$$

Pr.

Dokážte vzorec pre obvod kružnice:



$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

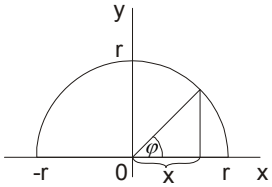
- zoberieme si len pravú hornú štvrtinu a dĺžku vynásobíme štyrmi:

$$l(l) = 4.\int_0^r \sqrt{1 + \left(\left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]'\right)^2}\,dx$$

$$\left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]' = \left[u^{\frac{1}{2}}\right]'.\left[r^2 - x^2\right]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}.(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$l(k) = 4.\int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = 4.\int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= 4.\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = 4r.\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx =$$



$$\boxed{\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & \\ \frac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi & \qquad dx = -r\sin\varphi\, d\varphi \end{array}}$$

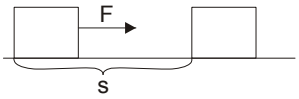
$$= 4r\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-r\sin\varphi}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2\varphi}}\,d\varphi = 4r\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-r\sin\varphi}{r\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\,d\varphi = -4r\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= -4r\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 1\,d\varphi = 4r\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\varphi = 4r\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r\,\tfrac{\pi}{2} = 2\pi.r$$

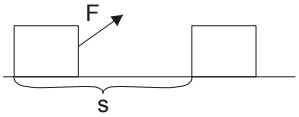
- <u>fyzikálne aplikácie určitého integrálu</u>

- určitý integrál využívame pri výpočte práce W

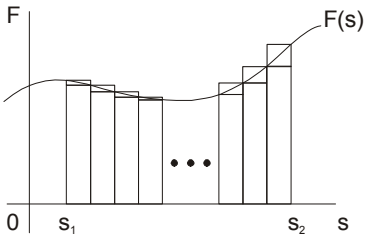
1. $F = konšt., \alpha = 0$ - sila je konštantná a smer dráhy je priamy, tak použijeme známy vzorec: $W = F.s$



2. $F = konšt., \alpha \neq 0$ - sila je konštantná a smer dráhy nie je priamy, tak použijeme známy vzorec: $W = F.s.\cos\alpha$



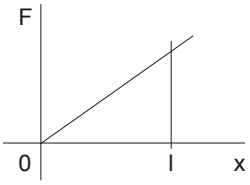
3. $F \neq konšt., \alpha = 0$ - silu si môžeme predstaviť ako funkciu



$$\boxed{W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds}$$

<u>Pr.</u>

Vypočítajte prácu W pri natiahnutí pružiny s tuhosťou k o dĺžku l



$$F = k.x$$

$$W = \int_0^l kx\,dx = k.\int_0^l x\,dx = k.\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{kl^2}{2}$$

- <u>diferenciálne rovnice</u>

- sú to rovnice, v ktorých sa vyskytujú derivácie funkcií

<u>Def.</u>

Diferenciálny rovnica (obyčajná) je každá rovnica tvaru $F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, kde y je funkcia premennej x.

- riešením diferenciálnej rovnice je každá funkcia, pre ktorú sa rovnica zmení na pravdivý výrok

<u>Pr.</u>

Overte, že:

a) riešením rovnice $y - xy' = 0$ je funkcia $f: y = 2x$

$y - xy' = 0 \qquad 2x - 2x = 0 \qquad 0x = 0$ platí

b) riešením rovnice $2yy' - 4x^3 = 0$ je funkcia $f: y = x^2$

$2yy' - 4x^3 = 0 \qquad 2x^2 2x - 4x^3 = 0 \qquad 0x = 0$ platí

c) riešením rovnice $y'' + 4y = 0$ je funkcia $f: y = \sin 2x + \cos 2x$

$f': y = 2\cos 2x - 2\sin 2x$

$f'': y = -4\sin 2x - 4\cos 2x$

$-4\sin 2x - 4\cos 2x + 4(\sin 2x + \cos 2x) = 0$

$0 = 0$ platí

<u>Def.</u>

Diferenciálna rovnica prvého rádu je rovnica tvaru $F(x, y, y') = 0$.

<u>Pr.</u>

Riešte diferenciálnu rovnicu:

a) $2y' - 3x = 0$

$2y' - 3x = 0$

$2y' = 3x$

$2\frac{dy}{dx} = 3x$

$2\,dy = 3x\,dx$

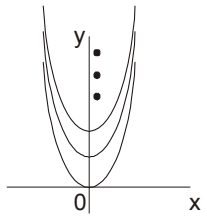
$\int 2\,dy = \int 3x\,dx$

$2.\int 1\,dy = 3.\int x\,dx$

$2y = 3.\frac{x^2}{2} + c$

$y = \frac{3}{4}x^2 + c$ … **všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice**

$c = 1 \ldots y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ … **partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice**



b) $x + yy' = 0$

$x = -yy'$

$x = -y\frac{dy}{dx}$

$x\,dx = -y\,dy$

$\int x\,dx = \int -y\,dy$

$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c \qquad x^2 + y^2 = c \qquad y = \pm\sqrt{c - x^2}; c > 0$

c) $2yy' - 4x^2 = 0$

$$2yy' = 4x^2$$
$$2y\,dy = 4x^2\,dx$$
$$2.\int y\,dy = 4.\int x^2\,dx$$
$$y^2 = \tfrac{4}{3}x^3 + c$$
$$y = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}x^3} + c$$

d) $x^2y' - y = 0$

$$x^2y' = y$$
$$\tfrac{1}{y}dy = \tfrac{1}{x^2}dx$$
$$\int \tfrac{1}{y}dy = \int \tfrac{1}{x^2}dx$$
$$\ln|y| = -\tfrac{1}{x} + \ln c$$
$$\ln\tfrac{|y|}{c} = -\tfrac{1}{x}$$
$$\tfrac{|y|}{c} = e^{-\frac{1}{x}} \qquad |y| = c.e^{-\frac{1}{x}}$$
$$y = c.e^{-\frac{1}{x}}; c \in R$$

Pr.

Nájdite a vyriešte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje populačný rast organizmov:

$$\Delta N = kN\Delta t$$
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN \qquad \frac{dN}{dt} = kN$$
$$N' = kN$$
$$\int \tfrac{1}{N}dN = k\int 1\,dt$$
$$\ln N = k.t + \ln c$$
$$\ln\tfrac{N}{c} = k.t$$
$$\tfrac{N}{c} = e^{k.t}$$
$$N = c.e^{k.t}; c \in R$$

Neriešené úlohy

1. Vypočítajte:

a) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ b) $\int_1^2 \frac{(x-2)^2}{x^4}dx$ c) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx$ d) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ e) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

2. Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného krivkami:

a) $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2x$ b) $y = x^2, y = 2x^2, y = 1$ c) $y = x^2, y = \frac{x^2}{2} + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 6, y = -2x^2 + 8x - 3$ e) $y = 1 - x^2, y = 1 - 2x$

f) $y = x^2 - 2x + 3, y = 7 - x^2$ g) $y = x^2, y^2 = x$ h) $y = x^2, y = x$

i) $y = x^2 - 2x, y = 4x - x^2$ j) $y = \cos x, y = \sin x, x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ k) $y = e^x, y = e^{-x}, y = e$

l) $y = \sin x, y = \sin^2 x, x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ m) $y = \cos^3 x, y = \sin^3 x, x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$

3. Parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y, prechádza začiatkom súradnicovej sústavy, bodom $A[4,0]$ a s osou x ohraničuje útvar s obsahom $\frac{64}{3}$. Určite jej rovnicu.

4. Ku krivke $y = -x^2 + 5x - 4$ vedieme dotyčnice v jej priesečníkoch s osou x. Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného dotyčnicami a danou krivkou.

5. Je daná funkcia $f: y = c^2 - x^2; c \in R^+$. Určite c tak, aby obsah útvaru ohraničeného grafom funkcie f a osou x bol 36.

6. Vypočítajte objem rotačného kužeľa s polomerom podstavy r a výškou v.

7. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami $y = x^2$ a $y = x$ okolo osi x.

8. Vypočítaj objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami $y = x^2$ a $y^2 = x$ okolo osi x.

9. Vypočítajte objem kladky, ktorá má polomer 6 cm, hrúbku 2 cm a po obvode drážku parabolického profilu s hĺbkou 2 cm.

10. Vypočítajte dĺžku krivky $y = \sqrt{x^3}$ na intervale $\langle 0, 4 \rangle$.

11. Odvoďte vzorec na povrch guľového vrchlíka s polomerom r a výškou v.

19. TROJUHOLNÍK

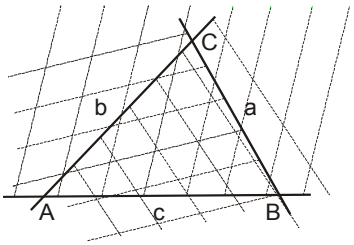
1. Základné pojmy

2. Vlastnosti

- stredné priečky, ťažnice a výšky v trojuholníku
- zhodnosť trojuholníkov
- podobnosť trojuholníkov
- vety o stranách a uhloch
- Euklidove vety a Pytagorova veta
- obvod a plošný obsah trojuholníka
- kružnica trojuholníku opísaná a vpísaná

3. Sínusová veta a kosínusová veta.

.....



Def.

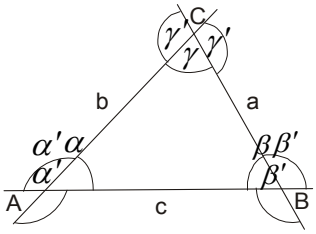
Trojuholník s vrcholmi A, B, C, ktoré neležia na jednej priamke, je prienik polrovín

$\overrightarrow{ABC}, \overrightarrow{BCA}, \overrightarrow{CAB}$. (môže byť ostrouhlý, tupouhlý a pravouhlý)

(dvojrozmerný siplex = trojuholník)

Def.

Trojuholník je časť roviny ohraničená uzavretou nesamopretínajúcou sa čiarou pozostávajúcou z troch úsečiek.



Def.

Vnútorný uhol trojuholníka je uhol pri niektorom vrchole vo vnútri trojuholníka.

$\measuredangle BAC = \measuredangle A = \alpha$ - uhol pri vrchole A

$\measuredangle ABC = \measuredangle B = \beta$ - uhol pri vrchole B

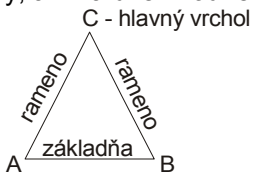
$\measuredangle BCA = \measuredangle C = \gamma$ - uhol pri vrchole C

Def.

Vonkajší uhol trojuholníka je susedný uhol k niektorému vnútornému uhlu.

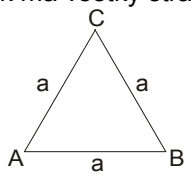
Def.

Trojuholník sa nazýva rovnoramenný, ak má dve zhodné strany.



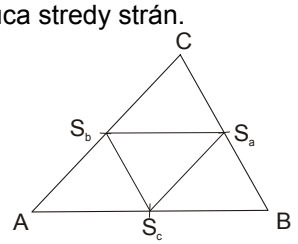
Def.

Trojuholník sa nazýva rovnostranný, ak má všetky strany zhodné.



Def.

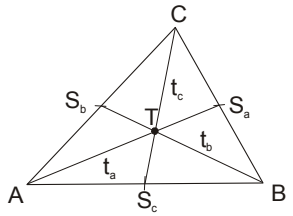
Stredná priečka je úsečka spájajúca stredy strán.



- platí nasledovné: $|S_aS_b| = \frac{|AB|}{2}$, $|S_aS_c| = \frac{|AC|}{2}$, $|S_bS_c| = \frac{|BC|}{2}$

Def.

Ťažnica trojuholníka je úsečka spájajúca vrchol trojuholníka so stredom protiľahlej strany.

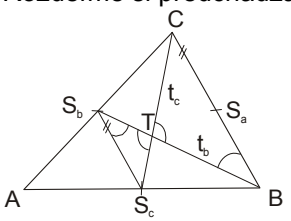


Veta

Ťažnice každého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode T (ťažisku), leží vždy vo vnútri trojuholníka a delí ťažnice v pomere $1:2$.

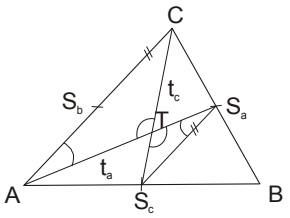
Dôkaz

Rozdeľme si predchádzajúci obrázok na dva:



- tu platí: S_bS_c je stredná priečka, teda $S_bS_c \parallel BC$ a $|S_bS_c| = \frac{|BC|}{2}$; ďalej $\sphericalangle S_bTS_c \cong \sphericalangle BTC$, keďže sú vrcholové a $\sphericalangle TS_bS_c \cong \sphericalangle TBC$, tieto sú striedavé

> to znamená, že $\Delta S_bS_cT \overset{2}{\approx} \Delta BCT$ (trojuholníky sú podobné s koeficientom podobnosti 2, podľa vety (uu) a ťažnice sú rozdelené v pomere $1:2$



- tu platí: S_aS_c je stredná priečka, teda $S_aS_c \parallel AC$ a $|S_aS_c| = \frac{|AC|}{2}$; ďalej $\sphericalangle S_aTS_c \cong \sphericalangle ATC$, keďže sú vrcholové a $\sphericalangle TS_aS_c \cong \sphericalangle TAC$, tieto sú striedavé

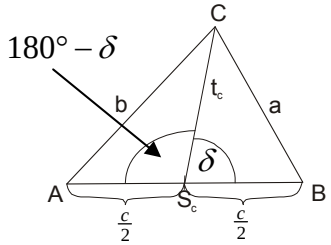
> to znamená, že $\Delta S_aS_cT \overset{2}{\approx} \Delta ACT$ (trojuholníky sú podobné s koeficientom podobnosti 2, podľa vety (uu) a ťažnice sú rozdelené v pomere $1:2$

- keďže aj v prvom aj druhom trojuholníku $|CT| = \frac{2}{3}t_c$, tak sa aj t_a a t_b pretnú v bode T; to znamená, že ťažnice sa pretnú len v jednom bode a tým je ťažisko

Pr.

Odvoďte vzorec pre výpočet ťažníc pomocou strán trojuholníka:

- uvedieme si len pre t_c, zvyšné dve sa spravia analogicky



- využijeme kosínusovú vetu, o ktorej si povieme neskôr v tejto kapitole a čitateľ sa môže ku tomuto príkladu vrátiť, aby si overil správnosť riešenia

$$a^2 = t_c^{\ 2} + \tfrac{c^2}{4} - 2t_c.\tfrac{c}{2}.\cos\delta$$

$$b^2 = t_c^{\ 2} + \tfrac{c^2}{4} - 2t_c.\tfrac{c}{2}.\cos(180° - \delta)$$

$$a^2 + b^2 = 2t_c^{\ 2} + \tfrac{c^2}{2}$$

$$2a^2 + 2b^2 = 4t_c^{\ 2} + c^2$$

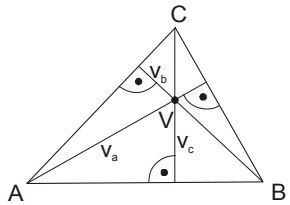
$$4t_c^{\ 2} = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

$$t_c^{\ 2} = \tfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

$$\boxed{t_a^{\ 2} = \tfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}} \qquad \boxed{t_b^{\ 2} = \tfrac{2a^2+2c^2-b^2}{4}} \qquad \boxed{t_c^{\ 2} = \tfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}}$$

Def.

Výška trojuholníka je kolmá úsečka vedená z vrcholu na protiľahlú stranu.

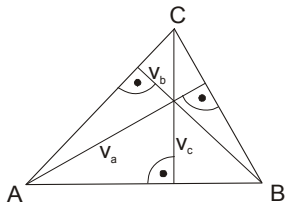


Veta

Výšky každého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode V (ortrocentre).

Dôkaz

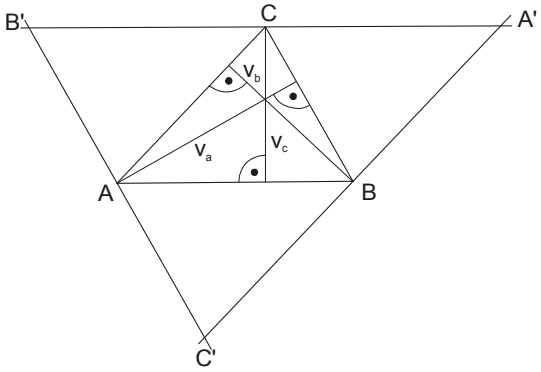
- majme trojuholník a v ňom výšky:



- doplňme ho takto:

1. bodom A veďme rovnobežku s BC
2. bodom B veďme rovnobežku s AC
3. bodom C veďme rovnobežku s AB

- takto vzniknutý trojuholník si označme $\Delta A'B'C'$:



- ako vidno, body A, B, C tvoria stredy strán $\Delta A'B'C'$, keďže úsečky AB, AC, BC sú jeho stredné priečky
- potom ale výšky ΔABC sú osy strán $\Delta A'B'C'$ a tie sa pretínajú v jednom bode, ktorý je stredom kružnice opísanej trojuholníku (vysvetlíme si neskôr)

- <u>zhodnosť trojuholníkov</u>

- zhodnosť trojuholníkov si môžeme názorne predstaviť takto: **dva trojuholníky pokladáme za zhodné, ak ich možno premiestniť tak, že sa prekrývajú**

<u>Def.</u>

Trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú zhodné, ak sa zhodujú v odpovedajúcich si stranách a v odpovedajúcich si uhloch.

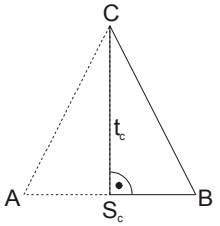
$$\forall \Delta ABC, \Delta A'B'C' : \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Leftrightarrow AB \cong A'B' \wedge BC \cong B'C' \wedge AC \cong A'C' \wedge$$
$$\wedge \measuredangle A \cong \measuredangle A' \wedge \measuredangle B \cong \measuredangle B' \wedge \measuredangle C \cong \measuredangle C'$$

- <u>vety o zhodnosti trojuholníkov:</u>

(sss) … Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú vo všetkých troch stranách.
(sus) … Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom.
(usu) … Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v strane a uhloch k nej priľahlých.
(SsU) … Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle oproti väčšej z nich.

<u>Pr.</u>

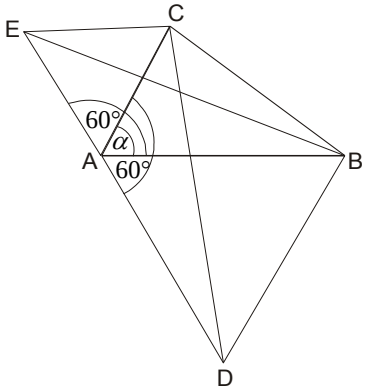
Dokážte, že ťažnica z hlavného vrcholu rovnoramenného trojuholníka je kolmá na základňu.



$$AS_c \cong BS_c \wedge AC \cong BC \wedge S_cC \cong S_cC$$
$$\Downarrow (sss)$$
$$\Delta AS_cC \cong \Delta BS_cC$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle AS_cC \cong \measuredangle BS_cC$$
$$\Downarrow$$
$$2.\measuredangle S_c = 180°$$
$$\measuredangle S_c \cong R \ldots \measuredangle S_c = 90°$$

<u>Pr.</u>

Nad stranami ostrouhlého trojuholníka ABC zostrojte zvonka rovnostranné trojuholníky ABD a ACE. Dokážte, že $CD \cong BE$.



$$AC \cong AE \wedge AD \cong BD \wedge \measuredangle CAD \cong \measuredangle EAB$$
$$\Downarrow (sus)$$
$$\Delta CAD \cong \Delta EAB$$
$$\Downarrow$$
$$CD \cong EB$$

- <u>podobnosť trojuholníkov</u>

- podobnosť trojuholníkov si môžeme názorne predstaviť takto: **dva trojuholníky pokladáme za podobné, ak ich možno premiestniť tak, že po vhodnom zväčšení sa prekrývajú**

<u>Def.</u>

Trojuholník $A'B'C'$ je podobný s trojuholníkom ABC, ak existuje reálne číslo $k > 0$ a platí:
$|A'B'| = k.|AB| \wedge |B'C'| = k.|BC| \wedge |A'C'| = k.|AC|$. ($k$ - koeficient podobnosti)

$$\forall \Delta ABC, \Delta A'B'C' : \Delta ABC \overset{k}{\approx} \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \exists k \in R^+ : |A'B'| = k.|AB| \wedge |B'C'| = k.|BC| \wedge$$
$$\wedge |A'C'| = k.|AC|$$

- <u>vety o podobnosti trojuholníkov:</u>

(sus) … Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v uhle a v pomere strán na jeho ramenách.
(uu) … Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v dvoch uhloch.

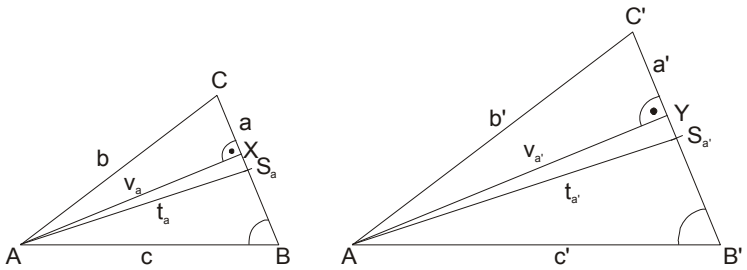
- v podobných útvaroch sú odpovedajúce si uhly zhodné

<u>Veta</u>

Majme dva trojuholníky ABC a $A'B'C'$ také, že $\Delta ABC \overset{k}{\approx} \Delta A'B'C'$. Potom platí:

1. $o' = k.o$
2. $t_{x'} = k.t_x ; x \in \{a, b, c\}$
3. $v_{x'} = k.v_x ; x \in \{a, b, c\}$
4. $S' = k^2.S$

Dôkaz



1. pre obvod o platí $o = a + b + c$, keďže trojuholníky sú podobné, tak platí:
$a' = k.a, b' = k.b, c' = k.c$. Potom platí:
$o' = a' + b' + c' = ka + kb + kc = k(a + b + c) = k.o$

2. $c' = kc \wedge \frac{a'}{2} = k.\frac{a}{2} \wedge \measuredangle B' \cong \measuredangle B$
$\Downarrow (sus)$
$\Delta A'B'S_{a'} \overset{k}{\approx} \Delta ABS_a$
$\Downarrow$
$|A'S_{a'}| = k.|AS_a|$
$t_{a'} = k.t_a$

- pre t_b a t_c sa dôkaz spraví analogicky

3. $\measuredangle B' \cong \measuredangle B \wedge \measuredangle Y \cong \measuredangle X$

$$\Downarrow (uu)$$

$$\Delta A'B'Y' \overset{k}{\approx} \Delta ABX$$

$$\Downarrow$$

$$|A'Y| = k.|AX|$$

$$v_{a'} = k.v_a$$

- pre v_b a v_c sa dôkaz spraví analogicky

4. pre obsah S platí $S = \frac{a.v_a}{2}$, keďže trojuholníky sú podobné, tak platí: $a' = k.a, v_{a'} = k.v_a$.

Potom platí: $S' = \frac{a'.v_{a'}}{2} = \frac{k.a.k.v_a}{2} = k^2.\frac{av_a}{2} = k^2.S$

Pr.

Zistite, či sú podobné trojuholníky, ak jeden má dva vnútorné uhly veľkosti 42° a 84° a druhý má dva vnútorné veľkosti 54° a 84°:

- vypočítame si tretí uhly v oboch trojuholníkoch:

$42° + 84° + x = 180°$ $\quad$ $54° + 84° + y = 180°$

$126° + x = 180°$ $\quad$ $138° + y = 180°$

$x = 54°$ $\quad$ $y = 42°$

- zistili sme: $42° = \alpha = \alpha' = 42°$

$54° = \beta = \beta' = 54°$

$84° = \gamma = \gamma' = 84°$

- odpovedajúce si uhly sú zhodné, to znamená, že trojuholníky sú podobné

Pr.

Zistite, či sú podobné trojuholníky ABC a $A'B'C'$ ak platí:

$|AB| = \sqrt{8}, |BC| = \sqrt{50}, |AC| = \sqrt{32}, |A'B'| = 2, |B'C'| = 5, |A'C'| = 4$

- podľa definície podobnosti platí, že dva trojuholníky sú podobné, ak reálne číslo $k > 0$, v tomto príklade nám teda postačí vypočítať pomery odpovedajúcich si strán a ak sa budú všetky zhodovať, trojuholníky budú podobne:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{2.4}}{2} = \frac{2.\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{\sqrt{50}}{5} = \frac{\sqrt{2.25}}{5} = \frac{5.\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$$

$$\frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{\sqrt{32}}{4} = \frac{\sqrt{2.16}}{4} = \frac{4.\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

- trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú podobné

Pr.

Z dvoch podobných trojuholníkov má jeden obvod 100 a druhý má dĺžky strán postupne o $8,14,18$ dlhšia ako prvý. Vypočítajte dĺžky strán oboch trojuholníkov:

$o = 100$ $\quad$ $o' = a' + b' + c' = a + 8 + b + 14 + c + 18 = o + 40$

$k = \frac{o'}{o} = \frac{140}{100} = 1,4$

$\frac{a'}{a} = \frac{a+8}{a} = 1,4$ $\quad$ $0,4 = \frac{8}{a}$ $\quad$ $a = 20 \ldots a' = 28$

$\frac{b'}{b} = \frac{b+14}{b} = 1,4$ $\quad$ $0,4 = \frac{14}{b}$ $\quad$ $b = 35 \ldots a' = 49$

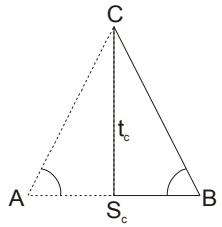
$\frac{c'}{c} = \frac{c+18}{c} = 1,4$ $\quad$ $0,4 = \frac{18}{c}$ $\quad$ $c = 45 \ldots c' = 63$

- <u>vety o stranách a uhloch v trojuholníkoch</u>

<u>Veta</u>

V každom trojuholníku proti zhodným stranám ležia zhodné uhly.

Dôkaz



$$AS_c \cong BS_c \wedge AC \cong BC \wedge S_cC \cong S_cC$$
$$\Downarrow (sss)$$
$$\Delta AS_cC \cong \Delta BS_cC$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle A \cong \measuredangle B$$

<u>Veta</u>

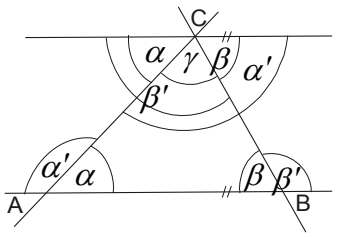
V každom trojuholníku proti zhodným uhlom ležia zhodné strany.

<u>Veta</u>

V každom trojuholníku proti väčšej (menšej) strane leží väčší (menší) uhol.

<u>Veta</u>

V každom trojuholníku proti väčšiemu (menšiemu) uhlu leží väčšia (menšia) strana.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\alpha' = 180° - \alpha \qquad \beta' = 180° - \beta \qquad \gamma' = 180° - \gamma$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma = 540° - (\alpha + \beta + \gamma) = 360°$$
$$\alpha' = \beta + \gamma \rightarrow \alpha' > \beta, \alpha' > \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma \rightarrow \beta' > \alpha, \beta' > \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta \rightarrow \gamma' > \alpha, \gamma' > \beta$$

<u>Veta</u>

V každom trojuholníku je súčet veľkostí vnútorných uhlov 180°.

<u>Veta</u>

Vonkajší uhol trojuholníka sa rovná súčtu vnútorných uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch.

<u>Veta</u>

Súčet vonkajších uhlov trojuholníka pri rôznych vrcholoch je 360°.

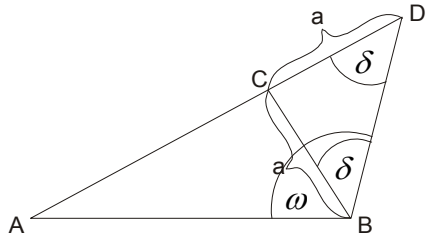
<u>Veta</u>

Vonkajší uhol trojuholníka je väčší ako vnútorný uhol pri inom vrchole.

<u>Veta</u> (trojuholníková nerovnosť)

Súčet dvoch strán trojuholníka je väčší ako tretia strana.

Dôkaz



$$\omega > \delta$$
$$|AD| > |AB|$$
$$|AC| + |CD| > |AB|$$
$$|AC| + |BC| > |AB|$$

<u>Veta</u> (trojuholníková nerovnosť)

Rozdiel dvoch strán trojuholníka je menší ako tretia strana.

<u>Pr.</u>

Pre vnútorné uhly ΔABC platí: $\alpha = 2\beta, \beta = 3\gamma$. Určite ich:

$$\alpha = 2\beta = 6\gamma, \beta = 3\gamma, \gamma$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$6\gamma + 3\gamma + \gamma = 180°$$
$$10\gamma = 180° \qquad \gamma = 18° \qquad \beta = 54° \qquad \alpha = 108°$$

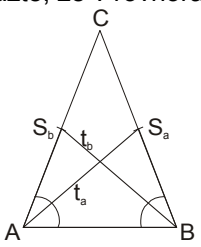
<u>Pr.</u>

Pre vonkajšie uhly ΔABC platí: $\alpha' : \beta' : \gamma' = 5:7:8$. Určite vnútorné uhly:

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = 5:7:8$$
$$\alpha' = 5x, \beta' = 7x, \gamma' = 8x$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$
$$5x + 7x + 8x = 360°$$
$$20x = 360°$$
$$x = 18° \qquad \alpha' = 90° \qquad \beta' = 126° \qquad \gamma' = 144°$$
$$\alpha = 180° - \alpha' = 90° \qquad \beta = 180° - \beta' = 54° \qquad \gamma = 180° - \gamma' = 36°$$

<u>Pr.</u>

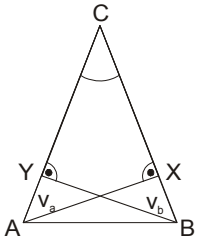
Dokážte, že v rovnoramennom trojuholníku sú ťažnice na ramená zhodné:



$$AB \cong BA \wedge AS_b \cong BS_a \wedge \measuredangle BAS_b \cong \measuredangle ABS_a$$
$$\Downarrow (sus)$$
$$\Delta ABS_b \cong \Delta BAS_a$$
$$\Downarrow$$
$$BS_b = t_b \cong AS_a = t_a$$

<u>Pr.</u>

Dokážte, že v rovnoramennom trojuholníku sú výšky na ramená zhodné:

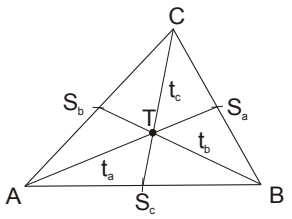


$$AC \cong BC \wedge \measuredangle BYC \cong \measuredangle AXC \wedge \measuredangle ACX \cong \measuredangle BCY$$
$$\Downarrow (usu)$$
$$\Delta AXC \cong \Delta BYC$$
$$\Downarrow$$
$$AX = v_a \cong BY = v_b$$

Pr.

Dokážte, že v každom ΔABC platí:

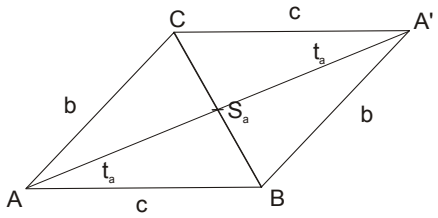
a) $t_a < \frac{a+b+c}{2}$



- z ΔAS_aC, využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $b+\frac{a}{2} > t_a$ a z ΔAS_aB máme: $c+\frac{a}{2} > t_a$

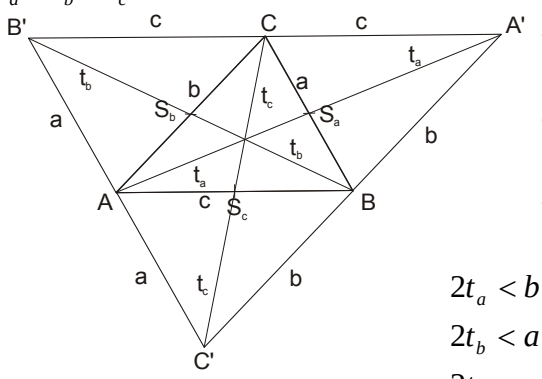
$$b+\tfrac{a}{2} > t_a$$
$$c+\tfrac{a}{2} > t_a$$
$$a+b+c > 2t_a$$
$$t_a < \tfrac{a+b+c}{2}$$

b) $t_a < \frac{b+c}{2}$



- z $\Delta ABA'$, využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $2t_a < b+c$ a odtiaľ dostávame: $t_a < \frac{b+c}{2}$

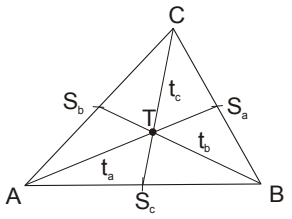
c) $t_a + t_b + t_c < a+b+c$



- z $\Delta ACA'$, využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $2t_a < b+c$
- z $\Delta BAB'$, využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $2t_b < a+c$
- z $\Delta CBC'$, využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $2t_c < a+b$

$$2t_a < b+c$$
$$2t_b < a+c$$
$$2t_c < a+b$$
$$2(t_a+t_b+t_c) < 2(a+b+c)$$
$$t_a+t_b+t_c < a+b+c$$

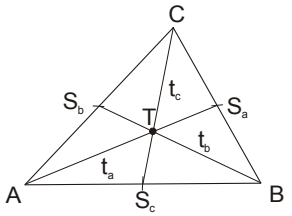
d) $t_a + t_b + t_c > \frac{a+b+c}{2}$



- z ΔABS_a, využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $t_a + \frac{a}{2} > c$
- z ΔBCS_b, využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $t_b + \frac{b}{2} > a$
- z ΔACS_c, využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $t_c + \frac{c}{2} > b$

$$t_a + \tfrac{a}{2} > c$$
$$t_b + \tfrac{b}{2} > a$$
$$t_c + \tfrac{c}{2} > b$$
$$t_a+t_b+t_c + \tfrac{a+b+c}{2} > a+b+c$$
$$t_a+t_b+t_c > \tfrac{a+b+c}{2}$$

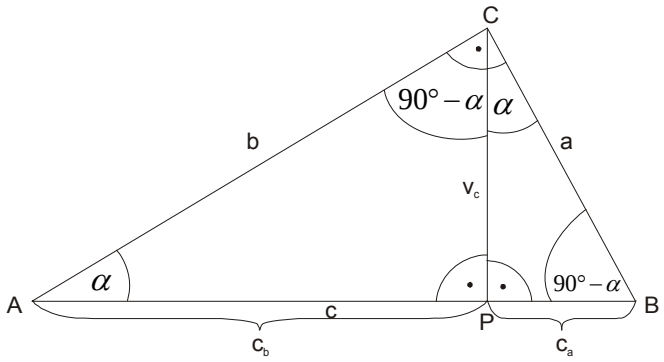
e) $4(t_a + t_b + t_c) > 3(a + b + c)$



- z ΔBTC , využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $a < \frac{2}{3}(t_b + t_c)$
- z ΔATC , využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $b < \frac{2}{3}(t_a + t_c)$
- z ΔATB , využitím trojuholníkovej nerovnosti máme: $c < \frac{2}{3}(t_a + t_b)$

$$a < \tfrac{2}{3}(t_b + t_c)$$
$$b < \tfrac{2}{3}(t_a + t_c)$$
$$c < \tfrac{2}{3}(t_a + t_b)$$
$$\tfrac{4}{3}(t_a + t_b + t_c) > (a + b + c)$$
$$4(t_a + t_b + t_c) > 3(a + b + c)$$

- <u>Euklidove vety a Pytagorova veta</u>



c_a … úsek na prepone prislúchajúci odvesne a

c_b … úsek na prepone prislúchajúci odvesne b

<u>Veta</u> (Euklidova veta o výške)

V každom pravouhlom trojuholníku ABC platí: ak je pravý uhol pri vrchole C , tak $v_c^{\ 2} = c_a.c_b$.

$(\forall\ \Delta ABC : \measuredangle C \cong R \Rightarrow v_c^{\ 2} = c_a.c_b)$

Dôkaz

$$\Delta APC \overset{(uu)}{\approx} \Delta CPB$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{|CP|}{|AP|} = \frac{|BP|}{|CP|} \qquad \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \qquad v_c^{\ 2} = c_a.c_b$$

$$\boxed{v_c^{\ 2} = c_a.c_b}$$

<u>Veta</u> (Euklidova veta o odvesne)

V každom pravouhlom trojuholníku ABC platí: ak je pravý uhol pri vrchole C , tak $a^2 = c.c_a \wedge b^2 = c.c_b$.

$(\forall\ \Delta ABC : \measuredangle C \cong R \Rightarrow a^2 = c.c_a \wedge b^2 = c.c_b)$

Dôkaz

$$\Delta ABC \overset{(uu)}{\approx} \Delta ACP \qquad \Delta ABC \overset{(uu)}{\approx} \Delta CBP$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AP|}{|AC|} \qquad \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BP|}{|BC|}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{c_b}{b} \qquad \frac{a}{c} = \frac{c_a}{a}$$

$$b^2 = c.c_b \qquad a^2 = c.c_a$$

$$\boxed{a^2 = c.c_a} \qquad \boxed{b^2 = c.c_b}$$

<u>Veta</u> (Pytagorova veta)

V každom pravouhlom trojuholníku ABC platí: ak je pravý uhol pri vrchole C, tak $a^2 + b^2 = c^2$.

$(\forall\ \Delta ABC : \measuredangle C \cong R \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2)$

Dôkaz

- využijeme Euklidovu vetu o odvesne:

$$a^2 + b^2 = c.c_a + c.c_b = c.\underbrace{(c_a + c_b)}_{c} = c^2$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

<u>Pr.</u>

V trojuholníku ABC je $\gamma = 90°, v_c = 6, c_b = 3$. Určite strany trojuholníka:

$$v_c{}^2 = c_a.c_b \qquad c_a = \frac{v_c{}^2}{c_b} = 12 \qquad c = c_a + c_b = 12 + 3 = 15$$

$$b^2 = v_c{}^2 + c_b{}^2 = 45 \qquad b = \sqrt{45} = 3.\sqrt{5}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = 180 \qquad a = \sqrt{180} = 6.\sqrt{5}$$

<u>Pr.</u>

V trojuholníku ABC je $\gamma = 90°, c_a = 2, c_b = 5$. Určite strany trojuholníka:

$$c = c_a + c_b = 7$$

$$a^2 = c.c_a = 14 \qquad a = \sqrt{14}$$

$$b^2 = c.c_b = 35 \qquad b = \sqrt{35}$$

- <u>obvod a plošný obsah trojuholníka</u>

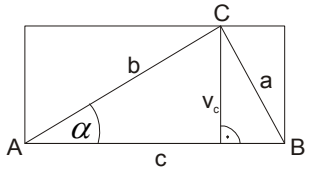
<u>Def.</u>

Obvod trojuholníka ABC je súčet veľkostí jeho strán.

$$\boxed{o = a + b + c}$$

<u>Def.</u>

Plošný obsah trojuholníka je veľkosť časti roviny, ktorá je ohraničená trojuholníkom.



- zrejmé, že zrejmé, že obsah trojuholníka je polovica obsahu obdĺžnika s rozmermi c, v_c, teda: $S = \frac{c.v_c}{2}$

> tak isto by sme dostali aj vzorce: $S = \frac{a.v_a}{2}$ a $S = \frac{b.v_b}{2}$

- ďalej platí: $\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$, teda $v_c = b.\sin\alpha$ a ak za v_c dosadíme do vzorca dostávame: $S = \frac{c.v_c}{2} = \frac{b.c.\sin\alpha}{2}$

> a podobne: $S = \frac{a.c.\sin\beta}{2}$ a $S = \frac{a.b.\sin\gamma}{2}$

- pre výpočet obsahu trojuholníka máme tri možnosti:

1. $S = \frac{a.v_a}{2}$, $S = \frac{b.v_b}{2}$, $S = \frac{c.v_c}{2}$

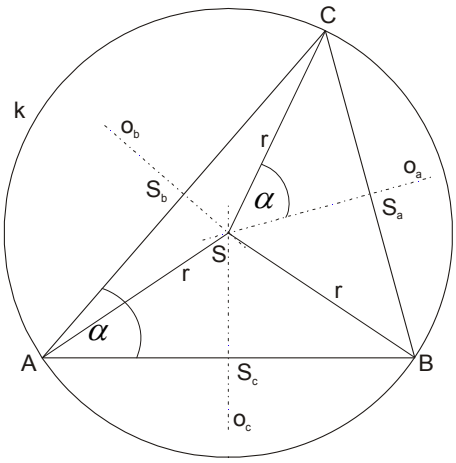
2. $S = \frac{a.b.\sin\gamma}{2}$, $S = \frac{a.c.\sin\beta}{2}$, $S = \frac{c.b.\sin\alpha}{2}$

3. Herónov vzorec

$S = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$

(s – semiperimeter dvojrozmerného simplexu)

- <u>kružnica trojuholníku opísaná</u>



- pre polomer kružnice opísanej platí:

$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{r}$

$\boxed{r = \frac{a}{2.\sin\alpha}}$

- podobne aj:

$\boxed{r = \frac{b}{2.\sin\beta}}$ a $\boxed{r = \frac{c}{2.\sin\gamma}}$

<u>Veta</u>

Osi strán každého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode S, ktorý je stredom kružnice k trojuholníku opísanej.

Dôkaz

- nech $S \in o_c \cap o_a$, potom platí:

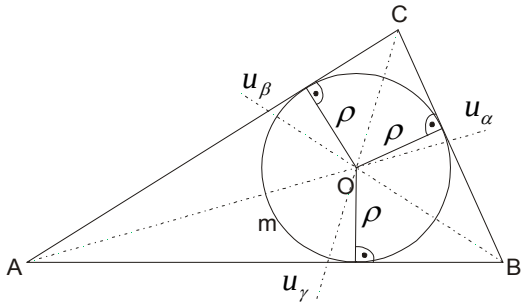
$$S \in o_c \wedge S \in o_a$$

$$|SA| = |SB| \wedge |SB| = |SC|$$

$$|SA| = |SC|$$

$$S \in o_b$$

- <u>kružnica trojuholníku vpísaná</u>



<u>Veta</u>

Osi uhlov každého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode O, ktorý je stredom kružnice m trojuholníku vpísanej.

Dôkaz

- nech $O \in u_\alpha \cap u_\beta$, potom platí:

$$O \in u_\alpha \wedge O \in u_\beta$$

$$\left|O, \overrightarrow{AC}\right| = \left|O, \overrightarrow{AB}\right| \wedge \left|O, \overrightarrow{AB}\right| = \left|O, \overrightarrow{BC}\right|$$

$$\left|O, \overrightarrow{AC}\right| = \left|O, \overrightarrow{BC}\right|$$

$$O \in u_\gamma$$

- pre polomer kružnice vpísanej trojuholníku platí:

$$S = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BCO} + S_{\Delta ACO}$$

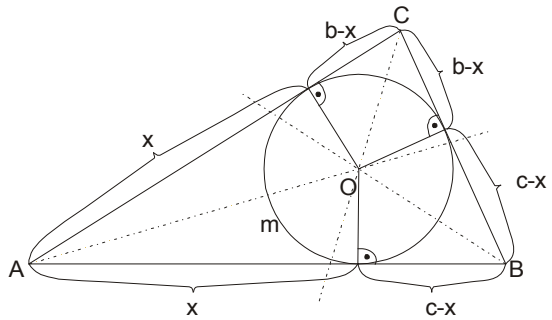
$$S = \tfrac{c\rho}{2} + \tfrac{a\rho}{2} + \tfrac{b\rho}{2}$$

$$S = \rho \tfrac{a+b+c}{2}$$

$$S = \rho . s$$

$$\boxed{\rho = \tfrac{S}{s}}$$

- alebo:



$$tg\,\tfrac{\alpha}{2} = \tfrac{\rho}{x}$$

$$\rho = x.tg\,\tfrac{\alpha}{2}$$

$$a = b - x + c - x$$

$$2x = b + c - a$$

$$x = \tfrac{b+c-a}{2} = \tfrac{b+c+a-2a}{2} =$$

$$= \tfrac{a+b+c}{2} - a = s - a$$

$$\boxed{\rho = (s-a).tg\,\tfrac{\alpha}{2}} \qquad \boxed{\rho = (s-b).tg\,\tfrac{\beta}{2}} \qquad \boxed{\rho = (s-c).tg\,\tfrac{\gamma}{2}}$$

- <u>sínusová a kosínusová veta</u>

- používame ich pri riešení trojuholníka
- riešiť trojuholník znamená určiť jeho strany a vnútorné uhly

> najčastejšie poznáme len niektoré údaje o trojuholníku a pomocou sínusovej, kosínusovej vety a ďalších poznatkov vieme určiť zvyšné

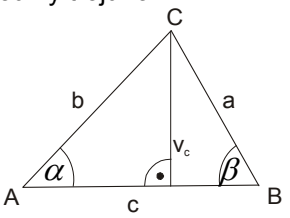
<u>Veta</u> (sínusová veta)

V každom trojuholníku ABC platí: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Dôkaz

- dôkaz si musíme rozdeliť na tri časti (ostrouhlý, tupouhlý a pravouhlý trojuholník):

1. ostrouhlý trojuholník

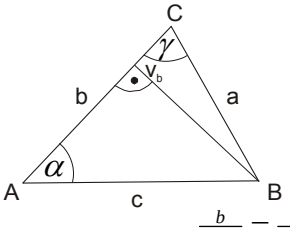


$\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$ $\sin\beta = \frac{v_c}{a}$

$v_c = b.\sin\alpha$ $v_c = a.\sin\beta$

$a.\sin\beta = b.\sin\alpha$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$



$\sin\alpha = \frac{v_b}{c}$ $\sin\gamma = \frac{v_b}{a}$

$v_b = c.\sin\alpha$ $v_b = a.\sin\gamma$

$a.\sin\gamma = c.\sin\alpha$

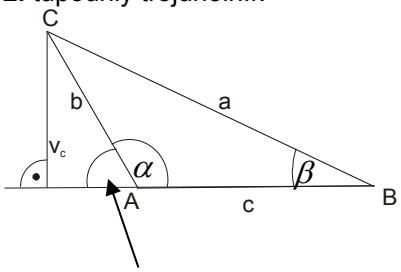
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \wedge \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

2. tupouhlý trojuholník



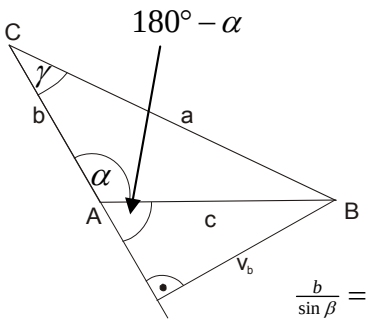
$\sin(180° - \alpha) = \frac{v_c}{b}$ $\sin\beta = \frac{v_c}{a}$

$v_c = b.\sin(180° - \alpha) = b.\sin\alpha$

$v_c = a.\sin\beta$

$a.\sin\beta = b.\sin\alpha$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$



$\sin(180° - \alpha) = \frac{v_b}{c}$ $\sin\gamma = \frac{v_b}{a}$

$v_b = c.\sin(180° - \alpha) = c.\sin\alpha$

$v_b = a.\sin\gamma$

$a.\sin\gamma = c.\sin\alpha$

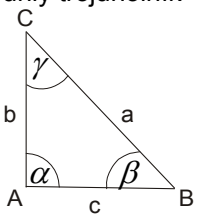
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \wedge \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

3. pravouhlý trojuholník



$$\alpha = 90^\circ \qquad \alpha = 90^\circ$$

$$\sin\beta = \tfrac{b}{a} \qquad \sin\gamma = \tfrac{c}{a}$$

$$\frac{\sin\beta}{1} = \frac{b}{a} \qquad \frac{\sin\gamma}{1} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \qquad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \wedge \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

- sínusovú vetu použijeme na riešenie trojuholníka, ak poznáme:
  a) dve strany a uhol oproti niektorej z nich
  b) stranu a ľubovoľné dva uhly

<u>Veta</u> (kosínusová veta)

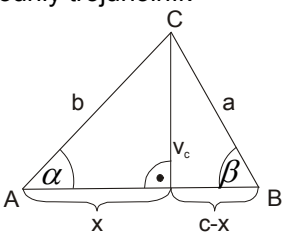
V každom trojuholníku ABC platí:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Dôkaz

- dôkaz si musíme rozdeliť na tri časti (ostrouhlý, tupouhlý a pravouhlý trojuholník):

1. ostrouhlý trojuholník



$$v_c^{\,2} = a^2 - (c-x)^2 \qquad \cos\alpha = \tfrac{x}{b}$$

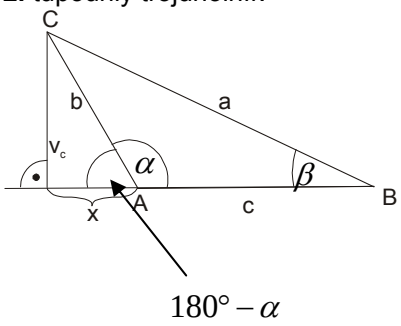
$$v_c^{\,2} = b^2 - x^2 \qquad x = b.\cos\alpha$$

$$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

2. tupouhlý trojuholník



$$v_c^{\,2} = a^2 - (c+x)^2$$

$$v_c^{\,2} = b^2 - x^2$$

$$a^2 - c^2 - 2cx - x^2 = b^2 - x^2$$

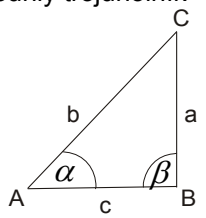
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \tfrac{x}{b}$$

$$x = b.\cos(180^\circ - \alpha) = -b.\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

3. pravouhlý trojuholník



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{c}{b} \qquad c = b\cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb\cos\alpha\cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b^2\cos^2\alpha = b^2 + c^2 - 2c^2$

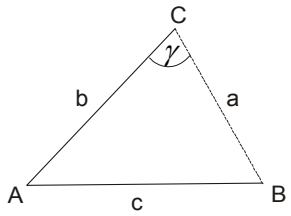
$a^2 = b^2 - c^2$ - čo podľa Pytagorovej vety platí

- dôkazy pre $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ a $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ sa spravia analogicky

- kosínusovú vetu použijeme na riešenie trojuholníka, ak poznáme:
  a) dve strany a uhol nimi zovretý
  b) tri strany (môžeme vypočítať ľubovoľný uhol)

Pr.

Riešte ΔABC, ak $b = 25, c = 25.\sqrt{2}, \gamma = 45°$:



$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.25}{25.\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\beta = 30° \quad \vee \quad \beta = 150°$

$\alpha = 105° \qquad \theta$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = 50.\sin 105°$

Pr.

Určite pomer strán v ΔABC, ak $\alpha : \beta : \gamma = 1:1:4$:

$\alpha = x, \beta = x, \gamma = 4x$

$180° = 6x \qquad x = 30° \qquad \alpha = 30°, \beta = 30°, \gamma = 120°$

$\frac{a}{b} = \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin 30°}{\sin 30°} = 1 \qquad a : b = 1:1$

$\frac{a}{c} = \frac{\sin a}{\sin\gamma} = \frac{\sin 30°}{\sin 120°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad a : c = 1 : \sqrt{3}$

$a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{3}$

Pr.

Riešte ΔABC, ak $a = 10, b = 15, \alpha : \beta = 1:2$:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha}$

$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$2\cos\alpha = \frac{3}{2} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{4} \qquad \alpha \doteq 41°, \beta \doteq 82°, \gamma \doteq 57°, c \doteq 12{,}7$

Pr.

Zistite, či ΔABC, kde $a = 4, b = 5, c = 6$ je ostrouhlý, tupouhlá, alebo pravouhlý:

- najväčší uhol bude proti najväčšej strane, teda bude to uhol γ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{16+25-36}{2.4.5} = \frac{5}{40} = 0{,}125$$

$\gamma \doteq 82° < 90°$ - je ostrouhlý

Pr.

Riešte ΔABC, ak $\alpha = 30°, b = 10, c = 5$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = 100 + 25 - 100\cos 30° = 125 - 50.\sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{125 - 50.\sqrt{3}} \doteq 6{,}19$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} \doteq 0{,}808 \quad \beta \doteq 54°, \gamma \doteq 96°$$

Neriešené úlohy

1. Dokážte, že súčin úsekov, ktoré na výškach trojuholníka určuje ortocentrum, je pre daný trojuholník konštantný.

2. Nech ΔABC je rovnostranný, $a = 4cm, M = A \div B$, P je päta kolmice z bodu M na BC. Vypočítajte obsah ΔABC.

3. V ΔABC je $t_a \perp t_b$. Vyjadrite veľkosť strany c pomocou a, b.

4. Dokážte, že v každom ΔABC, kde $\measuredangle C \cong R$, platí:

a) $a^2 - b^2 = c_a{}^2 - c_b{}^2$ b) $a^{-2} + b^{-2} = v_c{}^{-2}$ c) $a^2.b^2 = c^2.v_c{}^2$

5. V ΔABC, kde $\measuredangle C \cong R$, je $c = 20\,cm, v_c = 8\,cm$. Určite a, b.

6. Bod A má od kružnice $k(S, 4cm)$ vzdialenosť $10\,cm$. Vypočítajte vzdialenosť bodu S od spojnice bodov dotyku dotyčníc prechádzajúcich bodom A. Určite dĺžku tetivy určenej bodmi dotyku.

7. Obdĺžnik $ABCD$ má strany $a, \frac{a}{2}$. V akom pomere delí uhlopriečku BD kolmica na ňu z bodu A?

8. Riešte ΔABC, ak $a = 10\,cm, a : b = 2 : 3, \alpha : \beta = 1 : 2$.

9 Zistite, či ΔABC, kde $a = 4\,cm, b = 5\,cm, c = 6\,cm$, je ostrouhlý, pravouhlý alebo tupouhlý.

10. Dokážte, že os uhla delí protiľahlú stranu v pomere strán na jeho ramenách.

11. Dokážte, že v pravouhlom ΔABC s preponou c pre polomer vpísanej kružnice platí $\rho = \frac{a+b-c}{2}$.

12. Odvoďte vzorec pre výpočet ťažnice trojuholníka pomocou jeho strán.

13. V ΔABC**, je** $a = 13, b = 14, c = 15$**. Vypočítajte** $\alpha, \beta, \gamma, S, r, \rho$**.**

14. Riešte ΔABC**, ak poznáte:**

a) v_a, β, γ b) c, t_c, α c) a, v_a, t_a d) c, β, t_a

15. Dokážte, že ak v ΔABC **je** $\gamma = 45°$**, tak** $S = \frac{a^2+b^2-c^2}{4}$**.**

16. Je daný ΔABC **so stranami** $a = 4\,cm, b = 5\,cm, c = 6\,cm$**. Vypočítajte** v_a, t_b**.**

17. Z miesta M **sme videli vrchol veže pod výškovým uhlom** $30°$**. Keď sme sa priblížili k veži o** $30\,m$**, videli sme jej vrchol pod výškovým uhlom** $45°$**. Aká vysoká je veža?**

18. Z dvoch miest A, B **na vodorovnej rovine, vzdialených od seba** $3\,km$**, bol pozorovaný balón nad spojnicou oboch miest pod výškovými uhlami** $75°$ **a** $60°$**. Určite výšku balóna.**

19. Nad stranami ostrouhlého trojuholníka ABC **zostrojte zvonka štvorce** $ABEF$ **a** $ACGH$**. Dokážte, že** $CF \cong BH$**.**

20, Vrcholom C **trojuholníka** ABC **prechádza priamka** p **rovnobežná s osou uhla** β**, nech** $D \in p \cap \overleftrightarrow{AB}$**. Dokážte, že** $BD \cong BC$**.**

20. MNOHOUHOLNÍKY

1. Mnohouholníky:
- pojem n-uholníka, lomená čiara, uhlopriečky a ich počet
- súčet vnútorných uhlov, dôkaz
- opísaná a vpísaná kružnica pravidelnému n-uholníku a ich polomery

2. Štvoruholníky:
- konvexné a nekonvexné, tetivové a dotyčnicové
- druhy štvoruholníkov.

.....

- <u>mnohouholníky</u>

<u>Def.</u>

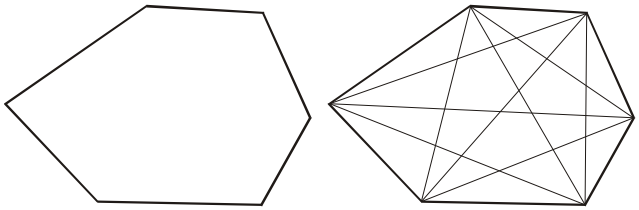
Mnohouholník (n-uholník) je časť roviny ohraničená uzavretou nesamopretínajúcou sa lomenou čiarou pozostávajúcou z n úsečiek, $n \in N, n \geq 3$.

<u>Def.</u>

Uhlopriečka mnohouholníka je každá spojnica nesusedných vrcholov mnohouholníka.

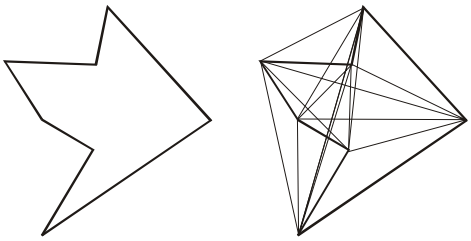
<u>Def.</u>

Konvexný mnohouholník je mnohouholník, ktorého uhlopriečky ležia vo vnútri mnohouholníka.



<u>Def.</u>

Nekonvexný mnohouholník je mnohouholník, ktorého uhlopriečky nemusia ležať v mnohouholníku a existuje aspoň jedna uhlopriečka ležiaca v mnohouholníku.



<u>Veta</u>

Každý n-uholník má práve $\frac{n.(n-3)}{2}$ uhlopriečok.

Dôkaz

- majme mnohouholník s n stranami, má aj n vrcholov
- je zrejmé, že vrchol nemôžeme spojiť sám so sebou a ďalej poľa definície uhlopriečky mnohouholníka, uhlopriečka spája nesusedné vrcholy, každý vrchol má dva susedné vrcholy, teda máme $n-1-2=n-3$ uhlopriečok
- ak je spojená vrchol A s vrcholom B máme jednu uhlopriečku a ak vrchol B s vrcholom A, tak máme druhú, ale tú istú, toto bude platiť pre hociktoré dva vrcholy, teda celkový počet musíme vydeliť dvomi a to je $\frac{n.(n-3)}{2}$

Pr.

Nájdite všetky mnohouholníky, ktoré majú rovnaký počet uhlopriečok ako hrán:

$$\frac{n.(n-3)}{2} = n$$

$$n^2 - 3n = 2n$$

$$n^2 - 5n = 0$$

$$(n-0)(n-5) = 0$$

$$n = 0 \quad \vee \quad n = 5$$

- platí to iba pre päťuholník

Veta

Súčet vnútorných uhlov každého konvexného n-uholníka je $(n-2).180°$.

Dôkaz

- majme konvexný n-uholník, zvoľme si vo vnútri bod X a pospájajme ho so všetkými vrcholmi, dostaneme tak n trojuholníkov (vieme, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je $180°$) a súčet uhlov bude $n.180°$
- súčet uhlov zo všetkých n trojuholníkov pri vrchole X bude $360°$, keďže sme bod pridali, tak tento súčet odrátame a dostávame: $n.180° - 360° = n.180° - 2.180° = (n-2).180°$

Pr.

Ktorý mnohouholník má súčet vnútorných uhlov medzi 7 000° a 8 000°:

$$7000 < (n-2).180 < 8000$$

$$38{,}9 < n - 2 < 44{,}4$$

$$40{,}9 < n < 46{,}4$$

$$n = 41, 42, 43, 44, 45, 46$$

- pravidelný n-uholník

Def.

n-uholník sa nazýva pravidelný, ak má zhodné všetky strany aj všetky vnútorné uhly.

Veta

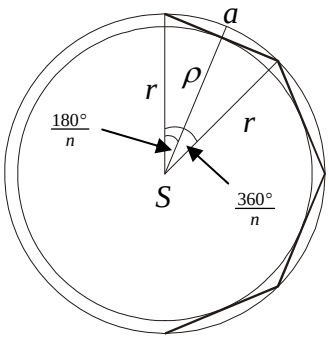
Vnútorný uhol pravidelného n-uholníka má veľkosť $\frac{(n-2).180°}{n}$.

Dôkaz

- súčet uhlov je $(n-2).180°$ a keďže uhlov je n (sú rovnaké), tak jeden má veľkosť $\frac{(n-2).180°}{n}$

Veta

Osi strán aj osi uhlov pravidelného n-uholníka sa pretínajú v jednom bode, ktorý je stredom kružnice vpísanej aj opísanej pravidelnému n-uholníku.



- poznáme n (počet strán) a a (dĺžka strany), potom platí:

$\sin\frac{180°}{n} = \frac{a}{2r}$ a odtiaľ: $\boxed{r = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}}$

$\mathrm{tg}\frac{180°}{n} = \frac{a}{2\rho}$ a odtiaľ: $\boxed{\rho = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}}$

- obsah pravidelného n-uholníka môžeme vypočítať takto:
  > osi uhlov nám rozdelia n-uholník na zhodné trojuholníky a pre ich obsah bude platiť:

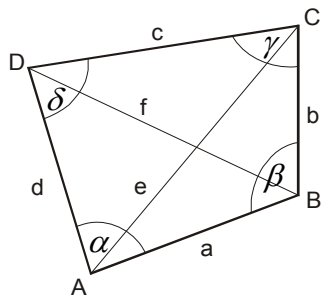
  $S_\Delta = \frac{\rho.a}{2} = \frac{a^2}{4.\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$ alebo $S_\Delta = \frac{r^2.\sin\frac{360°}{n}}{2}$, keďže trojuholníkov je n, tak pre obsah n-uholníka platí:

$$\boxed{S_n = \frac{n.a^2}{4.\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}} \qquad \boxed{S_n = \frac{n.r^2.\sin\frac{360°}{n}}{2}}$$

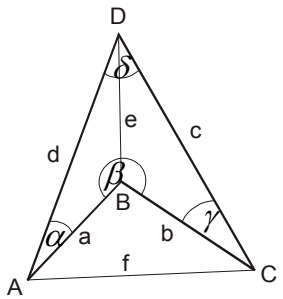
- <u>štvoruholníky</u>

<u>Def.</u>

Štvoruholník je časť roviny ohraničená uzavretou nesamopretínajúcou sa lomenou čiarou pozostávajúcej zo štyroch úsečiek.



konvexný



nekonvexný

<u>Veta</u>

Súčet vnútorných uhlov štvoruholníka je $360°$.

Dôkaz

- pre súčet uhlov v mnohouholníku platí: $(n-2).180°$
- majme štvoruholník, čiže $n = 4$, potom súčet uhlov je $(4-2).180° = 2.180° = 360°$

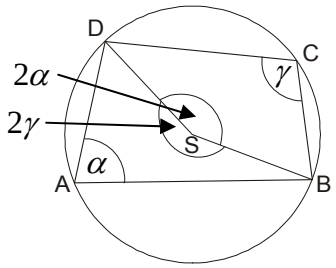
<u>Def.</u>

Štvoruholník, ktorému sa dá opísať kružnica sa nazýva tetivový.

<u>Veta</u>

Konvexný štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď $\alpha + \gamma = 180°$.

Dôkaz



- α je obvodový uhol kružnicového oblúku $BD; C \in BD$, potom stredový uhol, prislúchajúci tomu istému oblúku je 2α
- γ je obvodový uhol kružnicového oblúku $BD; A \in BD$, potom stredový uhol, prislúchajúci tomu istému oblúku je 2γ
- ako vidno z obrázku, platí: $2\alpha + 2\gamma = 360°$ a teda po vydelení dvomi dostávame $\alpha + \gamma = 180°$

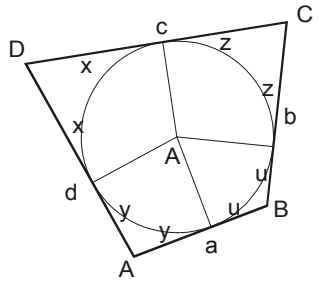
Def.

Štvoruholník, ktorému sa dá vpísať kružnica sa nazýva dotyčnicový.

Veta

Konvexný štvoruholník je dotyčnicový práve vtedy, keď $a + c = b + d$.

Dôkaz



$$a + c = y + u + x + z = u + x + y + z$$
$$b + d = u + z + x + y = u + x + y + z$$
$$a + c = b + d$$

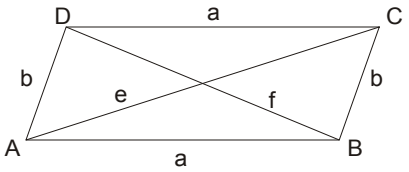
- štvoruholníky môžeme rozdeliť takto:

štvoruholníky
- konvexné
  - rovnobežníky
    - pravouholníky
      - štvorce
      - obdĺžniky
    - kosouholníky
      - kosoštvorce
      - kosodĺžniky
  - lichobežníky
  - rôznobežníky (deltoid)
- nekonvexné

- <u>rovnobežník</u>

Def.

Rovnobežník je štvoruholník, ktorý má dve dvojice protiľahlých strán rovnobežné.

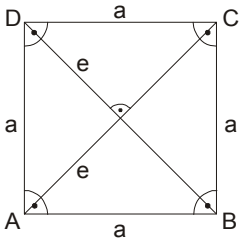


- protiľahlé strany sú zhodné
- protiľahlé uhly sú zhodné
- uhlopriečky sa rozpoľujú

- <u>štvorec</u>

Def.

Štvorec je rovnobežník, ktorý má všetky strany zhodné a aspoň jeden uhol pravý.



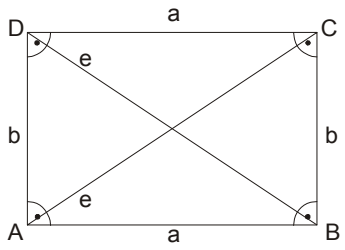
- všetky vnútorné uhly sú pravé
- je tetivový
- je dotyčnicový
- uhlopriečky sú na seba kolmé, sú zhodné a sú osami vnútorných uhlov

$$S = a^2$$
$$o = 4a$$

- <u>obdĺžnik</u>

<u>Def.</u>

Obdĺžnik je rovnobežník, ktorý nemá susedné strany zhodné a má aspoň jeden uhol pravý.



- všetky vnútorné uhly sú pravé
- je tetivový
- nie je dotyčnicový
- uhlopriečky sú zhodné, nie sú kolmé a nie sú osami uhlov

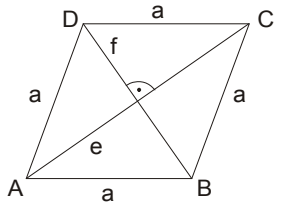
$S = a.b$

$o = 2(a+b)$

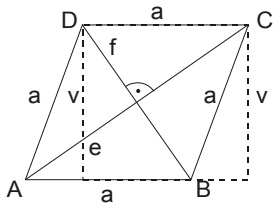
- <u>kosoštvorec</u>

<u>Def.</u>

Kosoštvorec je rovnobežník, ktorý má všetky strany zhodné a žiadny uhol nie je pravý.



- nie je tetivový
- je dotyčnicový
- uhlopriečky nie sú zhodné, sú kolmé a sú osami vnútorných uhlov



1.

$S = a.v$

$\sin\alpha = \frac{v}{a}$

$v = a.\sin\alpha$

$S = a^2.\sin\alpha$

2.

$S = 4.S_\Delta$

$S_\Delta = \frac{e.f}{8}$

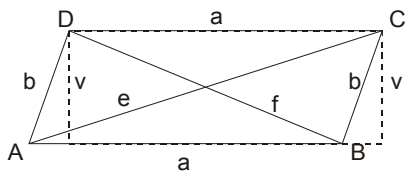
$S = \frac{e.f}{2}$

$o = 4a$

- <u>kosodĺžnik</u>

<u>Def.</u>

Kosodĺžnik je rovnobežník, ktorý nemá susedné strany zhodné a žiadny uhol nie je pravý.



- protiľahlé strany sú zhodné
- protiľahlé uhly sú zhodné
- uhlopriečky sa rozpoľujú

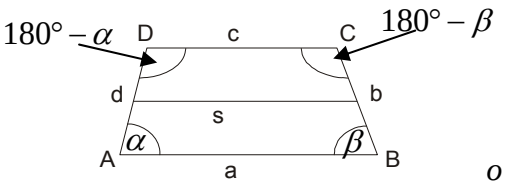
$S = a.v = a.b.\sin\alpha$

$o = 2(a+b)$

- <u>lichobežník</u>

<u>Def.</u>

Lichobežník je konvexný štvoruholník, ktorý má jednu dvojicu protiľahlých strán rovnobežnú a druhú rôznobežnú.



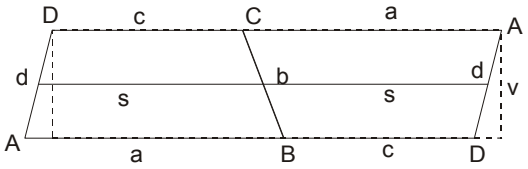
a, c … základne

b, d … ramená

$s = \frac{a+c}{2}$ … stredná priečka

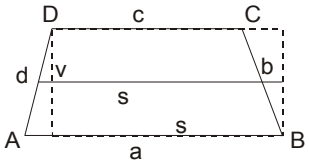
$o = a + b + c + d$

1.



$S = \frac{a+c}{2}.v$

2.

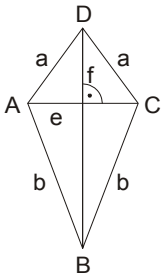


$S = s.v$

- <u>deltoid</u>

<u>Def.</u>

Deltoid je konvexný štvoruholník, ktorý má práve dve dvojice susedných strán zhodné a žiadnu dvojicu protiľahlých strán, ktoré sú zhodné.



- uhlopriečky sú na seba kolmé, rozpoľujú sa a nie sú zhodné

$S = \frac{e.f}{2}$

$o = 2(a+b)$

<u>Neriešené úlohy</u>

1. Ktorý mnohouholník má práve 20 uhlopriečok?

2. Koľko uhlopriečok má pravidelný mnohouholník, ak všetky jeho vnútorné uhly majú veľkosť 144°?

3. Odvoďte vzorec pre polomer opísanej a vpísanej kružnice pravidelnému n-uholníku so stranou a.

4. Odvoďte vzorec pre obsah a obvod pravidelného n-uholníka, ktorému je opísaná kružnica s polomerom r.

5. Pravidelný mnohouholník má 2,5-krát viac uhlopriečok ako strán, polomer opísanej kružnice je r. Vypočítajte jeho obsah.

6. Koľko najviac ostrých uhlov môže mať konvexný n-uholník?

7. Dokážte, že tetivový štvoruholník je svojimi uhlopriečkami rozdelený na dve dvojice podobných trojuholníkov.

8. Uhlopriečky deltoidu sú v pomere $3:4$, obsah je $S = 96\,cm^2$. Určite dĺžky strán deltoidu, ak jedna uhlopriečka pretína druhú v troch osminách dĺžky.

9. Dokážte, že v rovnobežníku so stranami a, b, uhlopriečkami e, f a ostrým uhlom α, platí:

a) $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ b) $e^2 - f^2 = 4ab\cos\alpha$

10. Dokážte, že uhlopriečky konvexného štvoruholníka ABCD sú na seba kolmé práve vtedy, keď $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

11. Lichobežník, ktorému možno vpísať kružnicu, má obsah S a obvod o. Určite polomer vpísanej kružnice.

12. Dokážte, že v každom štvoruholníku sú stredy strán vrcholmi rovnobežníka.

13. Vypočítajte obsah rovnoramenného lichobežníka, ktorého základne sú 22 cm a 12 cm a výška je o 1 cm menšia ako rameno.

14. Je daný lichobežník so základňami 5 cm a 3 cm, s ramenami 1 cm a 2 cm. Vypočítajte jeho výšku, obsah a uhlopriečky.

15. Dokážte, že v lichobežníku so základňami a, c, ramenami b, d a uhlopriečkami e, f platí:
$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$.

16. Aký je rozdiel obsahov lichobežníkov, ktoré vzniknú z lichobežníka so základňami a, b a výškou v, jeho rozdelením strednou priečkou?

17. Ramená lichobežníka ABCD majú dĺžky 6 = 5 cm, d = 3 cm. Do lichobežníka je možné vpísať kružnicu. Stredná priečka delí lichobežník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 11:5.
a) Určite dĺžky základní lichobežníka ABCD
b) Vypočítajte obsah lichobežníka ABCD

21. GEOMETRICKÉ ZOBRAZENIA

1. Základné pojmy
- definícia geometrického zobrazenia
- samodružný bod, samodružný útvar
- obraz útvaru

2. Zhodné zobrazenia
- definícia zhodného zobrazenia a jeho vlastnosti
- druhy zhodných zobrazení a ich vlastnosti
- skladanie zhodných zobrazení
- zhodnosť útvarov

3. Podobné zobrazenia
- definícia podobného zobrazenia a jeho vlastnosti
- rovnoľahlosť a jej vlastnosti
- ako vznikne podobné zobrazenie
- podobnosť útvarov

.....

Def.

Geometrické zobrazenie v rovine ρ je predpis, ktorý každému bodu roviny priradí práve jeden bod roviny.

$$F : A \mapsto A' \quad \dots \quad A' = F(A)$$

A … vzor $\qquad$ A' … obraz

Def.

Bod A sa nazýva samodružný (invariantný) bod zobrazenia F, ak $F(A) = A$.

Def.

Útvar U sa nazýva samodružný (invariantný) útvar zobrazenia F, ak $F(U) = U$.

- obraz útvaru U v geometrickom zobrazení je útvar U', ktorý je s útvarom U zhodný (**zhodné zobrazenie**) alebo útvar podobný (**podobné zobrazenie**)

- zhodné zobrazenia

Def.

Zobrazenie F v rovine ρ sa nazýva zhodné, ak pre každé dva body A, B a ich obrazy A', B' platí: $|AB| = |A'B'|$.

- zhodné zobrazenie **zachováva vzdialenosť**

Veta

Obrazom úsečky v zhodnom zobrazení je úsečka s ňou zhodná.

Dôkaz

- zhodné zobrazenie zachováva vzdialenosť a majme úsečku AB
- je zrejmé, že platí: $\forall X \in AB : |AX| + |XB| = |AB|$, potom pre obrazy bodov (A, B, X) A', B', X' bude platiť: $|A'X'| + |X'B'| = |A'B'|$, to znamená, že $X' \in A'B'$ a teda úsečka AB je zhodná s úsečkou $A'B'$

- podobnou úvahou sa dajú dokázať aj nasledovné vety:

Veta
Obrazom priamky v zhodnom zobrazení je priamka s ňou zhodná.

Veta
Obrazom uhla v zhodnom zobrazení je uhol s ním zhodný.

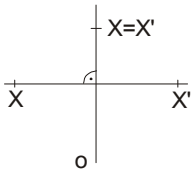
Veta
Obrazom kružnice v zhodnom zobrazení je kružnica s rovnakým polomerom.

- osová súmernosť

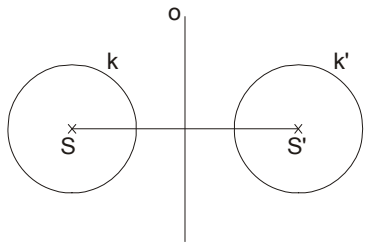
Def.
Osová súmernosť s osou o je zobrazenie v rovine, ktoré priradí:

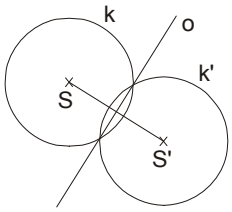
1. bodu $X \in o$, ten istý bod X
2. bodu $X \notin o$, bod X': $\overleftrightarrow{XX'} \perp o \wedge X \overset{\cdot}{-} X' \in o$

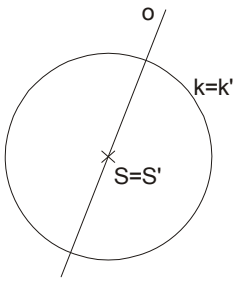
> označujeme ju značkou O_o

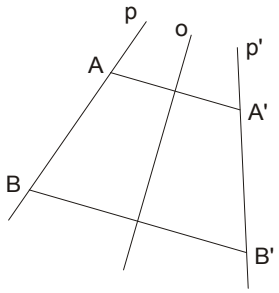


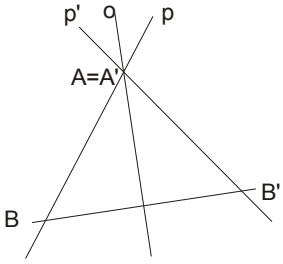
- uvedieme si pár príkladov osovej súmernosti:

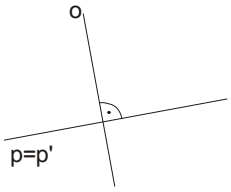
1.


2.


3.


4.


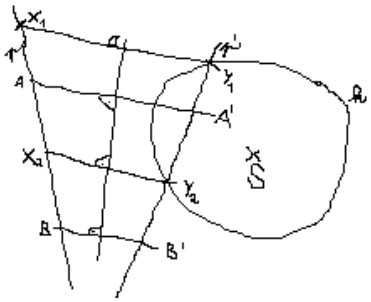
5.


6.


Pr.
Je daná priamka p, kružnica k a medzi nimi priamka o. Zostrojte všetky úsečky XY také, že platí $X \in k, Y \in p, \overleftrightarrow{XY} \perp o, X \overset{\cdot}{-} Y \in o$:

- budeme riešiť ako konštrukčnú úlohu (pozrite kapitolu D6)

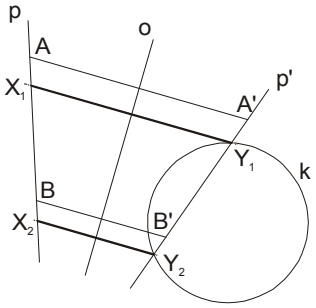
Rozbor:



$$Y = O_o(X)$$
$$X \in p \Rightarrow Y \in p' = O_o(p)$$
$$Y \in p' \wedge Y \in k$$
$$Y \in p' \cap k$$

Konštrukcia:

1. p'
2. $Y \in p' \cap k$
3. XY



Záver:

- úloha môže mať:
  1. 0 riešení $p' \cap k = \theta$
  2. 1 riešenie p' je dotyčnica k
  3. 2 riešenia p' je sečnica k

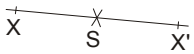
- <u>stredová súmernosť</u>

<u>Def.</u>

Stredová súmernosť so stredom S je zobrazenie v rovine, ktoré priradí:

1. bodu S, ten istý bod S
2. bodu $A \neq S$, bod A' : $S = A \div A'$

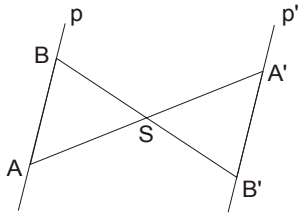
> označujeme ju S_S



<u>Veta</u>

Obrazom priamky v stredovej súmernosti je priamka s ňou rovnobežná.

Dôkaz



- ako vidno platí:

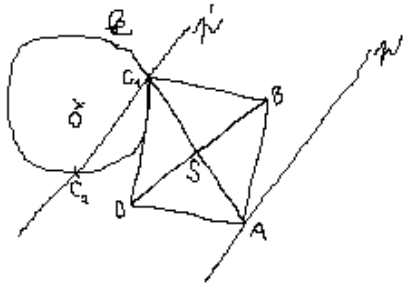
$$\measuredangle ASB \cong \measuredangle A'SB' \wedge |AS| = |A'S| \wedge |BS| = |B'S|$$
$$\Downarrow (sus)$$
$$\Delta ASB \cong \Delta A'SB'$$

- potom aj: $\measuredangle SAB \cong \measuredangle SA'B'$ a teda sú striedavé, čo znamená, že $p \parallel p'$

Pr.

Je daná priamka p, kružnica k a bod S. Zostrojte všetky štvorce $ABCD$ také, že $A \in p, C \in k$:

Rozbor:



$C = S_S(A)$

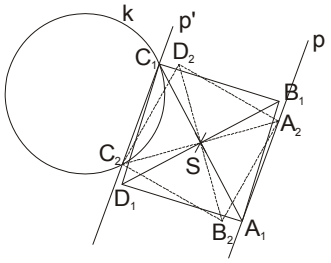
$A \in p \Rightarrow C \in p' = S_S(p)$

$C \in p' \wedge C \in k$

$C \in p' \cap k$

Konštrukcia:

1. p'
2. $C \in p' \cap k$
3. □ABCD



Záver:

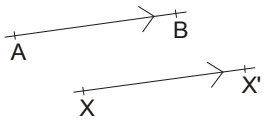
- úloha môže mať:
  1. 0 riešení $p' \cap k = \theta$
  2. 1 riešenie p' je dotyčnica k
  3. 2 riešenia p' je sečnica k

- <u>posunutie</u> (translácia)

<u>Def.</u>

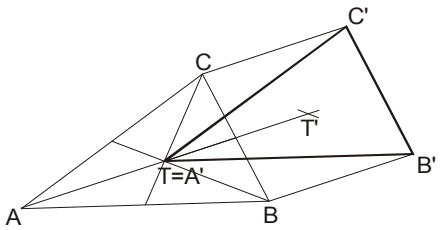
Posunutie určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ je zobrazenie v rovine, ktoré priradí ľubovoľnému bodu X roviny bod X' tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{XX'}$ a $\overrightarrow{AB}$ majú rovnakú veľkosť aj rovnaký smer.

> označujeme ho $T_{\overrightarrow{AB}}$



Pr.

Zostrojte obraz ΔABC v posunutí $T_{\overrightarrow{AT}}$, kde T je ťažisko trojuholníka:



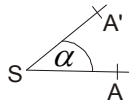
- <u>otáčanie</u> (rotácia)

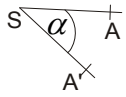
<u>Def.</u>

Otáčanie so stredom S o uhol α je zobrazenie v rovine, ktoré priradí:

1. bodu S, ten istý bod S
2. bodu $A \neq S$, bod A': $|SA'| = |SA| \wedge |\measuredangle ASA'| = \alpha$

> označujeme ho $R_{S,+\alpha}$, ak ide o otáčanie o uhol α v kladnom smere (proti smeru hodinových ručičiek), alebo $R_{S,-\alpha}$, ak ide o otáčanie o uhol α v zápornom smere (v smeru hodinových ručičiek)

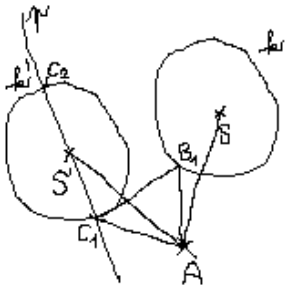




<u>Pr.</u>

Je daná priamka p, kružnica k a bod A. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC také, že $B \in k, C \in p$:

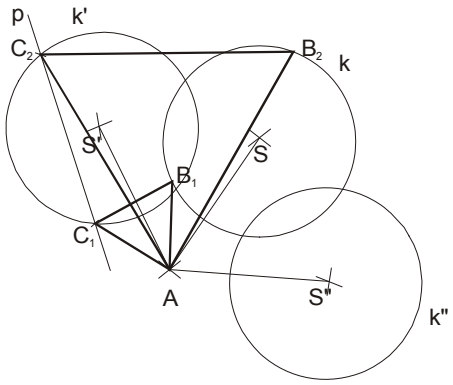
Rozbor:



$$C = R_{A,\pm 60^\circ}(B)$$
$$B \in k \Rightarrow C \in k' = R_{A,\pm 60^\circ}(k)$$
$$C \in k' \wedge C \in p$$
$$C \in k' \cap p$$

Konštrukcia:

1. k'
2. $C \in k' \cap p$
3. ΔABC



Záver:

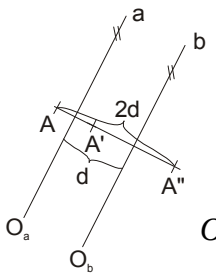
- úloha môže mať:

1. 0 riešení $p \cap k' = \theta \wedge p \cap k'' = \theta$
2. 1 riešenie p je dotyčnica k' a $p \cap k'' = \theta$
3. 2 riešenia p je sečnica k' a $p \cap k'' = \theta$
4. 3 riešenia p je sečnica k' a dotyčnica k''
5. 4 riešenia p je sečnica k' a sečnica k''

- <u>skladanie zhodných zobrazení</u>

- osová súmernosť je najdôležitejšie zhodné zobrazenie, pretože každé zhodné zobrazenie vznikne skladaním osových súmerností:

1. posunutie

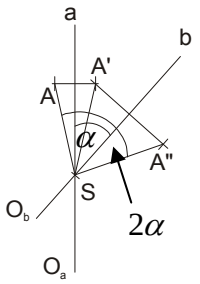


$O_b(O_a)(A) = A''$

- vznikne zložením dvoch osových súmerností s rovnobežnými osami

$O_b \circ O_a = O_b(O_a) = T; a \parallel b$

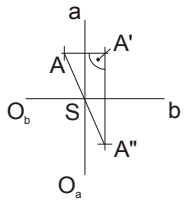
2. otáčanie



- vznikne zložením dvoch osových súmerností s rôznobežnými osami

$|\measuredangle a,b| = \alpha \ldots O_b \circ O_a = R_{S,2\alpha}$

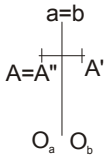
3. stredová súmernosť



- vznikne zložením dvoch osových súmerností s kolmými osami

$a \perp b \ldots O_b \circ O_a = S_S$

4. identita



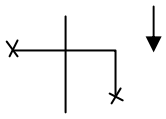
- vznikne zložením dvoch osových súmerností s totožnými osami

$a = b \ldots O_b \circ O_a = I$

<u>Veta</u>

Existujú len nasledujúce zhodné zobrazenia:

1. osová súmernosť
2. posunutie
3. otáčanie
4. stredová súmernosť
5. identita
6. posunutá súmernosť



<u>Def.</u>

Dva útvary U_1, U_2 sú zhodné, ak sa dá nájsť zhodné zobrazenie F také, že platí: $F(U_1) = U_2$.

- <u>podobné zobrazenia</u>

<u>Def.</u>

Zobrazenie F v rovine ρ sa nazýva podobné, ak existuje $k \in R^+$ také, že pre každé dva body A, B a ich obrazy A', B' platí: $k.|AB| = |A'B'|$.

- podobné zobrazenie **zachováva uhly**

Veta

Ak máme dva rôzne body A, B, tak aj ich obrazy A', B' budú v podobnom zobrazení rôzne.

Dôkaz

$$A \neq B \ldots |AB| > 0 \ldots |A'B'| = k.|AB| > 0 \ldots A' \neq B'$$

Veta

Obrazom úsečky v podobnom zobrazení je úsečka.

Veta

Obrazom priamky v podobnom zobrazení je priamka.

Veta

Obrazom uhla v podobnom zobrazení je uhol s ním zhodný.

Veta

Obrazom kružnice s polomerom r v podobnom zobrazení je kružnica s polomerom $k.r$.

- rovnoľahlosť (homotetia)

Def.

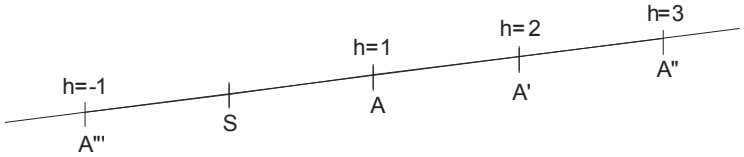
Rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom $h \neq 0$ je zobrazenie v rovine, ktoré priradí:

1. bodu S, ten istý bod S
2. bodu $A \neq S$, bod $A' : |SA'| = |h|.|SA|$, pričom platí:

a) $h > 0 \ldots A' \in \overrightarrow{SA}$

b) $h > 0 \ldots A' \in \overrightarrow{SA^x}$

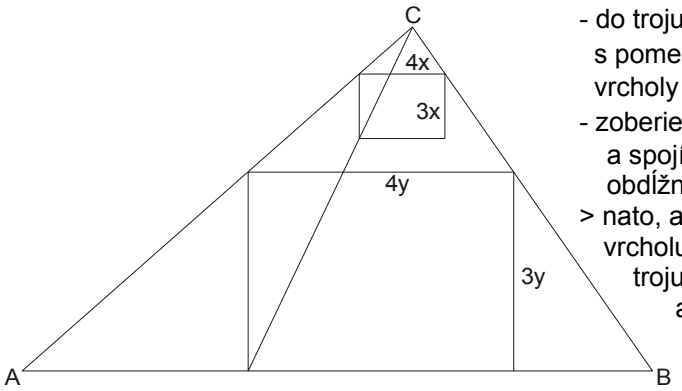
> označujeme ju $H_{S,h}$



Pr.

Je daný ΔABC. Vpíšte do neho obdĺžnik, ktorého stany sú v pomere $3:4$

- použijeme rovnoľahlosť



- do trojuholníka nakreslíme obdĺžnik s pomerom strán $3:4$, tak aby horné vrcholy ležali na stranách trojuholníka
- zoberieme si za stred rovnoľahlosti bod C a spojíme ho z ľavým spodným vrcholom obdĺžnika

> nato, aby sme zistili polohu ľavého dolného vrcholu obdĺžnika vpísaného do trojuholníka, nám stačí predĺžiť spojnicu a hľadaný bod bude ležať v priesečníku so stranou c

> máme jeden bod obdĺžnika a môžeme dokončiť celý obdĺžnik pomocou kolmíc

- každé **podobné zobrazenie vznikne zložením rovnoľahlosti a niektorého zhodného zobrazenia**, takto môžeme vytvárať rôzne podobné zobrazenia

Def.

Dva útvary U_1, U_2 sú podobné, ak sa dá nájsť podobné zobrazenie F také, že platí: $F(U_1) = U_2$.

Neriešené úlohy

1. Je daná priamka p a dva rôzne body A, B ležiace v jednej z polrovín určených priamkou p. Nájdite bod $P \in p$ tak, aby súčet $|AP| + |BP|$ bol minimálny.

2. Je daný konvexný uhol PVQ a v jeho vnútri bod A. Na ramenách uhla PVQ nájdite body B, C tak, aby ΔABC mal minimálny obvod.

3. Sú dané kružnice k, l pretínajúce sa v bodoch A, M. Zostrojte všetky rovnoramenné ΔABC tak, že $B \in k, C \in l, \alpha = 120°$.

4. Sú dané tri rôzne rovnobežky a, b, c a bod $A \in a$. Zostrojte všetky rovnostranné ΔABC tak, že $B \in b, C \in c$.

5. Sú dané dve kolmice a, b a bod C mimo nich. Zostrojte rovnoramenný ΔABC so základňou AB tak, že $A \in a, B \in b, \gamma = 45°$.

6. Zostrojte ΔABC, ak $a + b = 10, v_a = 3, c = 5$.

7. Sú dané dve pretínajúce sa kružnice. Jedným ich spoločným bodom zostrojte takú priamku, na ktorej určujú kružnice tetivy v pomere dĺžok $3:2$.

22. STEREOMETRIA

1. Základné pojmy
- axiomatický systém, primitívne pojmy, axiómy

2. Vzájomné polohy priamok a rovín
- dvoch priamok
- dvoch rovín
- priamky a roviny
- troch rovín

3. Rezy

4. Kolmosť
- kolmosť priamok
- kolmosť priamky a roviny
- kolmosť rovín

5. Vzdialenosti
- vzdialenosť bodov
- vzdialenosť bodu od priamky
- vzdialenosť bodu od roviny
- vzdialenosť dvoch útvarov

6. Uhly
- uhol dvoch priamok
- uhol priamky a roviny
- uhol dvoch rovín

……

- stereometria je geometria v priestore
- je tvorená axiomaticky, to znamená, že je založená na primitívnych pojmoch a axiómach

- <u>primitívne pojmy</u>

- sú to pojmy, ktoré považujeme za známe bez definície

1. primitívne objekty - **bod**, **priamka**, **rovina**
2. primitívne vzťahy - **zhodnosť** (uhlov, úsečiek), **leží na**, **leží v**, **leží medzi**

> ostatné pojmy sa definujú

- <u>axiómy</u>

- sú to vety, ktoré považujeme za pravdivé bez dôkazu (budeme ich označovať Veta(A))
- ostatné vety sa dokazujú

<u>Veta(A)</u>
Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna priamka.

<u>Veta(A)</u>
Na každej priamke sa nachádzajú aspoň dva rôzne body.

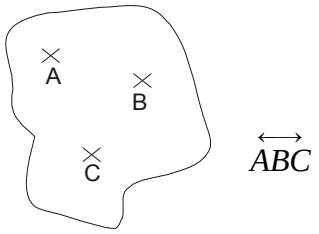
<u>Veta(A)</u>
Medzi každými dvoma rôznymi bodmi sa nachádza aspoň jeden bod.

<u>Veta(A)</u>
Existujú aspoň tri body neležiace na jednej priamke.

- body neležiace na jednej priamke sa nazývajú **nekolineárne** a body ležiace na jednej priamke sa nazývajú **kolineárne**

Veta(A)

Každými tromi nekolineárnymi bodmi je určená práve jedna rovina.

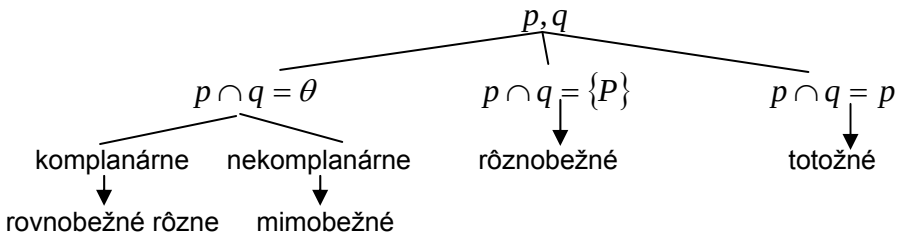


Veta(A)

Existujú aspoň štyri body neležiace v jednej rovine.

- body (priamky) neležiace v jednej rovine sa nazývajú **nekomplanárne** a body (priamky) ležiace v jednej rovine sa nazývajú **komplanárne**

- vzájomná poloha dvoch priamok v rovine



Def.

Priamky p, q sú rovnobežné ak sú totožné alebo ak $p \cap q = \theta$ a sú komplanárne.

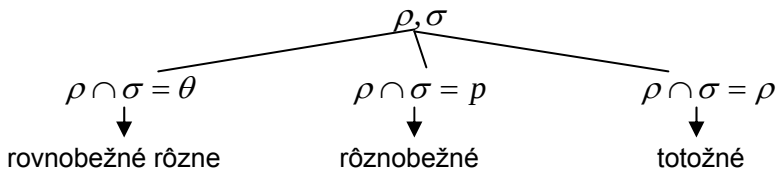
Def.

Priamky p, q sú rôznobežné ak $p \cap q = \{P\}$.

Def.

Priamky p, q sú mimobežné ak sú nekomplanárne

- vzájomná poloha dvoch rovín



Def.

Roviny ρ, σ sú rovnobežné ak sú totožné alebo nemajú spoločný bod.

Def.

Roviny ρ, σ sú rôznobežné ak ich prienikom je priamka (priesečnica rovín).

- <u>vzájomná poloha priamky a roviny</u>

p, ρ

- $p \cap \rho = \theta$ → rovnobežné
- $p \cap \rho = \{P\}$ → rôznobežné
- $p \cap \rho = p$ → rovnobežné

<u>Def.</u>

Priamka p je rovnobežná s rovinou ρ ak v nej leží alebo s ňou nemá spoločný bod.

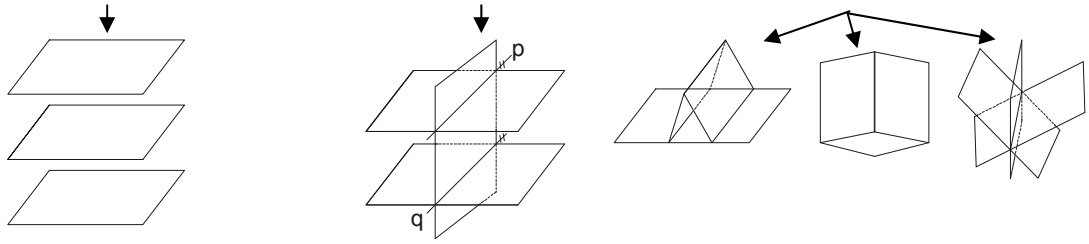
<u>Def.</u>

Priamka p je rôznobežná s rovinou ρ ak $p \cap \rho = \{P\}$.

- <u>vzájomná poloha troch rovín</u>

α, β, γ

- $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$
- $\alpha \parallel \beta \nparallel \gamma$
- $\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma$



- <u>rezy</u>

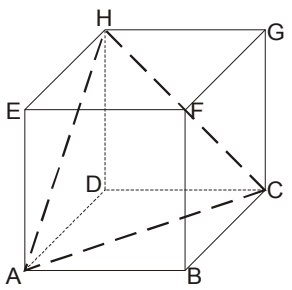
<u>Def.</u>

Rez telesa je prienik roviny a telesa. Pri jeho konštrukcii hľadáme prienik roviny so stenami telesa.

<u>Pr.</u>

Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou $\overleftrightarrow{ACH}$:

- zostrojíme si kocku:



- hľadáme prienik roviny so stenami kocky:

$\overleftrightarrow{ACH} \cap \overleftrightarrow{ADH} = \overleftrightarrow{AH}$

$\overleftrightarrow{ACH} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{AC}$

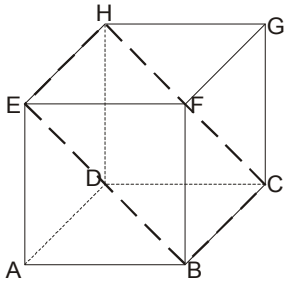
$\overleftrightarrow{ACH} \cap \overleftrightarrow{DCG} = \overleftrightarrow{CH}$

$A-H \cap \overleftrightarrow{ACH} = \Delta ACH$

Pr.

Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou $\overleftrightarrow{BCE}$:

- pri hľadaní priesečníc roviny s telesom môžeme postupovať tak, že body ktoré tvoria rovinu a ležia na hranách alebo stranách kocky spájame po jej stranách
- je dôležité aby sme si uvedomili, že ak máme dve rovnobežné roviny a sú preťaté treťou rovinou, tak priesečnice sú rovnobežné

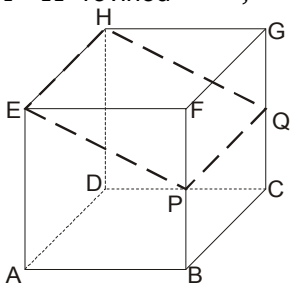


- spojíme: EB, BC , platí: $\overleftrightarrow{ABE} \parallel \overleftrightarrow{CDH}$,

  teda rovinou $\overleftrightarrow{CDH}$ z bodu C vedieme rovnobežku s EB , bude to CH a už len spojíme EH
- máme rez $BCHE$ kocky $A-H$

Pr.

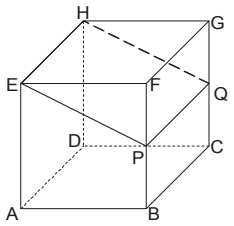
Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou $\overleftrightarrow{EHP}; P = B\overline{\cdot}F$:



- spojíme HE, EP , platí: $\overleftrightarrow{ABE} \parallel \overleftrightarrow{CDH}$,

  teda rovinou $\overleftrightarrow{CDH}$ z bodu H vedieme rovnobežku s EP , bude to HQ a už len spojíme PQ
- máme rez $EPQH$ kocky $A-H$

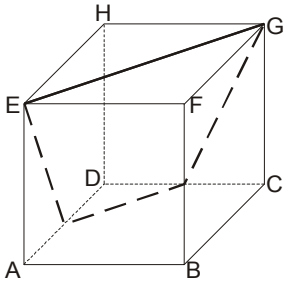
- rezy telesa budeme kresliť aj s viditeľnosťou, čiže ak je priesečnica vo viditeľnej stene, tak ju nakreslíme plnou čiarou a ak je v stene ktorú nevidíme, tak budeme kresliť prerušovanou
- takže pre predchádzajúci príklad bude rez nasledovný:



Pr.

Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou $\overleftrightarrow{RSG}; R = A\overline{\cdot}D, S = C\overline{\cdot}D$:

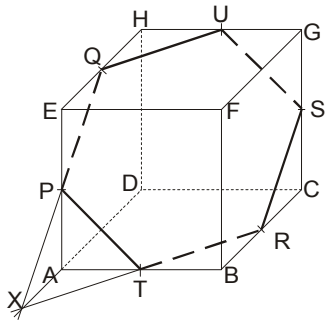
1. RS
2. SG
3. $EG \parallel RS$
4. ER
5. $RSGE$



Pr.

Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou $\overleftrightarrow{PQR}; P = A\bar{\cdot}E, Q = E\bar{\cdot}H, R = B\bar{\cdot}C$:

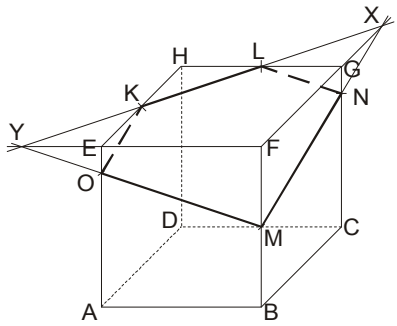
1. PQ
2. $RS \parallel PQ$
3. $X \in \overleftrightarrow{QP} \cap \overleftrightarrow{AD}$
   - aby sme našli priesečník roviny s hranou AB, tak predĺžime QP
4. $T \in \overleftrightarrow{XR} \cap \overleftrightarrow{AB}$
5. TR
6. PT
7. $QU \parallel TR$
8. US
9. $PTRSUQ$



Pr.

Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou $\overleftrightarrow{KLM}; K = E\bar{\cdot}H, L = G\bar{\cdot}H, M = B\bar{\cdot}F$:

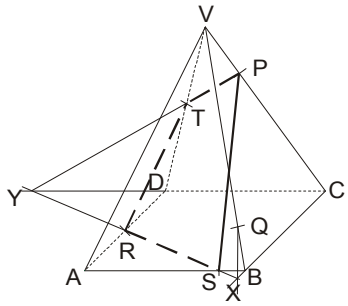
1. KL
2. $X \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{FG}$
3. $N \in \overleftrightarrow{MX} \cap \overleftrightarrow{CG}$
4. MN
5. $Y \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{EF}$
6. $O \in \overleftrightarrow{MY} \cap \overleftrightarrow{AE}$
7. MO
8. OK
9. $KLMNO$



Pr.

Zostrojte rez štvorbokého ihlana $ABCDV$ rovinou PQR, kde $R = A\bar{\cdot}D, Q \in VB$ (bližšie k B), $P \in CV$ (bližšie k V).

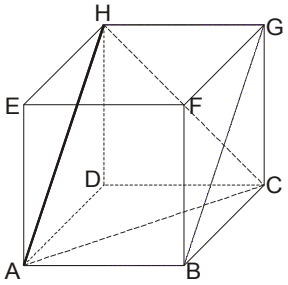
1. PQ
2. $X \in \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{BC}$
3. $S \in \overleftrightarrow{RX} \cap \overleftrightarrow{AB}$
4. QS
5. RS
6. $Y \in \overleftrightarrow{RS} \cap \overleftrightarrow{CD}$
7. $T \in \overleftrightarrow{YP} \cap \overleftrightarrow{DV}$
8. TP
9. TR
10. $RSQPT$



Pr.

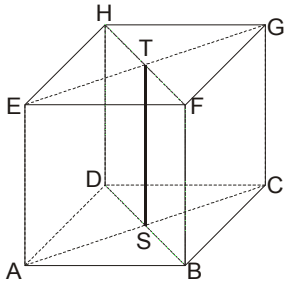
V kocke $A-H$ nájdite priesečnicu rovín:

a) $\overleftrightarrow{ACH}, \overleftrightarrow{ABG}$



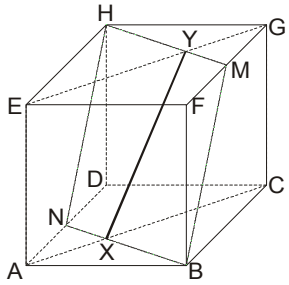
- je to AH

b) $\overleftrightarrow{ACG}, \overleftrightarrow{BDH}$



- je to $ST; S = A\bar{\cdot}C,$
$T = E\bar{\cdot}G$

c) $\overleftrightarrow{ACE}, \overleftrightarrow{HMB}; M = F\bar{\cdot}G$

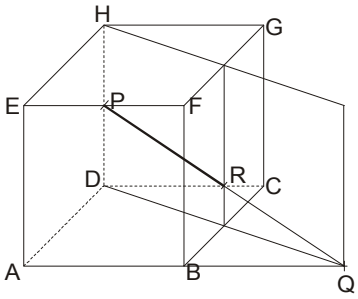


- je to $XY; X = AC \cap BN,$
$Y = EG \cap HM$

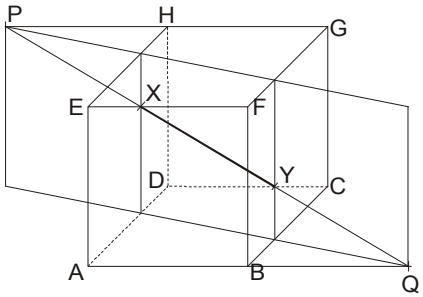
Pr.

Nájdite prienik kocky $A-H$ a priamky $\overleftrightarrow{PQ}$:

a) $P = D\bar{\cdot}H, B = A\bar{\cdot}Q$



b) $H = P\bar{\cdot}G, B = A\bar{\cdot}Q$



- <u>kolmosť priamok</u>

<u>Def.</u>

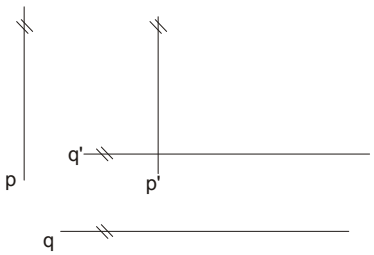
Dve priamky v rovine sú kolmé ak aspoň jeden uhol nimi určený je pravý.

<u>Def.</u>

Uhol je pravý ak je zhodný sa svojím susedným uhlom.

<u>Def.</u>

Priamky p, q sú kolmé práve vtedy, keď existujú priamky p', q' také, že platí:
$p \parallel p' \wedge q \parallel q' \wedge p \perp q$.



- <u>kolmosť priamky a roviny</u>

<u>Def.</u>

Priamka p je kolmá na rovinu ρ práve vtedy, keď je kolmá na každú priamku ležiacu v rovine ρ.

<u>Veta</u> (kritérium kolmosti priamky a roviny)

Priamka p je kolmá na rovinu ρ práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežky ležiace v rovine ρ.

- <u>kolmosť rovín</u>

<u>Def.</u>

Dve roviny sú na seba kolmé práve vtedy, keď jedna rovina obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu.

<u>Veta</u> (kritérium kolmosti rovín)

Dve roviny sú kolmé práve vtedy, keď jedna z nich obsahuje priamku kolmú na dve rôznobežky v druhej rovine.

- <u>vzdialenosť bodov</u>

<u>Def.</u>

Vzdialenosť bodov A, B je veľkosť úsečky AB.

<u>Pr.</u>

V kocke $A-H$ s hranou dĺžky a určite:

a) veľkosť stenovej uhlopriečky

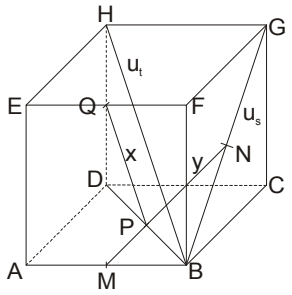
$$u_s^{\ 2} = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$u_s = a.\sqrt{2}$$

b) veľkosť telesovej uhlopriečky

$$u_t^{\ 2} = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

$$u_t = a.\sqrt{3}$$



c) vzdialenosť bodov $P, Q; P = B\overline{\cdot}D, Q = D\overline{\cdot}H$

$$x^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \tfrac{a^2}{4} + \tfrac{2a^2}{4} = \tfrac{3a^2}{4}$$

$$x = \tfrac{a\sqrt{3}}{2}$$

d) vzdialenosť bodov $M, N; M = A\overline{\cdot}B, N = B\overline{\cdot}G$

$$y^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

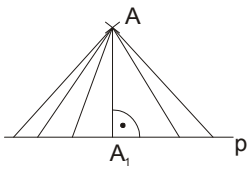
$$y^2 = \tfrac{a^2}{4} + \tfrac{2a^2}{4} = \tfrac{3a^2}{4}$$

$$y = \tfrac{a\sqrt{3}}{2}$$

- <u>vzdialenosť bodu od priamky</u>

<u>Def.</u>

Vzdialenosť bodu A od priamky p je najmenšia zo vzdialeností $|AX|; X \in p$.



- A_1 je kolmý priemet bodu A na priamku p
- z Pytagorovej vety vidno, že $|AA_1|$ bude najmenšia a teda $|Ap| = |AA_1|$

Def.

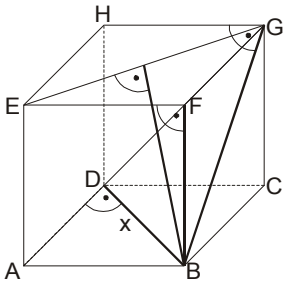
Vzdialenosť bodu A od útvaru U je najmenšia zo vzdialeností $|AX|; X \in U$.

Pr.

V kocke $A-H$ s hranou dĺžky a určite vzdialenosť bodu B od priamky:

a) EF b) EG c) HG

$$\left|B\overleftrightarrow{EF}\right| = a \qquad \left|B\overleftrightarrow{EG}\right|^2 = 2a^2 - \tfrac{a^2}{2} = a\sqrt{\tfrac{3}{2}} \qquad \left|B\overleftrightarrow{HG}\right| = a\sqrt{2}$$

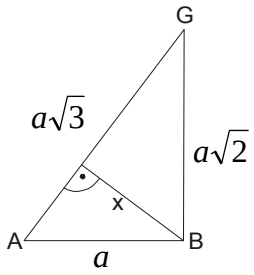


d) AG

$S = S$

$\frac{a.a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}.x}{2}$

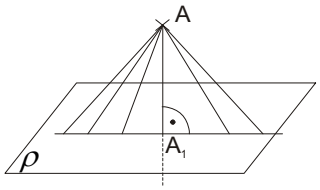
$x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$



- vzdialenosť bodu od roviny

Def.

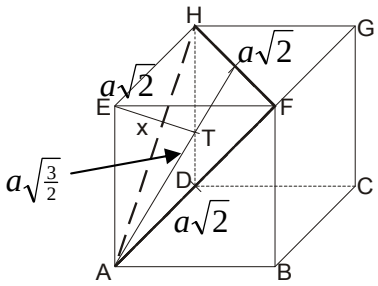
Vzdialenosť bodu A od roviny ρ je najmenšia zo vzdialeností $|AX|; X \in \rho$.



- A_1 je kolmý priemet bodu A do roviny ρ
- z Pytagorovej vety vidno, že $|AA_1|$ bude Najmenšia a teda $|A\rho| = |AA_1|$

Pr.

V kocke $A-H$ s hranou a určite vzdialenosť bodu E od roviny $\overleftrightarrow{AFH}$:



$V = V$

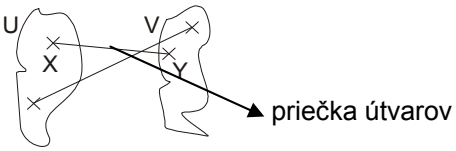
$\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}a = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}x$

$x = \frac{a}{\sqrt{3}}$

- vzdialenosť dvoch útvarov

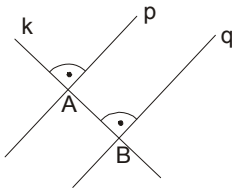
Def.

Vzdialenosť útvarov U,V je veľkosť najkratšej priečky útvarov U,V .



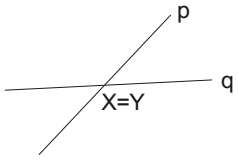
1. rovnobežné priamky

$$|pq| = |AB|$$

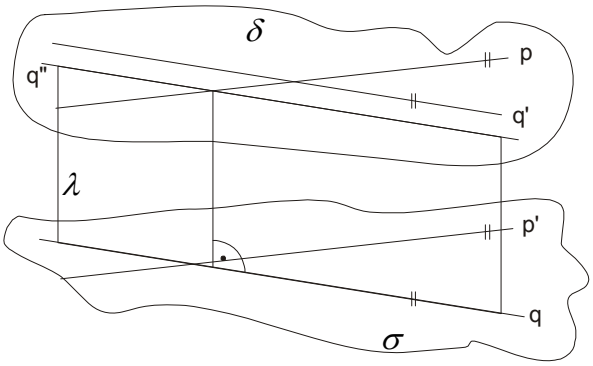


2. rôznobežné priamky

$$|pq| = 0$$



3. mimobežné priamky



- majme dve mimobežné priamky p, q, nájdime k nim rovnobežky p', q' také, že platí: $p \cap q' = \{X\}$ a $p' \cap q = \{Y\}$, tým dostaneme dve rovnobežné roviny δ, σ
- ďalej priamkou q preložme rovinu λ, ktorá je kolmá na roviny δ, σ, tým nám v rovine δ vznikne priamka q'', ktorá je priesečnicou rovín δ, λ
- potom priesečníkom priamok p, q'' veďme kolmicu na priamku q, táto kolmica bude os mimobežiek a jej veľkosť bude vzdialenosť priamok p, q (os mimobežiek je priečka kolmá na obe mimobežky)

<u>Def.</u>
Vzdialenosť mimobežných priamok je veľkosť ich osí.

<u>Pr.</u>
V kocke $A - H$ určite vzdialenosť priamok:

a) AB, AE

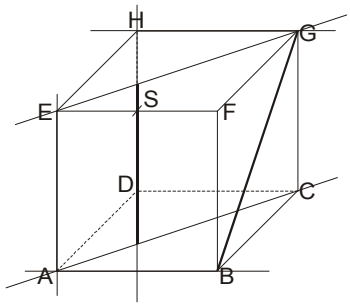
$$\left|\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AE}\right| = 0$$

b) AB, GH

$$\left|\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{GH}\right| = a.\sqrt{2}$$

c) $AC, HS; S = E \div F$

$$\left|\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{HS}\right| = a$$



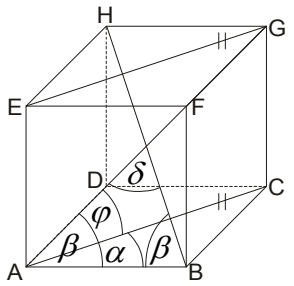
- <u>uhol dvoch priamok</u>

<u>Def.</u>

1. Uhol dvoch rovnobežných priamok je nulový.
2. Uhol dvoch rôznobežných priamok je najmenší z uhlov, ktoré určujú.
3. Uhol dvoch mimobežných priamok p, q je uhol dvoch rôznobežiek p', q' takých, že platí: $p \parallel p' \wedge q \parallel q'$.

<u>Pr.</u>

V kocke $A - H$ určite uhol priamok:



a) AB, AC

$$\alpha = 45°$$

b) AB, AG

$$\sin\beta = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}$$

$$\beta \doteq 54°45'$$

c) AB, EG

$$\gamma = \alpha = 45°$$

d) AG, BH

$$\delta = 180° - 2\beta = 70°30'$$

e) AC, AG

$$\sin\varphi = \frac{a}{a.\sqrt{3}}$$

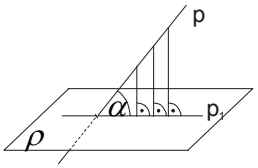
$$\varphi \doteq 35°16'$$

- <u>uhol priamky a roviny</u>

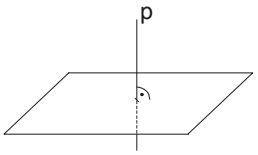
<u>Def.</u>

1. Ak priamka p je rovnobežná s rovinou ρ, tak ich uhol je nulový.

2. Ak priamka p je rôznobežná s rovinou ρ a $p \not\perp \rho$, tak ich uhol je uhol priamky p a jej kolmého priemetu p_1 do roviny ρ.



3. Ak priamka p je kolmá na rovinu ρ, tak ich uhol má veľkosť 90°.



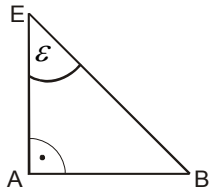
Pr.

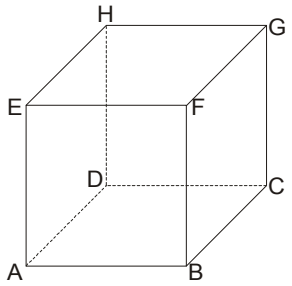
V kocke $A-H$ určite uhol priamky a roviny:

a) BH, ABC

$$\sin\varepsilon = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

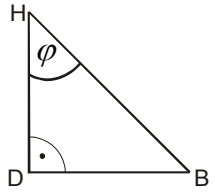
$$\varepsilon \doteq 35°$$





b) AE, BCE

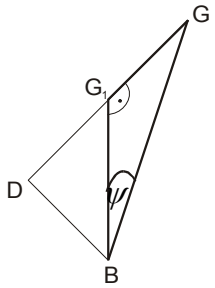
$$\varphi = 45°$$



c) BG, BEC

$$\sin\psi = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

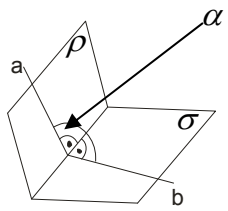
$$\psi = 30°$$



- <u>uhol dvoch rovín</u>

<u>Def.</u>

1. Uhol dvoch rovnobežných rovín je nulový.
2. Uhol dvoch rôznobežných rovín ρ, σ je uhol priamok a, b kolmých na priesečnicu rovín ρ, σ takých, že $a \in \rho, b \in \sigma$.



<u>Neriešené úlohy</u>

1. Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou KLM, kde $K = E\overline{\cdot}H, L = A\overline{\cdot}B, M = C\overline{\cdot}G$.

2. Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou KLM, kde $K \in AB, E = L\overline{\cdot}F, M \in CG$.

3. Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou súmernosti úsečky KL, kde $K = A\overline{\cdot}D, L = F\overline{\cdot}G$. Vypočítajte obsah rezu.

4. Zostrojte rez kocky $A-H$ rovinou súmernosti úsečky PQ, kde $P = A\overline{\cdot}E, Q = F\overline{\cdot}G$. Vypočítajte obsah rezu.

5. Je daná kocka $A-H$ s hranou dĺžky a. Vrchol A spojíme po povrchu kocky so stredom steny $BCGF$ cez hranu BF najkratšou čiarou. Priesečník tejto spojnice s hranou BF je L. Podobne spojíme vrchol A so stredom steny $DCGH$ cez hranu DH, na ktorej dostaneme bod K. Určite obsah ΔAKL.

6. V kocke $A-H$ určite vzdialenosť stredu S steny $ABCD$ od priamky BH.

7. V kocke $A-H$ určite vzdialenosť stredu M hrany AE od priamky BH.

8. V kocke $A-H$ určite vzdialenosť bodu B od priamky SF, kde $S = A\overline{\cdot}C$.

9. V pravidelnom štvorstene $ABCD$ určite vzdialenosť priamok AB a CD.

10. V pravidelnom štvorstene $ABCD$ určite uhol priamky MN a roviny ABC, kde $M = A\overline{\cdot}B, N = C\overline{\cdot}D$.

11. V kocke $A-H$ určite vzdialenosť priamok BG a HF.

12. Pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ má všetky hrany dlhé $2\,cm$. Vypočítajte:

a) vzdialenosť bodu A od priamky BV
b) vzdialenosť bodu A od priamky CV
c) výšku ihlana

13. V kocke $A-H$ zostrojte priesečnicu rovín KLM a PQR, kde $K, P \in AB; L, Q \in CG;$ $M, R \in EF$.

14. V kocke $A-H$ je daná priamka PQ, kde $H = P\overline{\cdot}G, B = Q\overline{\cdot}A$. Určite prienik priamky PQ a kocky, vypočítajte dĺžku prieniku.

15. V kocke $A-H$ je daná priamka PQ, kde $S = E\overline{\cdot}H, S = P\overline{\cdot}B, B = Q\overline{\cdot}A$. Určite prienik priamky PQ a kocky. Určite prienik priamky PQ a roviny ASG.

16. V kocke $A-H$ je daná priamky PQ, kde $P \in \overrightarrow{DH} \wedge |DP| = \frac{3}{2}|DH|$,

$Q \in \overrightarrow{AB} \wedge |AQ| = \frac{3}{2}|AB|$. Určite prienik priamky PQ a kocky. Urči prienik priamky PQ a roviny AEG.

17. Pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ má všetky hrany dlhé $5\,cm$. Určite uhol:

a) bočnej a podstavnej hrany
b) bočnej steny a podstavy
c) bočnej hrany a podstavy
d) protiľahlých bočných stien
e) susedných bočných stien.

18. V pravidelnom štvorbokom ihlane $ABCDV$ je $|AB| = a, |AV| = b$. Určite uhol:

a) bočnej hrany s rovinou podstavy
b) bočnej steny s rovinou podstavy

23. TELESÁ, ICH OBJEMY A POVRCHY

1. Základné pojmy
- teleso

2. Objem a povrch telesa
- axiómy objemu
- Cavalieriho princíp

3. Základné druhy telies:
a) mnohosten: štvorsten, hranol, rovnobežnosten, kváder, kocka, ihlan
- Eulerova veta

b) rotačné teleso: rotačný valec, rotačný kužeľ, guľa, anuloid

……

Def.
Priestorový útvar je každá množina bodov v priestore.

Def.
Priestorový útvar je súvislý, ak pre každé dva body obsahuje krivku, ktorá ich spája.

Def.
Priestorový útvar je ohraničený, ak existuje $h \in R^+$ tak, že $\forall\, x, y \in U : |xy| \leq h$.

Def.
Bod $A \in U$ je vnútorný bod útvaru U, ak mu možno opísať guľu ležiacu v útvare.

Def.
Bod $A \in U$ je hraničný bod útvaru U, ak každá guľa, ktorú mu opíšeme obsahuje body patriace útvaru a aj body nepatriace útvaru.

Def.
Hranica priestorového útvaru je množina všetkých hraničných bodov.

Def.
Priestorový útvar je uzavretý, ak obsahuje svoju hranicu.

Def.
Teleso je ohraničený, uzavretý a súvislý priestorový útvar.

- v matematike existuje veľa druhov telies, ale za základné považujeme dva druhy:

1. mnohosteny
2. rotačné telesá

- <u>objem a povrch telesa</u>

Def.
Objem telesa T je číslo $V(T)$, pre ktoré platí:

1. $\forall T : V(T) \geq 0$

2. ak $\forall T, T_1, T_2 : T = T_1 \cup T_2$ a telesá T_1, T_2 sa neprestupujú (nemajú spoločný bod), tak potom platí:
$V(T) = V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

3. $\forall T_1, T_2 : T_1 \cong T_2 \Rightarrow V(T_1) = V(T_2)$

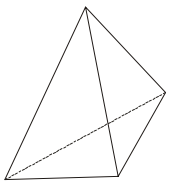
4. (normovacia vlastnosť)
a) objem kvádra s rozmermi a, b, c je $V = a.b.c$
b) objem valca s polomerom podstavy r a výškou v je
$V = Sp.v = \pi.r^2.v$

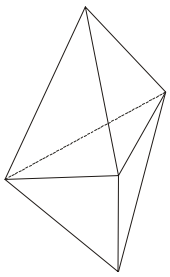
<u>Veta</u> (Cavalieriho princíp)
Ak pre dve telesá T_1, T_2 existuje rovina ρ_0 taká, že každá rovina $\rho \parallel \rho_0$ pretína obe telesá v útvaroch rovnakého obsahu, tak platí $V(T_1) = V(T_2)$

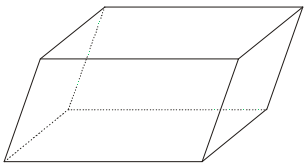
<u>Def.</u>
Povrch telesa je plošný obsah jeho hranice.

- <u>mnohosteny</u>

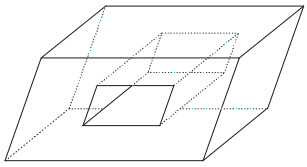
<u>Def.</u>
Mnohosten je teleso, ktorého hranice je zjednotením konečného počtu mnohouholníkov, pričom mnohouholníky, ktoré majú spoločnú stranu neležia v jednej rovine.


je mnohosten

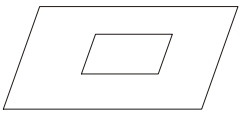

je mnohosten


je mnohosten

- ale teleso:



mnohosten nebude, keďže:


nie je mnohouholník

<u>Def.</u>
Mnohouholníky, tvoriace hranicu mnohostena, sa nazývajú steny mnohostena.

- ich počet je $s; s \geq 4$

<u>Def.</u>
Strany mnohouholníkov, tvoriacich hranicu mnohostena, sa nazývajú hrany mnohostena.

- ich počet je $h; h \geq 6$

<u>Def.</u>
Vrcholy mnohouholníkov, tvoriacich hranicu mnohostena, sa nazývajú vrcholy mnohostena.

- ich počet je $v; v \geq 4$

<u>Def.</u>
Počet hrán, na ktorých leží vrchol A je stupeň vrcholu.

> $st\,A; st\,A \geq 3$

Def.

Počet hrán ohraničujúcich stenu je stupeň steny.

> $st\,s; st\,s \geq 3$

Veta

V každom mnohostene platí: $h \geq \frac{3}{2}v$.

Dôkaz

- majme vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_v$, pre stupne vrcholov platí:

$$\begin{array}{l} st\,A_1 \geq 3 \\ st\,A_2 \geq 3 \\ \quad\vdots \\ st\,A_v \geq 3 \\ \hline 2h = \sum st\,A_i \geq 3v; i \in 1, 2, \ldots, v \\ h \geq \frac{3}{2}v \end{array}$$

Veta

V každom mnohostene platí: $h \geq \frac{3}{2}s$.

Dôkaz

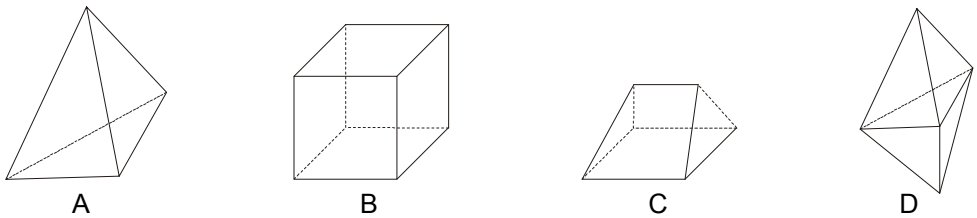
- majme steny $s_1, s_2, \ldots, s_s$, pre stupne stien platí:

$$\begin{array}{l} st\,s_1 \geq 3 \\ st\,s_2 \geq 3 \\ \quad\vdots \\ st\,s_s \geq 3 \\ \hline 2h = \sum st\,s_i \geq 3s; i \in 1, 2, \ldots, s \\ h \geq \frac{3}{2}s \end{array}$$

- konvexné mnohosteny

Def.

Mnohosten sa nazýva konvexný, ak s každými dvoma bodmi obsahuje úsečku nimi určenú.



A B C D

	v	s	h	v+s
A	4	4	6	8
B	8	6	12	14
C	6	5	9	11
D	5	6	9	11

Veta (Eulerova)

Pre každý konvexný mnohosten platí $v + s = h + 2$.

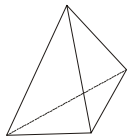
(dôkaz si uvedieme v kapitole 29. Teória grafov)

Pr.

Nájdite konvexný mnohosten, ktorý má 4 steny:

$$s = 4$$
$$v + s = h + 2$$
$$v + 4 = h + 2$$
$$v + 2 = h$$
$$2v + 4 = 2h \geq 3v$$
$$2v + 4 \geq 3v$$
$$4 \geq v \ldots v = 4$$

$$v + s = h2$$
$$4 + 4 = h + 2$$
$$8 = h + 2$$
$$h = 6$$



- <u>pravidelné mnohosteny</u> (platónske telesá)

<u>Def.</u>

Mnohosten sa nazýva pravidelný, ak všetky jeho steny sú zhodné pravidelné mnohouholníky a všetky vrcholy majú rovnaký stupeň.

- pravidelný štvorsten je tetraéder, šesťsten je hexaéder, osemsten je oktaéder, dvanásťsten je dodekaéder a dvadsaťsten je ikosaéder

- <u>štvorsten</u> (trojrozmerný simplex)

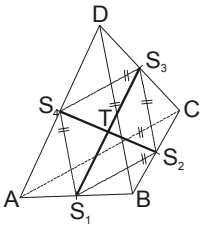
<u>Def.</u>

Štvorsten $ABCD$ je prienik polpriestorov $\overrightarrow{ABCD}, \overrightarrow{ABDC}, \overrightarrow{ACDB}, \overrightarrow{BCDA}$.

<u>Veta</u>

Úsečky spájajúce stredy protiľahlých hrán štvorstena sa rozpoľujú v bode T.

Dôkaz



- je zrejmé, že $S_1S_2S_3S_4$ rovnobežník a teda jeho uhlopriečky sa rozpoľujú

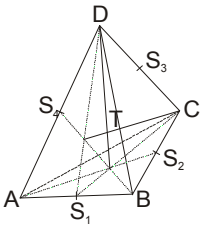
<u>Def.</u>

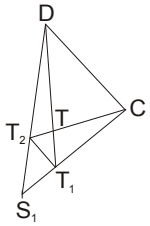
Ťažnica štvorstena je úsečka spájajúca vrchol štvorstena s ťažiskom protiľahlej steny.

<u>Veta</u>

Ťažnice štvorstena sa pretínajú v jednom bode T (ťažisku), ktorý delí ťažnice v pomere $3:1$

Dôkaz





$$|S_1T_2| = 3.|S_1D| \qquad |S_1T_2| : |S_1D| = 1:2$$
$$|S_1T_1| = 3.|S_1C| \qquad |S_1T_1| : |S_1C| = 1:2$$
$$\angle T_1S_1T_2 \cong \angle CS_1D$$
$$\Downarrow (sus)$$
$$\Delta S_1T_1T_2 \overset{3}{\approx} \Delta S_1CD$$

- ďalej: $\angle T_2T_1T \cong \angle CDT$ (striedavé) $\wedge$ $\angle T_1TT_2 \cong \angle DTC$ (vrcholové)

$$\Downarrow (uu)$$

$$\Delta TT_1T_2 \overset{3}{\approx} \Delta TDC \qquad |T_1T| = 3.|TD| \ldots |T_1T| : |TD| = 1:3$$

Def.

Výška štvorstena je kolmica z vrcholu na protiľahlú stenu.

- výšky sa nemusia preťať, sú možné tri situácie:
  1. žiadne dve výšky sa nepretnú
  2. dve sa pretnú v bode V a zvyšné dve sa pretnú v bode Z
  3. ak $V = Z$, tak sa všetky výšky pretnú v jednom bode (ortocentrický štvorsten)

Veta

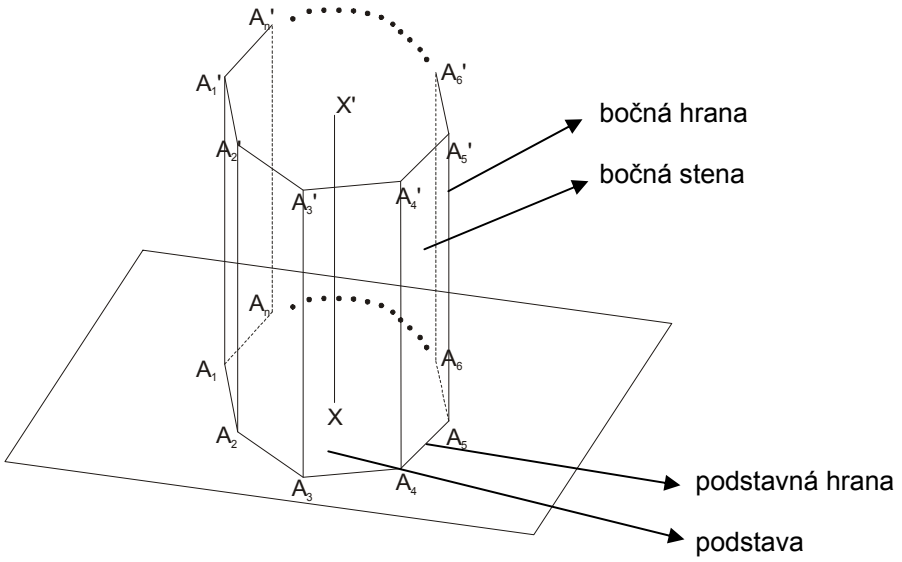
Výšky vychádzajúce z vrcholov A, D sa pretnú práve vtedy, keď $AD \perp BC$.

Veta

Štvorsten je ortocentrický práve vtedy, keď každé dve protiľahlé strany sú na seba kolmé.

- pravidelný štvorsten je vždy ortocentrický

- hranol



Def.

Hranol určený n-uholníkom $A_1A_2A_3\ldots A_n$ a bodom A_1' takým, že nepatrí do roviny podstavy ($A_1' \notin \overleftrightarrow{A_1A_2A_3}$), je množina všetkých bodov všetkých úsečiek XX', kde $X \in A_1A_2A_3\ldots A_n$ a $X' = T_{AA_1}(X)$.

Def.

Zjednotenie bočných stien hranola je plášť hranola.

Def.

Hranica hranola je plášť a dve podstavy.

Def.

Hranol je kolmý, ak jeho bočné hrany sú kolmé na rovinu podstavy, ináč sa nazýva šikmý alebo kosý.

Def.

Hranol je pravidelný, ak je kolmý a jeho podstavou je pravidelný mnohouholník.

Def.

Hranol sa nazýva rovnobežnosten, keď jeho všetky steny sú rovnobežníky.

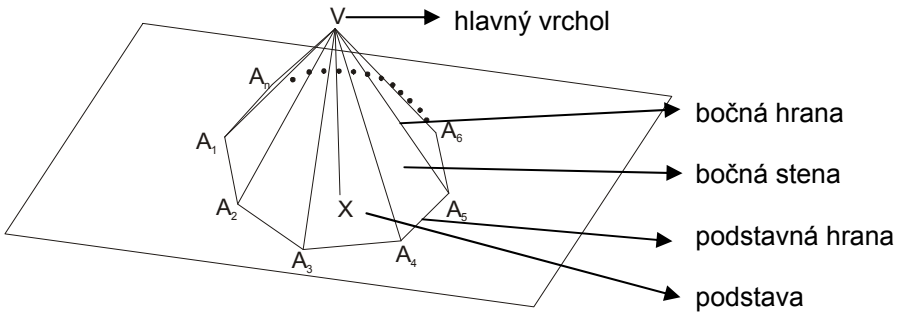
Def.
Kváder je hranol (rovnobežnosten), ktorého všetky steny sú pravouholníky.

Def.
Kocka je hranol (rovnobežnosten), ktorého všetky steny sú štvorce.

Veta
Pre objem každého hranola s podstavou, ktorej obsah je S_p a výškou v platí $V = S_p.v$
(dokazuje sa použitím Cavalieriho princípu, šikmí hranol sa dá „popresúvať“ na kolmý, s rovnakou výškou aj podstavou)

Veta
Pre plošný obsah hranice hranola s podstavou, ktorej obsah je S_p a plášťom, s obsahom S_{pl}, platí $S = 2S_p + S_{pl}$.

- ihlan



Def.
Ihlan určený n-uholníkom $A_1A_2A_3\ldots A_n$ a hlavným vrcholom V takým, že nepatrí do roviny podstavy ($V \notin \overleftrightarrow{A_1A_2A_3}$), je množina všetkých bodov všetkých úsečiek XV, kde $X \in A_1A_2A_3\ldots A_n$.

Def.
Ihlan je pravidelný, ak jeho podstava je pravidelný mnohouholník a všetky bočné hrany sú zhodné.

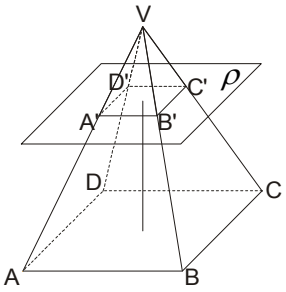
Def.
Zjednotenie bočných stien ihlana je plášť ihlana.

Def.
Hranica ihlana je plášť a podstava.

Veta
Pre objem každého ihlana s podstavou, ktorej obsah je S_p a výškou v platí $V = \frac{1}{3}S_p.v$

Veta
Pre plošný obsah hranice ihlana s podstavou, ktorej obsah je S_p a plášťom, s obsahom S_{pl}, platí $S = S_p + S_{pl}$.

- <u>zrezaný ihlan</u>



<u>Def.</u>

Zrezaný ihlan je prienik ihlana a polpriestoru, ktorého hraničná rovina je rovnobežná s rovinou podstavy ihlana.

$$V = \tfrac{1}{3} v\left(S_{p_1} + S_{p_2} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}}\right)$$
$$S = S_{p_1} + S_{p_2} + S_{pl}$$

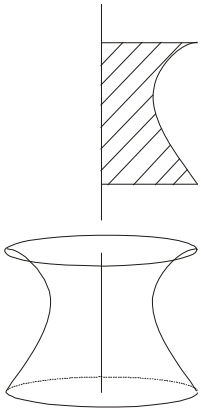
- <u>rotačné telesá</u>

<u>Def.</u>

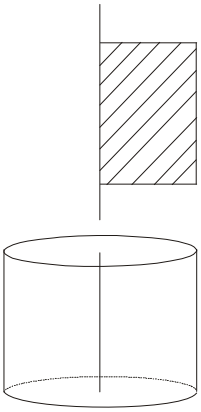
Rotačné teleso je teleso, ktoré vznikne rotáciou rovinného útvaru okolo priamky ležiacej v rovine útvaru.

- takto môže vzniknúť veľa telies, napr.:

1.

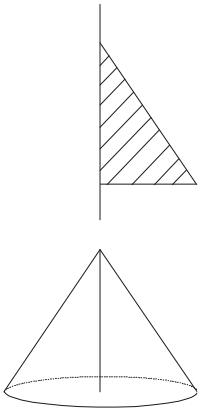


2.



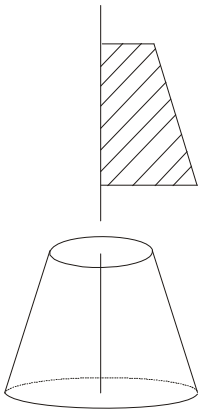
rotačný valec

3.



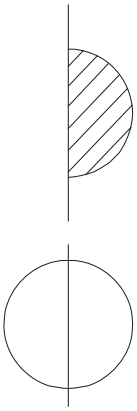
rotačný kužeľ

4.



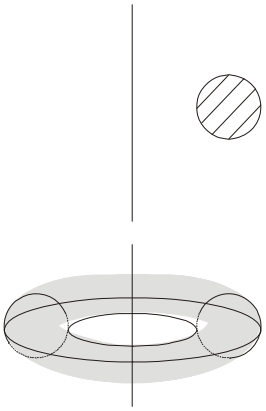
zrezaný rotačný kužeľ

5.



guľa

6.



prstenec (anuloid, toroid)

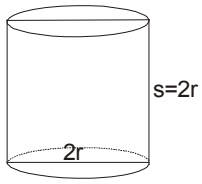
- valec

Def.
Valec je teleso podobné hranolu, ktorého podstava nie je mnohouholník ale kruh.

Def.
Valec je kolmý, ak jeho strany sú kolmé na rovinu podstavy.

Def.
Rotačný valec je teleso, ktoré vznikne rotáciou pravouholníka okolo jeho strany. (kolmý valec)

Def.
Valec je rovnostranný, ak je kolmý a platí $s = 2r$.



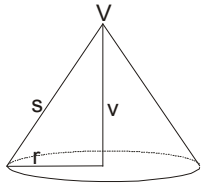
$$V = S_p.v = \pi.r^2.v$$
$$S = 2S_p + S_{pl}$$
- pre kolmý: $S = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.v = 2\pi.r(r+v)$

- kužeľ

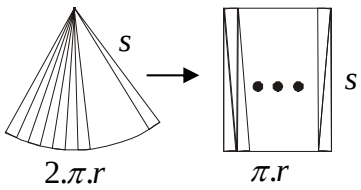
Def.
Kužeľ je teleso podobné ihlanu, ktorého podstava nie je mnohouholník ale kruh.

Def.
Kužeľ je kolmý, ak päta výšky je v strede podstavy.

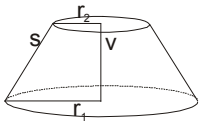
Def.
Rotačný kužeľ je teleso, ktoré vznikne rotáciou pravouhlého okolo jeho odvesny. (kolmý valec)



$$V = \tfrac{1}{3}S_p.v = \tfrac{1}{3}.\pi.r^2.v$$
$$S = S_p + S_{pl}$$
- pre kolmý: $S = \pi.r^2 + \pi.r.s = \pi.r(r+s)$



- <u>zrezaný kužeľ</u>



$$V = \tfrac{1}{3}v\left(S_{p_1} + S_{p_2} + \sqrt{S_{p_1}S_{p_2}}\right) = \tfrac{1}{3}.\pi.v.\left(r_1^{\,2} + r_1r_2 + r_2^{\,2}\right)$$

$$S = S_{p_1} + S_{p_2} + S_{pl}$$

- pre kolmý: $S = \pi.r_1^{\,2} + \pi.r_2^{\,2} + \pi.(r_1 + r_2).s$

- <u>guľa</u>

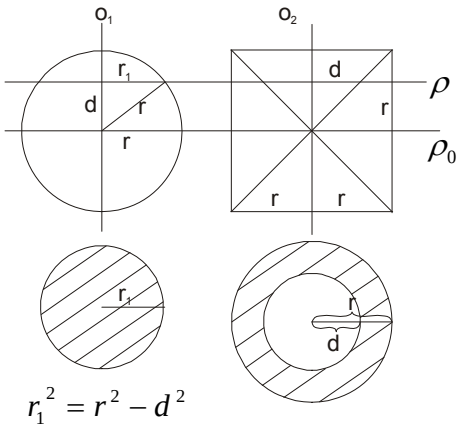
<u>Def.</u>

Guľa G so stredom S a polomerom $r \in R^+$ je množina všetkých bodov X v priestore, pre ktoré platí: $|XS| \le r$.

$$G(S;r) = \{X; X \in E_3, |XS| \le r\}$$

- pre výpočet objemu gule môžeme uvažovať takto:

- zoberme si valec, ktorý má polomer podstavy r, stranu $s = 2r$ a je kolmý, čiže rovnostranný
- ak s neho potom vyrežeme dva kužele, tak pomocou Cavalieriho princípu dokážeme, že vzniknutý útvar bude mať rovnaký objem ako guľa s polomerom r



$$r_1^{\,2} = r^2 - d^2$$

$$S_1 = \pi.r_1^{\,2} = \pi.\left(r^2 - d^2\right) \qquad S_2 = \pi.r^2 - \pi.d^2 = \pi.\left(r^2 - d^2\right)$$

$$S_1 = S_2$$

- vidíme, že to platí a teda:

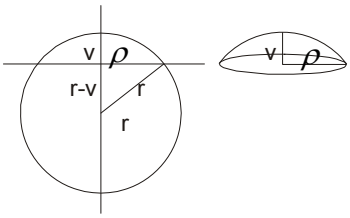
$$V(G) = V(V) - 2V(K) = \pi.r^2.2r - 2.\tfrac{1}{3}.\pi.r^2.r =$$

$$= 2.\pi.r^3 - \tfrac{2}{3}.\pi.r^3 = \tfrac{4}{3}.\pi.r^3$$

$$V = \tfrac{4}{3}.\pi.r^3$$

$$S = 4.\pi.r^2$$

- <u>guľový odsek</u>



$$r^2 = \rho^2 + (r - v)^2$$
$$\rho^2 = r^2 - (r^2 - 2rv + v^2)$$
$$\rho^2 = 2rv - v^2$$
$$r = \frac{\rho^2 + v^2}{2v}$$

$$V = \tfrac{1}{3}.\pi.v.(3rv - v^2) = \tfrac{1}{6}.\pi.v.(3\rho^2 + v^2)$$
$$S = \pi.\rho^2 + 2.\pi.r.v$$

- <u>guľový vrchlík</u>

- je to plášť guľového odseku, teda $S = 2.\pi.r.v$

<u>Pr.</u>

Majme tri gule s polomermi r_1, r_2, r_3. Zlejme ich do jednej, určite polomer tejto novej gule:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$\tfrac{4}{3}.\pi.R^3 = \tfrac{4}{3}.\pi.r_1^{\ 3} + \tfrac{4}{3}.\pi.r_2^{\ 3} + \tfrac{4}{3}.\pi.r_3^{\ 3}$$
$$\tfrac{4}{3}.\pi.R^3 = \tfrac{4}{3}.\pi.(r_1^{\ 3} + r_2^{\ 3} + r_3^{\ 3})$$
$$R^3 = r_1^{\ 3} + r_2^{\ 3} + r_3^{\ 3} \qquad R = \sqrt[3]{r_1^{\ 3} + r_2^{\ 3} + r_3^{\ 3}}$$

<u>Pr.</u>

Do gule s polomerom r je vpísaná kocka, určite jej objem:

- je zrejmé, že telesová uhlopriečka kocky bude $2r$, teda:

$$a.\sqrt{3} = 2r$$
$$a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$
$$V = a^3 = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$$

<u>Neriešené úlohy</u>

1. Ak rozvinieme do roviny plášť rotačného kužeľa, dostaneme polkruh s polomerom 1. Vypočítajte objem a povrch kužeľa.

2. Vypočítajte povrch časti Zeme, ktorú vidí kozmonaut z výšky h.

3. Vypočítajte objem a povrch telesa, ktoré vznikne rotáciou rovnostranného trojuholníka so stranou h okolo:

a) strany,
b) priamky p idúcej vrcholom rovnobežne s protiľahlou stranou

4. Vypočítajte objem šikmého kužeľa, ktorého najdlhšia strana má veľkosť a, najkratšia strana má veľkosť b a ich uhol je 60°.

5. Vypočítajte objem pravidelného štvorstena a osemstena s hranou dĺžky a.

6. n **gúľ s polomerom** r **zlejeme do jednej gule. Aký bude jej polomer?**

7. Vypočítajte objem pravidelného n **-bokého ihlana, ktorého hrana podstavy má dĺžku** a **a bočná hrana má dĺžku** b **.**

8. Vypočítajte objem pravidelného štvorbokého ihlana, ak jeho výška je v **a uhol bočnej steny s rovinou podstavy je** φ **.**

9. Do rovnostranného kužeľa je vpísaný rovnostranný valec. Určite pomer ich objemov.

10. Aký uhol zviera strana rovnostranného kužeľa s rovinou podstavy, ak obsah plášťa je dvojnásobkom obsahu podstavy?

11. Do rotačného kužeľa je vpísaná guľa. Povrch gule je k **obsahu podstavy kužeľa v pomere** $4:3$ **. Vypočítajte vrcholový uhol kužeľa.**

24. VEKTORY

1. Orientovaná úsečka

2. Usporiadané dvojice reálnych čísel

3. Vektorový priestor
- definícia vektorového priestoru, pojem vektora, nulový vektor, opačný vektor
- vektorový priestor voľných vektorov

4. Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov
- lineárna kombinácia vektorov
- báza, dimenzia
- súradnice vektora

5. Dvojrozmerný euklidovský priestor

6. Trojrozmerný euklidovský priestor

7. Skalárny súčin vektorov, jeho vlastnosti a aplikácie

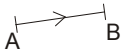
8. Vektorový súčin vektorov, jeho vlastnosti a aplikácie

……

- <u>orientovaná úsečka</u>

<u>Def.</u>

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je usporiadaná dvojica $[A, B]$.

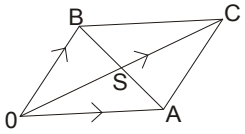


$\overrightarrow{AB} = [A, B]$ - A je začiatočný bod a B je koncový bod

$\overrightarrow{AA} = [A, A]$ - nulová orientovaná úsečka

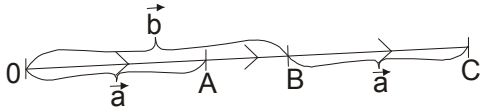
<u>Def.</u>

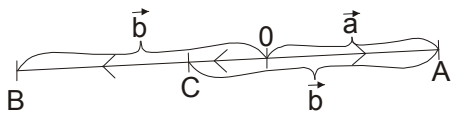
Súčtom orientovaných úsečiek $\overrightarrow{0A}$ a $\overrightarrow{0B}$ je orientovaná úsečka $\overrightarrow{0C}$, pričom platí: $C = S_{\overline{A,B}}(0)$.



- jednoduchý postup, ako nájsť súčet vektorov, je dopĺňanie na rovnobežník

- ak by sme mali také vektory, ktorých smer by bol rovnaký (opačný), tak postupujeme takto:





- pre orientované úsečky platia tieto **vlastnosti**:

1. komutatívnosť

$$\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B} \ldots \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} = \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0A}$$

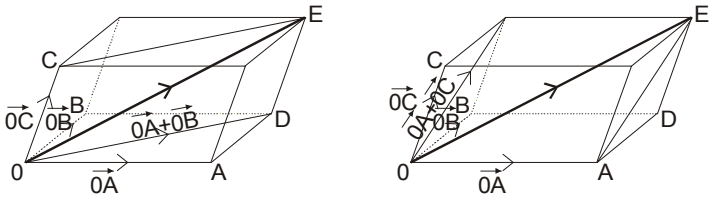
- táto vlastnosť je zrejmá z rovnobežníka

2. asociatívnosť

$$\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}, \overrightarrow{0C} \ldots \left(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B}\right) + \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0A} + \left(\overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}\right)$$

- dokážeme pomocou rovnobežnostenu:

$$\left(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B}\right) + \overrightarrow{0C} \qquad \overrightarrow{0A} + \left(\overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}\right)$$



3. neutrálny prvok

$\overrightarrow{00}$ - je zrejmé, že ak takúto orientovanú úsečku pripočítame ku inej, tak dostaneme tú istú:

$$\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{00} = \overrightarrow{0A}$$

4. inverzný prvok

- ku každej orientovanej úsečke $\overrightarrow{0A}$ existuje opačná orientovaná úsečka $\overrightarrow{0B} = -\overrightarrow{0A}$ taká, že platí: $\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} = \overrightarrow{00}$

<u>Def.</u>

Pre každú orientovanú úsečku $\overrightarrow{0A}$ definujeme reálny násobok nasledovne:

1. $\forall k \in R - \{0\} : k.\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0B}; B = H_{0,k}(A)$
2. $k = 0 \ldots 0.\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{00}$

- teda bude platiť:

1. $0.\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{00}$
2. $1.\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0A}$
3. $-1.\overrightarrow{0A} = -\overrightarrow{0A}$
4. $k.\left(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B}\right) = k.\overrightarrow{0A} + k.\overrightarrow{0B}$
5. $(k+l)\overrightarrow{0A} = k.\overrightarrow{0A} + l.\overrightarrow{0A}$
6. $(k.l)\overrightarrow{0A} = k.\left(l.\overrightarrow{0A}\right)$

- <u>usporiadané dvojice reálnych čísel</u>

$$V_2 = \{[a,b]; a,b \in R\}$$

1. sčítanie

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$

- platí:
  1. komutatívnosť $[a,b]+[c,d]=[c,d]+[a,b]$
  2. asociatívnosť $([a,b]+[c,d])+[e,f]=[a,b]+([c,d]+[e,f])$
  3. neutrálny prvok je $[0,0]$ $[a,b]+[0,0]=[a+0,b+0]=[a,b]$
  4. inverzný prvok ku $[a,b]$ je $[-a,-b]$ $[a,b]+[-a,-b]=[a-a,b-b]=[0,0]$

2. reálny násobok

$$k.[a,b]=[ka,kb]$$

- platí:
  1. $0.[a,b]=[0,0]$
  2. $1.[a,b]=[a,b]$
  3. $-1.[a,b]=[-a,-b]$
  4. $k.([a,b]+[c,d])=k.[a,b]+k.[c,d]$
  5. $(k+l)[a,b]=k.[a,b]+l.[a,b]$
  6. $(k.l)[a,b]=k.(l.[a,b])$

- <u>vektorový priestor</u>

<u>Def.</u>

Vektorový priestor je každá množina V, na ktorej sú definované operácie sčítania a reálneho násobku tak, že platí:

1. $\forall \vec{u},\vec{v} \in V : \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
2. $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V : (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
3. $\exists \vec{o} \in V \ \forall \vec{u} \in V : \vec{u}+\vec{o}=\vec{u}$
4. $\forall \vec{u} \in V \ \exists -\vec{u} \in V : \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{v}+\vec{o}$
5. $\forall \vec{u} \in V : 1.\vec{u}=\vec{u}$
6. $\forall k,l \in R \ \forall \vec{u} \in V : (k+l).\vec{u}=k.\vec{u}+l.\vec{u}$
7. $\forall k,l \in R \ \forall \vec{u} \in V : (k.l).\vec{u}=k.(l.\vec{u})$
8. $\forall k \in R \ \forall \vec{u},\vec{v} \in V : k.(\vec{u}+\vec{v})=k.\vec{u}+k.\vec{v}$

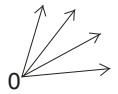
- prvky vektorového priestoru V sú **vektory** (vektor je orientovaná úsečka), označujeme ich $\vec{u},\vec{v},\ldots$
- vektor $\vec{o}$ je nulový vektor a vektor $-\vec{u}$ je opačná vektor ku vektoru $\vec{u}$

- existujú rôzne typy vektorových priestorov napr.:

1. vektorový priestor viazaných vektorov

- je to priestor, v ktorom všetky vektory vychádzajú z jedného bodu 0
- prvky sú viazané vektory

$$V=\left\{\overrightarrow{0X}; X \in E_3\right\}$$



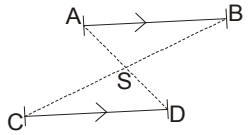
2. aritmetický vektorový priestor

$$V_2 = \{[a,b]; a,b \in R\}$$
$$V_3 = \{[a,b,c]; a,b,c \in R\}$$
$$\vdots$$

- <u>vektorový priestor voľných vektorov</u>

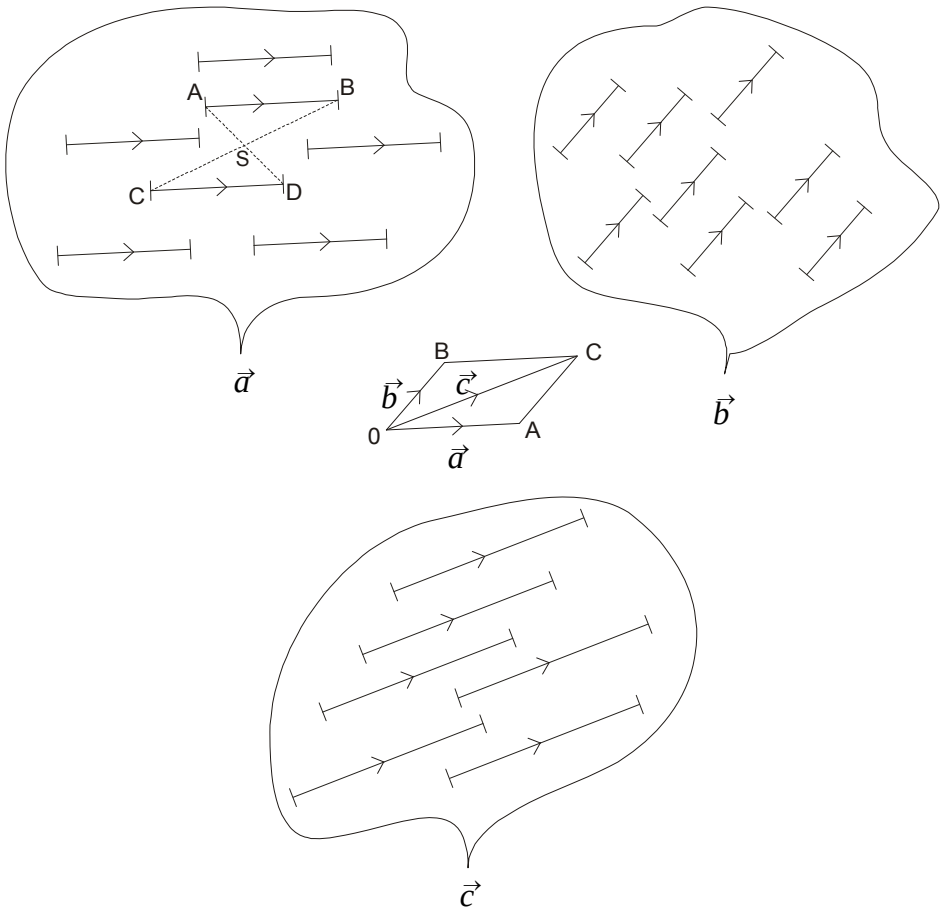
<u>Def.</u>

Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ sú ekvipolentné, ak platí: $A \overset{-}{\cdot} D, B \overset{-}{\cdot} C$.



<u>Def.</u>

Voľný vektor je množina všetkých navzájom ekvipolentných orientovaných úsečiek.



<u>Def.</u>

Súčtom voľného vektora $\vec{a}$, ktorého jedným jeho predstaviteľom je $\overrightarrow{0A}$ a voľného vektora $\vec{b}$, ktorého predstaviteľ je $\overrightarrow{0B}$, je vektor $\vec{c} = \overrightarrow{0C}; C = S_{A \overset{-}{\cdot} B}(0)$.

- každú orientovanú úsečku voľného vektora môžeme označiť a budeme ju nazývať **umiestnenie** vektora

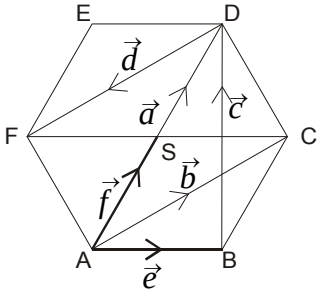
Def.

Pre každý vektor a definujeme reálny násobok nasledovne:

1. $\forall k \in R - \{0\} : k.\vec{a} = k.\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0B}; B = H_{0,k}(A)$
2. $k = 0 \ldots 0.\vec{a} = \vec{o}$

Pr.

V pravidelnom šesťuholníku $A - F$ sú dané vektory $\vec{e} = \overrightarrow{AB}, \vec{f} = \overrightarrow{AS}$. Vyjadrite pomocou nich vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AD}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \vec{c} = \overrightarrow{BD}, \vec{d} = \overrightarrow{DF}$:



- postupujeme tak, že nájdeme také umiestnenie vektora, pri ktorom vieme nájsť "cestu" zo začiatku na koniec, pomocou známych vektorov

$\vec{a} = k.\vec{e} + l.\vec{f}$

$\vec{a} = 0\vec{e} + 2\vec{f} = 2\vec{f}$

$\vec{b} = \vec{e} + \vec{f}$

$\vec{c} = -\vec{e} + 2\vec{f}$

$\vec{d} = -\vec{b} = -\vec{e} - \vec{f}$

- <u>lineárna závislosť a nezávislosť vektorov</u>

Def.

Vektor $\vec{v}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, ak existujú koeficienty $k_1, k_2, \ldots, k_n \in R$ tak, že platí $\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n$. (LK)

Def.

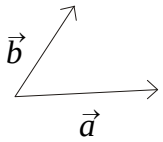
Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sú lineárne závislé, ak niektorý z nich je lineárnou kombináciou ostatných. (LZ)

Def.

Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sú lineárne nezávislé, ak žiadny z nich je lineárnou kombináciou ostatných. (LN)

- ďalej platí:

1. majme vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ktoré majú rôzny smer



- je zrejmé, že platí: $\vec{b} \neq k.\vec{a}$
  $\vec{a} \neq l.\vec{b}$
- a teda vektory sú lineárne nezávislé
- to nás privádza ku tvrdeniu:

Veta

Dva vektory sú lineárne závislé, keď jeden z nich je násobkom druhého.

2. majme vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ v rovine, vieme nájsť také k, l, aby platilo: $\vec{c} = k.\vec{a} + l.\vec{b}$

Veta

Každé tri vektory v rovine sú lineárne závislé.

Veta

V rovine môžu byť lineárne nezávislé najviac dva vektory.

3. uvažujme teraz tri (štyri) vektory v priestore
- pre tri vektory je zrejmé, že budú LN, keďže dvomi vieme preložiť rovinu a tretí bude mimo nej, tak nemôže byť ich LK
- pri štyroch vektoroch je možné vytvoriť rovnobežnosten a potom jeden bude LK ostatných

Veta
Každé štyri vektory v priestore sú lineárne závislé.

Veta
V priestore môžu byť lineárne nezávislé najviac tri vektory.

Pr.
Zistite, či vektor $\vec{w}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u},\vec{v}$:

a) $\vec{w}=[-1,1,2];\vec{u}=[1,5,2];\vec{v}=[1,2,0]$

$$\vec{w}=k.\vec{u}+l.\vec{v}$$
$$[-1,1,2]=k.[1,5,2]+l.[1,2,0]$$
$$[-1,1,2]=[k,5k,2k]+[l,2l,0]$$
$$[-1,1,2]=[k+l,5k+2l,2k]$$
$$k+l=-1 \quad \wedge \quad 5k+2l=1 \quad \wedge \quad 2k=2$$
$$l=-2 \qquad 5.1+2.(-2)=5-4=1 \qquad k=1$$

- všetky tri rovnosti platia a teda: $\vec{w}=u-2\vec{v}$

b) $\vec{w}=[6,1,-9];\vec{u}=[2,4,1];\vec{v}=[-3,1,2]$

$$\vec{w}=k.\vec{u}+l.\vec{v}$$
$$[6,1,-9]=k.[2,4,1]+l.[-3,1,2]$$
$$[6,1,-9]=[2k,4k,k]+[-3l,l,2l]$$
$$[6,1,-9]=[2k-3l,4k+l,k+2l]$$
$$2k-3l=6 \quad \wedge \quad 4k+l=1 \quad \wedge \quad k+2l=-9$$
$$\tfrac{22}{7}+\tfrac{111}{7}\neq 6 \qquad l=1-4k \qquad k+2-8k=-9$$
$$l=1-\tfrac{44}{7} \qquad -7k=-11$$
$$l=-\tfrac{37}{7} \qquad k=\tfrac{11}{7}$$

- všetky tri rovnosti neplatia a teda: $\vec{w}$ nie je LK $\vec{u},\vec{v}$

- aby sme zistili, či sú nejaké vektory lineárne závislé alebo nezávislé, nám bude stačiť jednoduchý výpočet koeficientov nasledujúcej rovnice:
  - majme vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ldots$
  - vytvorme z nich rovnicu $k.\vec{a}+l.\vec{b}+m.\vec{c}+\cdots=\vec{o}$
  - pre koeficienty máme dve možnosti:
    1. dostaneme **len nulové riešenie** $k=l=m=\cdots=0$
       > vektory budú **lineárne nezávislé**
    2. budeme mať nulové riešenie $k=l=m=\cdots=0$ a nejaké **nenulové riešenie**, takže niektorý koeficient je nenulový; nech je to napríklad l a potom platí: $\vec{k}.a+\vec{l}.b+\vec{m}.c+\cdots\vec{=}o$
       - odtiaľ: $l.\vec{b}=-k.\vec{a}-m.\vec{c}-\cdots$
       - potom $\vec{b}=\left(-\frac{k}{l}\right)\vec{a}+\left(-\frac{m}{l}\right)\vec{c}+\cdots$ $\qquad b$ je LK
       > vektory budú **lineárne závislé**

Pr.

Skúmajte lineárnu závislosť vektorov:

a) $\vec{a} = [2,1,5]; \vec{b} = [3,0,4]; \vec{c} = [1,2,6]$

$$k.\vec{a} + l.\vec{b} + m.\vec{c} = \vec{o}$$
$$k.[2,1,5] + l.[3,0,4] + m.[1,2,6] = [0,0,0]$$
$$[2k,k,5k] + [3l,0,4l] + [m,2m,6m] = [0,0,0]$$
$$[2k+3l+m, k+2m, 5k+4l+6m] = [0,0,0]$$
$$2k+3l+m=0 \quad \wedge \quad k+2m=0 \quad \wedge \quad 5k+4l+6m=0$$
$$-4m+3l+m=0 \qquad k=-2m \qquad -10m+4m+6m=0$$
$$3l=3m \qquad 0m=0$$
$$l=m \qquad m \in R$$
$$m=1, l=1, k=-2$$

- sú LZ, našli sme nenulové riešenie:

$$-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$$
$$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

b) $\vec{a} = [3,1,2]; \vec{b} = [1,1,1]; \vec{c} = [5,3,2]$

$$k.\vec{a} + l.\vec{b} + m.\vec{c} = \vec{o}$$
$$k.[3,1,2] + l.[1,1,1] + m.[5,3,2] = [0,0,0]$$
$$[3k,k,2k] + [l,l,l] + [5m,3m,2m] = [0,0,0]$$
$$[3k+l+5m, k+l+3m, 2k+l+2m] = [0,0,0]$$
$$3k+l+5m=0 \quad \wedge \quad k+l+3m=0 \quad \wedge \quad 2k+l+2m=0$$
$$3m-4m+5m=0 \quad k=-3m-l \qquad -6m-2l+l+2m=0$$
$$4m=0 \qquad k=-3m+4m \qquad l=-4m$$
$$m=0 \qquad k=m \qquad l=0$$
$$k=0$$

- máme len nulové riešenie, takže vektory sú LN

- <u>báza vektorového priestoru</u>

<u>Def.</u>

Báza vektorového priestoru je maximálna konečná lineárne nezávislá množina vektorov.

- ak sú vektory bázy na seba kolmé, tak bázu nazývame **ortogonálna** báza
- vektorový priestor môže mať viac báz
- všetky bázy toho istého vektorového priestoru majú rovnaký počet prvkov
- každý vektor vektorového priestoru je lineárnou kombináciou bázy

<u>Def.</u>

Dimenzia (rozmer) vektorového priestoru je počet vektorov tvoriacich bázu.

- vo vektorovom priestore $V_2 = \{[a,b]; a,b \in R\}$ bude každá dvojica LN vektorov tvoriť bázu napr.:

$$\vec{u} = [1,2]; \vec{v} = [1,3]$$

- potom pre vektor $\vec{w} = [a,b]$ bude platiť:

$$\vec{w} = [a,b] = k.\vec{u} + l.\vec{v}$$
$$[a,b] = k.[1,2] + l.[1,3]$$
$$[a,b] = [k,k] + [l,3l]$$
$$[a,b] = [k+l, k+3l]$$
$$a = k + l \quad \wedge \quad b = 2k + 3l$$
$$a - l = k \qquad b = 2a - 2l + 3l$$
$$k = 3a - b \qquad b - 2a = l$$

> taktiež bude báza aj $\vec{r} = [1,0]; \vec{s} = [0,1]$, takúto bázu budeme nazývať **kanonická báza**, keďže vektor $\vec{w} = [a,b]$ sa dá vyjadriť takto:

$$\vec{w} = [a,b] = m.\vec{r} + n.\vec{s}$$
$$[a,b] = m.[1,0] + n.[0,1]$$
$$[a,b] = [m,0] + [0,n]$$
$$[a,b] = [m,n]$$
$$a = m \quad \wedge \quad b = n$$

> takže súradnice vektora v báze sú koeficientmi pri vyjadrení vektora ako lineárnej kombinácii vektorov bázy

> to znamená, že ak chceme zistiť súradnice vektora v inej báza, postačí nám určiť koeficienty pri vyjadrení vektora ako LK novej bázy (ako vidno pri báze $\vec{u} = [1,2]; \vec{v} = [1,3]$)

> na prechod z jednej bázy do druhej budeme postupovať tak, že si najskôr vektory z prvej bázy vyjadríme v kanonickej báze prislúchajúcej danému vektorovému priestoru a z nej ich potom vyjadríme v druhej báze

- pre vektorový priestor $V_3 = \{[a,b,c]; a,b,c \in R\}$ bude kanonická báza:

$$\vec{u} = [1,0,0]$$
$$\vec{v} = [0,1,0]$$
$$\vec{w} = [0,0,1]$$

- pre vektorový priestor $V_4 = \{[a,b,c,d]; a,b,c,d \in R\}$ bude kanonická báza:

$$\vec{u} = [1,0,0,0]$$
$$\vec{v} = [0,1,0,0]$$
$$\vec{w} = [0,0,1,0]$$
$$\vec{x} = [0,0,0,1]$$
$$\vdots$$

- pre vektorový priestor $V_n = \{[a_1, a_2, \ldots, a_n]; a_1, a_2, \ldots, a_n \in R\}$ bude kanonická báza:

$$v_1 = [1,0,0,\ldots,0,0]$$
$$v_2 = [0,1,0,\ldots,0,0]$$
$$\vdots$$
$$v_n = \underbrace{[0,0,0,\ldots,0,1]}_{n}$$

- <u>súradnice vektora</u>

- pri báze vektorového priestoru sme si uviedli pojem súradnice vektora, teraz si ho zadefinujeme:

<u>Def.</u>

Súradnicami vektora $\vec{x}$ vzhľadom na bázu $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$ nazývame usporiadanú skupinu čísel $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ zo vzťahu $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$.

- majme dva vektory $\vec{x}, \vec{y}$ v báze $V[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$, potom platí:

$$\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$
$$\vec{y} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \cdots + y_n\vec{v}_n$$

- pre súradnice vektorov dostávame:

$$\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \qquad \vec{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$$

- ďalej uvažujme vektory: $\vec{x} + \vec{y}$ a $k.\vec{x}; k \in R$, takéto vektory vieme zostrojiť, ale nevieme povedať aké majú súradnice; na zistenie ich súradníc nám postačí jednoduchý výpočet:

$$\vec{x} + \vec{y} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n + y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \cdots + y_n\vec{v}_n =$$
$$= (x_1 + y_1)\vec{v}_1 + (x_2 + y_2)\vec{v}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\vec{v}_n$$

- odtiaľto pre súradnice vektora $\vec{x} + \vec{y}$ dostaneme:

$$\vec{x} + \vec{y} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n]$$

$$k.\vec{x} = k.(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = kx_1\vec{v}_1 + kx_2\vec{v}_2 + \cdots + kx_n\vec{v}_n$$

- pre súradnice vektora $k.x$ dostaneme:

$$k.\vec{x} = [kx_1, kx_2, \ldots, kx_n]$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{x} + \vec{y} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n] \\ \\ k.\vec{x} = [kx_1, kx_2, \ldots, kx_n] \end{array}}$$

<u>Pr.</u>

Určite súradnice vektora $\vec{x}$ v báze $\vec{u} = [1,1]; \vec{v} = [2,5]$, ak v báze $\vec{r} = [1,0]; \vec{s} = [0,4]$ platí $\vec{x} = [5, \frac{7}{4}]$:

- nech v kanonickej báze $[1,0]; [0,1]$ má vektor súradnice $[a,b]$, potom platí:

$$[a,b] = 5.\vec{r} + \tfrac{7}{4}.\vec{s}$$
$$[a,b] = 5.[1,0] + \tfrac{7}{4}.[0,4]$$
$$[a,b] = [5,0] + [0,7]$$
$$[a,b] = [5,7]$$

- vypočítali sme súradnice vektora $\vec{x}$ ($\vec{x} = [5,7]$)

- teraz prevedieme súradnice z kanonickej bázy do bázy $\vec{u} = [1,1]; \vec{v} = [2,5]$

$\vec{x} = [5,7] = k.\vec{u} + l.\vec{v}$

$[5,7] = k.[1,1] + l.[2,5]$

$[5,7] = [k,k] + [2l,5l]$

$[5,7] = [k+2l, k+5l]$

$5 = k + 2l \quad \wedge \quad 7 = k + 5l$

$k = 5 - 2l \qquad 7 = 5 - 2l + 5l = 5 + 3l$

$2 = 3l$

$k = \frac{11}{3} \qquad l = \frac{2}{3}$

$\vec{x} = \left[\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right]$

- <u>dvojrozmerný euklidovský priestor</u> (E_2 **)**

<u>Def.</u>

Dvojrozmerný euklidovský priestor je geometrický systém, pre ktorý platí:

1. obsahuje množinu všetkých bodov roviny
2. obsahuje dvojrozmerný priestor voľných vektorov (bázu tvoria dva rôzne LN vektory)
3. je definovaná vzdialenosť bodov

- stručne povedané dvojrozmerný euklidovský priestor je rovina, v ktorej pracujeme s bodmi a voľnými vektormi; a vieme v nej merať vzdialenosť

<u>Def.</u>

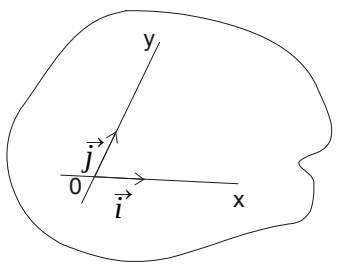
Dĺžka vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je reálne číslo $|\vec{a}|$, pre ktoré platí $|\vec{a}| = |AB|$.

<u>Def.</u>

Vektor, ktorého dĺžka je 1 sa nazýva jednotkový.

<u>Def.</u>

Súradnicová sústava $(0, x, y)$ v rovine je ľubovoľný bod 0 a dva jednotkové lineárne nezávislé vektory $\vec{i}, \vec{j}$, ktorých umiestnenia ležia v rovine.



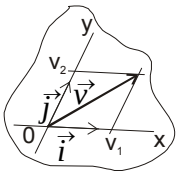
$(0, x, y)$

- v E_2 platia nasledovné vlastnosti:

1. súradnice vektora

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$$

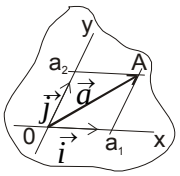
$$\boxed{\vec{v} = [v_1, v_2]}$$



2. súradnice bodu

Def.
Vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, ktorý má umiestnenie $\vec{a} = \overrightarrow{0A}$, sa nazýva polohový vektor bodu A.

Def.
Súradnice bodu sú súradnice jeho polohového vektora.

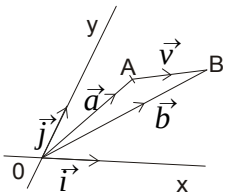


$$\boxed{A = [a_1, a_2] \Leftrightarrow \vec{a} = \overrightarrow{0A} = [a_1, a_2]}$$

3. súčet bodu a vektora

Def.
Súčtom bodu A a vektora $\vec{v}$ je bod $B = A + \vec{v}$, pričom platí $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

- bod A je určený polohovým vektorom $\vec{a} = [a_1, a_2]$ a bod B je určený polohovým vektorom $\vec{b} = [b_1, b_2]$, potom dostávame:

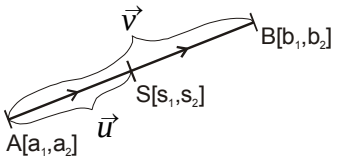


$$B = A + \vec{v}$$
$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{v}$$
$$[b_1, b_2] = [a_1, a_2] + [v_1, v_2] = [a_1 + v_1, a_2 + v_2]$$
$$b_1 = a_1 + v_1 \wedge b_2 = a_2 + v_2$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{B[b_1, b_2] = B[a_1 + v_1, a_2 + v_2]}$$

- vychádzajme zo zistenia: $b_1 = a_1 + v_1 \wedge b_2 = a_2 + v_2$, potom pre súradnice vektora $\vec{v}$ platí: $v_1 = b_1 - a_1 \wedge v_2 = b_2 - a_2$ a teda, ak poznáme súradnice začiatočného a koncového bodu vektora, tak vieme vypočítať aj súradnice vektora:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= \overrightarrow{AB} = B - A \\ \vec{v} &= \overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2] \end{aligned}}$$

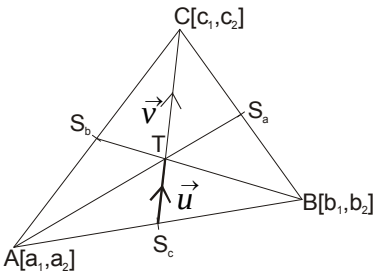
4. stred úsečky



$$\vec{v} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2]$$
$$\vec{u} = [s_1 - a_1, s_2 - a_2]$$
$$\vec{v} = 2\vec{u}$$
$$[b_1 - a_1, b_2 - a_2] = 2.[s_1 - a_1, s_2 - a_2]$$
$$[b_1 - a_1, b_2 - a_2] = [2s_1 - 2a_1, 2s_2 - 2a_2]$$
$$b_1 - a_1 = 2s_1 - 2a_1 \wedge b_2 - a_2 = 2s_2 - 2a_2$$
$$b_1 + a_1 = 2s_1 \qquad b_2 + a_2 = 2s_2$$
$$s_1 = \tfrac{b_1 + a_1}{2} \qquad s_2 = \tfrac{b_2 + a_2}{2}$$

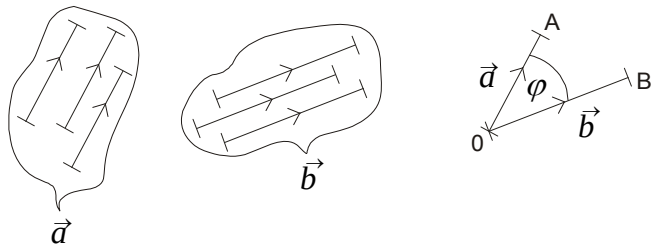
$$\boxed{S = \left[\tfrac{a_1 + b_1}{2}, \tfrac{a_2 + b_2}{2}\right]}$$

5. ťažisko trojuholníka



$$S_c = \left[\tfrac{a_1 + b_1}{2}, \tfrac{a_2 + b_2}{2}\right]$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{S_c C} = \left[c_1 - \tfrac{a_1 + b_1}{2}, c_2 - \tfrac{a_2 + b_2}{2}\right]$$
$$\vec{u} = \tfrac{1}{3}\vec{v} = \tfrac{1}{3}\left[c_1 - \tfrac{a_1 + b_1}{2}, c_2 - \tfrac{a_2 + b_2}{2}\right] =$$
$$= \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{2c_1 - a_1 - b_1}{2}, \tfrac{2c_2 - a_2 - b_2}{2}\right] = \left[\tfrac{2c_1 - a_1 - b_1}{6}, \tfrac{2c_2 - a_2 - b_2}{6}\right] =$$
$$= \overrightarrow{S_c T} \qquad T = [t_1, t_2]$$
$$\left[\tfrac{2c_1 - a_1 - b_1}{6}, \tfrac{2c_2 - a_2 - b_2}{6}\right] = \left[\tfrac{2t_1 - a_1 - b_1}{2}, \tfrac{2t_2 - a_2 - b_2}{2}\right]$$
$$2c_1 - a_1 - b_1 = 6t_1 - 3a_1 - 3b_1 \wedge 2c_2 - a_2 - b_2 = 6t_2 - 3a_2 - 3b_2$$
$$6t_1 = 2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \qquad 6t_2 = 2a_2 + 2b_2 + 2c_2$$
$$t_1 = \tfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \qquad t_2 = \tfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$
$$T = \left[\tfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \tfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right]$$

6. uhol vektorov



Def.

Uhol nenulových vektorov $\vec{a} = \overrightarrow{0A}, \vec{b} = \overrightarrow{0B}$ je konvexný uhol $\measuredangle\varphi = \measuredangle A0B$; $0° \le \varphi \le 180°$.

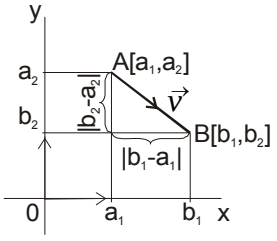
Def.

Nenulové vektory $\vec{a}, \vec{b}$ sú kolmé, ak $\varphi = 90°$.

7. vzdialenosť bodov (v karteziánskej sústave)

Def.

Súradnicová sústava $(0, x, y)$ v rovine sa nazýva karteziánska, ak jednotkové vektory $\vec{i}, \vec{j}$ sú kolmé.



$$|AB| = \sqrt{|a_1 - b_1|^2 + |a_2 - b_2|^2}$$

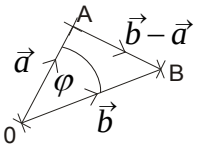
$$\boxed{|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}$$

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [b_1 - a_1, b_2 - a_2]$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2}}}$$

8. veľkosť uhla dvoch vektorov (v karteziánskej sústave)



$$\vec{a} = [a_1, a_2] \qquad \vec{b} = [b_1, b_2]$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} =$$

$$= \frac{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} - b_1^{\ 2} + 2a_1b_1 - a_1^{\ 2} - b_2^{\ 2} + 2a_2b_2 - a_2^{\ 2}}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

Pr.

Určite súradnice vektora $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, ak $A[1, 2]$ a $B[-4, 3]$:

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [b_1 - a_1, b_2 - a_2] = [-4 - 1, 3 - 2] = [-5, 1]$$

Pr.

Je daný vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = [2, -4]$, kde $B[-2, 3]$. Určite A:

$$v_1 = b_1 - a_1 \qquad a_1 = b_1 - v_1 = -2 - 2 = -4$$

$$v_2 = b_2 - a_2 \qquad a_2 = b_2 - v_2 = 3 + 4 = 7 \qquad A[-4, 7]$$

Pr.

Sú dané body $A[6, 2], B[0, 4], C[2, 0]$. Určite súradnice vrcholu D rovnobežníka $ABCD$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{BA} = [6, -2]$$

$$D = \vec{v} + C = [8, -2]$$

Pr.

Zistite, či body $A[3,6], B[1,4], C[5,2]$ tvoria trojuholník:

- určime si dva vektory: $\vec{u} = \overrightarrow{AC}, \vec{v} = \overrightarrow{AB}$, je zrejmé, že ak budú LZ, tak body ležia na jednej priamke, teda netvoria trojuholník

$$\vec{u} = [2,-4] \qquad \vec{v} = [-2,-2]$$
$$\vec{v} = k.\vec{u}$$
$$[-2,-2] = k.[2,-4]$$
$$[-2,-2] = [2k,-4k]$$
$$-2 = 2k \wedge -2 = -4k$$
$$k = -1 \qquad k = \tfrac{1}{2}$$ … sú LN, takže tvoria trojuholník

Pr.

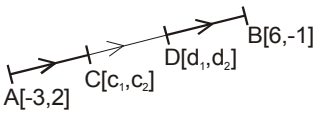
Sú dané body $A[-1,10], B[7,-3], C[9,4], D[1,7]$. Zistite či orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sú umiestneniami toho istého vektora:

$$\vec{u} = \overrightarrow{CD}, \vec{v} = \overrightarrow{AB}$$
$$v_1 = b_1 - a_1 \wedge v_2 = b_2 - a_2 \wedge u_1 = d_1 - c_1 \wedge u_2 = d_2 - c_2$$
$$v_1 = 8 \qquad v_2 = -13 \qquad u_1 = -8 \qquad u_2 = 3$$
$$\vec{v} = [8,-13] \qquad \vec{u} = [-8,3] \qquad \vec{u} \neq \vec{v}$$

Pr.

Nájdite bod, ktorý delí úsečku AB:

a) $A[-3,2], B[6,-1]$ v pomere $1:2$



$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}, \vec{u} = \overrightarrow{AC}, \vec{w} = \overrightarrow{DB}$$
$$\vec{v} = [9,-3]$$
$$\vec{u} = \tfrac{1}{3}\vec{v} = \tfrac{1}{3}[9,-3] = [3,-1]$$
$$C = A + \vec{u} = [-3+3, 2-1] = [0,1]$$
$$\vec{w} = \tfrac{1}{3}\vec{v} = \tfrac{1}{3}[9,-3] = [3,-1]$$
$$B = D + \vec{w}$$
$$D = B - \vec{w} = [6-3, -1+1] = [3,0]$$

b) $A[5,3], B[8,6]$ v pomere $2:3$

$$u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}, w = \overrightarrow{DB}$$
$$u = [3,3]$$
$$v = \tfrac{2}{5}u = \tfrac{2}{5}[3,3] = [\tfrac{6}{5}, \tfrac{6}{5}]$$
$$C = A + v = [5 + \tfrac{6}{5}, 3 + \tfrac{6}{5}] = [\tfrac{31}{5}, \tfrac{21}{5}]$$
$$w = \tfrac{2}{5}u = \tfrac{2}{5}[3,3] = [\tfrac{6}{5}, \tfrac{6}{5}]$$
$$B = D + w$$
$$D = B - w = [8 - \tfrac{6}{5}, 6 - \tfrac{6}{5}] = [\tfrac{34}{5}, \tfrac{24}{5}]$$

Pr.

Je daná úsečka $AB, A[1,-3], S[5,2]$. Určite B:

$$5 = \tfrac{1+b_1}{2} \wedge 2 = \tfrac{-3+b_2}{2}$$
$$b_1 = 9 \qquad b_2 = 7 \qquad B[9,7]$$

- <u>trojrozmerný euklidovský priestor</u> (E_3)

<u>Def.</u>

Trojrozmerný euklidovský priestor je geometrický systém, pre ktorý platí:

1. obsahuje množinu všetkých bodov v priestore
2. obsahuje trojrozmerný priestor voľných vektorov (bázu tvoria tri rôzne LN vektory)
3. je definovaná vzdialenosť bodov

- stručne povedané trojrozmerný euklidovský priestor je priestor, v ktorom pracujeme s bodmi a voľnými vektormi; a vieme v ňom merať vzdialenosť

<u>Def.</u>

Súradnicová sústava $(0, x, y)$ v priestore je ľubovoľný bod 0 a tri jednotkové lineárne nezávislé vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ktorých umiestnenia ležia v priestore.

- platia tie isté vlastnosti ako v E_2 :

1. súradnice vektora

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]}$$

2. súradnice bodu

$$\boxed{A = [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow \vec{a} = \overrightarrow{0A} = [a_1, a_2, a_3]}$$

3. súčet bodu a vektora

$$B = A + \vec{v}$$
$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{v}$$
$$[b_1, b_2, b_3] = [a_1, a_2, a_3] + [v_1, v_2, v_3] = [a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3]$$
$$b_1 = a_1 + v_1 \wedge b_2 = a_2 + v_2 \wedge b_3 = a_3 + v_3$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{B[b_1, b_2, b_3] = B[a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3]}$$

4. stred úsečky

$$\boxed{S = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right]}$$

5. ťažisko trojuholníka

$$T = \left[\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right]$$

6. uhol vektorov

- pozrite v E_2

7. vzdialenosť bodov

$$A=[a_1,a_2,a_3], B=[b_1,b_2,b_3]$$
$$\vec{v}=[v_1,v_2,v_3]$$

$$\boxed{|AB|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}}$$

$$\boxed{|\vec{v}|=\sqrt{v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}+v_3^{\ 2}}}$$

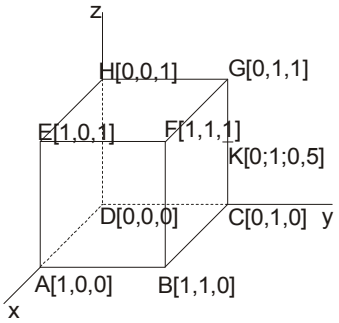
8. veľkosť uhla dvoch vektorov

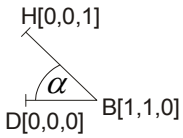
$$\boxed{\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

<u>Pr.</u>

V kocke $A-H$ určite:

a) uhol uhlopriečok BH, BD





- máme kocku s hranou veľkosti 1, teda stenová uhlopriečka je $\sqrt{2}$ a telesová $\sqrt{3}$

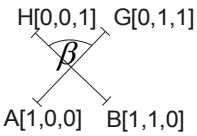
$$\vec{a}=\overrightarrow{BH}=[-1,-1,1] \quad |\vec{a}|=\sqrt{3}$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{BD}=[-1,-1,0] \quad |\vec{b}|=\sqrt{2}$$

$$\cos\alpha=\tfrac{1+1+0}{\sqrt{3}.\sqrt{2}}$$

$$\alpha \doteq 35°$$

b) uhol telesových uhlopriečok



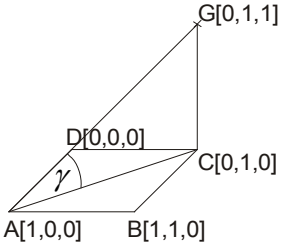
$$\vec{a}=\overrightarrow{BH}=[-1,-1,1] \quad |\vec{a}|=\sqrt{3}$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{AG}=[-1,1,1] \quad |\vec{b}|=\sqrt{3}$$

$$\cos\beta=\tfrac{1-1+1}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}$$

$$\beta \doteq 70{,}5°$$

c) uhol priamky AG a roviny ABC



$\vec{a} = \overrightarrow{AC} = [-1,1,0] \qquad |\vec{a}| = \sqrt{2}$

$\vec{b} = \overrightarrow{AG} = [-1,1,1] \qquad |\vec{b}| = \sqrt{3}$

$\cos\gamma = \frac{1+1+0}{\sqrt{2}.\sqrt{3}}$

$\gamma \doteq 35°$

d) dĺžku úsečky $AK, K = C \div G$

$A[1,0,0], K[0;1;0,5]$

$|AK| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (0-0,5)^2} = \sqrt{2,25} = 1,5$

Pr.

V karteziánskej $(0,x,y)$ nájdite bod B na osi y tak, aby mal od bodu $A[3,1,4]$ vzdialenosť 5:

$A[3,1,4], B[0,y,0]$

$|AB| = \sqrt{(3+0)^2 + (1+y)^2 + (4+0)^2} = 5$

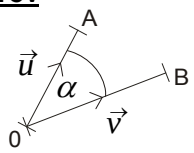
$\sqrt{9+1-2y+y^2+16} = 5$

$26 - 2y + y^2 = 25$

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$(y-1)(y-1) = 0 \qquad y = 1 \qquad B[0,1,0]$

- skalárny súčin vektorov



Def.

Skalárny súčin nenulových vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ je reálne číslo $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\alpha$, ak $\vec{u} = \vec{o} \vee \vec{v} = \vec{o}$, tak $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Veta (dá sa zovšeobecniť pre n-rozmerný vektorový priestor, $n \in N$)

Pre každé dva vektory $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3], \vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ platí: $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Dôkaz

$\vec{u} = [u_1, u_2, u_3], \vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\alpha = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Veta

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ \forall k \in R$:

1. $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$
2. $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} \perp \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{o} \vee \vec{v} = \vec{o})$
3. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
4. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$
5. $(k\vec{u}).\vec{v} = k.(\vec{u}.\vec{v})$

Dôkaz

1. $\vec{u}=[u_1,u_2,u_3]\ldots\vec{u}.\vec{u}=u_1u_1+u_2u_2+u_3u_3\ldots\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=\sqrt{u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}+u_3^{\ 2}}=|\vec{u}|$
2. $\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\alpha=0 \Leftrightarrow (\cos\alpha=0 \vee |\vec{u}|=0 \vee |\vec{v}|=0)$
   $\vec{u}\perp\vec{v} \quad \vec{u}=\vec{o} \quad \vec{v}=\vec{o}$
3. $\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2=v_1u_1+v_2u_2=\vec{v}.\vec{u}$
4. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=[u_1,u_2].([v_1,v_2]+[w_1,w_2])=[u_1,u_2].[v_1+w_1,v_2+w_2]=$
   $=u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2=(u_1v_1+u_2v_2)+(u_1w_1+u_2w_2)=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$
5. $(k\vec{u}).\vec{v}=(k.[u_1,u_2])[v_1,v_2]=[ku_1,ku_2][v_1,v_2]=ku_1v_1+ku_2v_2=$
   $=k(u_1v_1+u_2v_2)=k.(\vec{u}.\vec{v})$

<u>Pr.</u>

V rovine je vektor $\vec{v}=[-2,3]$, nájdite tri vektory naň kolmé:

$\vec{x}=[x_1,x_2]\ldots v.x=0$

$-2x_1+3x_2=0$

$x_1=3, x_2=2\ldots-2.3+3.2=-6+6=0 \qquad \vec{x}=[3,2]$

$x_1=-3, x_2=-2\ldots-2.(-3)+3.(-2)=6-6=0 \qquad \vec{x}=[-3,-2]$

$x_1=9, x_2=6\ldots-2.9+3.6=-18+18=0 \qquad \vec{x}=[9,6]$

<u>Pr.</u>

Určite $v\in R$ tak, aby $\vec{v}=[v,6,-4]$ bol kolmý na $\vec{u}=[1,-3,5]$:

$\vec{v}.\vec{u}=0$

$v-18-20=0$

$v=38 \qquad \vec{v}=[38,6,-4]$

<u>Pr.</u>

Nájdite vektor $\vec{v}$ LZ s vektorom $\vec{u}=[3,-2]$ tak, aby $\vec{u}.\vec{v}=26$:

$\vec{v}=k.\vec{u}=[3k,-2k]$

$\vec{u}.\vec{v}=9k+4k=26$

$13k=26$

$k=2 \qquad \vec{v}=[6,-4]$

<u>Pr.</u>

Pre vektory $\vec{u},\vec{v}$ platí $|\vec{u}|=3, |\vec{v}|=4, \alpha=\frac{2}{3}\pi$. Vypočítajte:

a) $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v}=3.4.\cos\frac{2}{3}\pi=-6$

b) $\vec{u}^2$

$\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=9$

c) $(\vec{u}+\vec{v})^2$

$(u+v)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2=13$

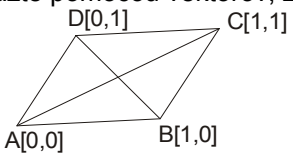
Pr.

Čo platí o vektoroch $\vec{u},\vec{v}$, ak $\vec{u}+\vec{v}\perp\vec{u}-\vec{v}$:

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=0$$
$$\vec{u}^2+\vec{u}\vec{v}-\vec{u}\vec{v}-\vec{v}^2=0$$
$$\vec{u}^2=\vec{v}^2$$
$$|\vec{u}|.|\vec{u}|.1=|\vec{v}|.|\vec{v}|.1 \qquad |\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2 \qquad |u|=|v|$$

Pr.

Dokážte pomocou vektorov, že uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé:



$$\vec{u}=\overrightarrow{AC}=[1,1],\vec{v}=\overrightarrow{DB}=[1,-1]$$
$$\vec{u}.\vec{v}=1-1=0 \qquad \vec{u}\perp\vec{v}$$

Pr.

Dokážte, že ak $\vec{u}\perp\vec{a}\wedge\vec{u}\perp\vec{b}$, tak vektor u je kolmý aj na každú LK $\vec{a},\vec{b}$:

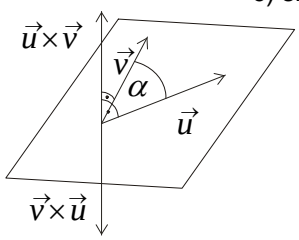
$$\vec{u}\perp\vec{a}\Rightarrow\vec{u}.\vec{a}=0$$
$$\vec{u}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{u}.\vec{b}=0$$
$$k.\vec{a}\ldots\vec{u}.(k.\vec{a})=k.(\vec{u}.\vec{a})=0$$
$$l.\vec{b}\ldots\vec{u}.(l.\vec{b})=l.(\vec{u}.\vec{b})=0$$
$$m.\vec{a}+n.\vec{b}\ldots\vec{u}.(m.\vec{a}+n.\vec{b})=\vec{u}.(m.\vec{a})+\vec{u}(n.\vec{b})=$$
$$=m.(\vec{u}.\vec{a})+n.(\vec{u}.\vec{b})=0.m+0.n=0$$

- <u>vektorový súčin vektorov</u>

<u>Def.</u>

Vektorový súčin vektorov $\vec{u},\vec{v}$ v trojrozmernom vektorovom priestore nazývame vektor $\vec{u}\times\vec{v}$, pre ktorý platí:

1. ak $\vec{u},\vec{v}$ sú LZ, tak $\vec{u}\times\vec{v}=o$
2. ak $\vec{u},\vec{v}$ sú LN, tak:
   a) $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\alpha$
   b) $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}\wedge(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}$
   c) smer vektora $\vec{u}\times\vec{v}$ je určený pravidlom pravej ruky:



Ak pravú ruku položíme na rovinu vektorov $\vec{u},\vec{v}$ tak, aby vektory vstupovali do dlane a prsty ukazovali od prvého vektora k druhému, tak palec ukáže smer vektorového súčinu.

<u>Veta</u>

$$\forall\vec{u}=[u_1,u_2,u_3],\vec{v}=[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3]:\vec{u}\times\vec{v}=[u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1]$$

Dôkaz

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3.\vec{i}+u_1v_2.\vec{k}+u_3v_1.\vec{j})-(u_3v_2.\vec{i}+u_2v_1.\vec{k}+u_1v_3.\vec{j})=$$
$$=(u_2v_3-u_3v_2).\vec{i}+(u_3v_1-u_1v_3).\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1).\vec{k}$$

- ukážeme si uľahčenie výpočtu vektorového súčinu je takýto postup:
  - majme dva vektory: $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3], \vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, spravíme si z nich takýto zápis

$$\begin{array}{|cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array}$$

  - súradnice násobíme po dvojiciach podľa šípok a potom odčítame a dostaneme známe: $[u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1]$

Pr.

Vypočítajte vektorový súčin:

a) $\vec{u} = [1, 3, -2], \vec{v} = [4, -1, 5]$

$$\begin{array}{|ccccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 4 & -1 \end{array}$$

$$13 \quad -13 \quad -13 \qquad \vec{u} \times \vec{v} = [13, -13, -13]$$

b) $\vec{u} = [2, 2, 2], \vec{v} = [4, 3, -1]$

$$\begin{array}{|ccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 4 & 3 \end{array}$$

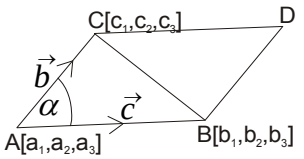
$$-8 \quad 10 \quad -2 \qquad \vec{u} \times \vec{v} = [-8, 10, -2]$$

Veta

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \ \forall k \in R$:

1. $\vec{v} = k.\vec{u} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = o$
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ antikomutatívne
3. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ nie je asociatívne
4. $(\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
5. $(k.\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$

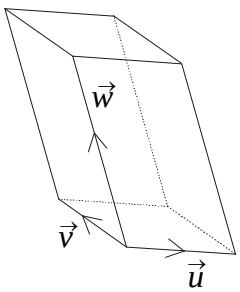
- obsah trojuholníka a rovnobežníka



$$S_\Delta = \frac{b.c.\sin\alpha}{2} = \frac{1}{2}.|\vec{b}|.|\vec{c}|.\sin\alpha = \frac{1}{2}|\vec{b} \times \vec{c}|$$

$$S_{\square} = |\vec{b} \times \vec{c}|$$

- objem rovnobežnostenu



$V = S_p.v = |(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}|$ - zmiešaný súčin vektorov

Neriešené úlohy

1. V pravidelnom šesťuholníku $A-F$ sú dané vektory $\vec{e}=\overrightarrow{AB},\ \vec{f}=\overrightarrow{BC}$. Vyjadrite pomocou nich vektory $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{EB},\vec{c}=\overrightarrow{FD},\vec{d}=\overrightarrow{ES},\vec{g}=\overrightarrow{BS}$.

2. V trojrozmernom vektorovom priestore zistite lineárnu závislosť vektorov:
a) $\vec{a}=[2,1,5];\vec{b}=[3,0,4];\vec{c}=[1,2,6]$ b) $a=[3,1,2];b=[1,1,0];c=[5,3,2]$
c) $\vec{a}=[2,-1,5];\vec{b}=[3,0,2];\vec{c}=[4,1,-1]$

3. V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stranou s dĺžkou $4\,cm$. Nech $E=A\div B, S=A\div C$.

Vzhľadom na bázu $\vec{e}=\overrightarrow{AE},\ \vec{f}=\overrightarrow{AS}$, určite súradnice vektorov: $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AC},\vec{c}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{BD}$.

4. Vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tvoria bázu vektorového priestoru. Dokážte, že jeho bázu tvoria aj vektory:
a) $\vec{a},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ b) $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{c},\vec{b}+\vec{c}$

5. Je daná úsečka AB, kde $A[-3,2];B[7,-3]$. Nájdite súradnice bodov, ktoré ju delia v pomere $3:2$.

6. Sú dané vektory $\vec{a}=[2,3,-1];\vec{b}=[1,-2,3];\vec{c}=[2,-1,1]$. Nájdite vektor $\vec{x}$ tak, že platí: $\vec{x}\perp\vec{a},\vec{x}\perp\vec{b},\vec{x}.\vec{c}=-6$.

7. Dokážte, že ak vektor $\vec{v}$ je kolmý na vektory $\vec{a},\vec{b}$, tak je kolmý aj na každú lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a},\vec{b}$.

8. Nájdite uhol vektorov $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n},b=\vec{m}-\vec{n}$, ak $\vec{m},\vec{n}$ sú jednotkové vektory, ktorých uhol je $120°$.

9. Pre vektory u,v platí: $|\vec{u}|=3,|\vec{v}|=4,\varphi=\frac{2}{3}.\pi$. Vypočítajte:
a) $\vec{u}.\vec{v}$ b) $\vec{u}^2$ c) $(\vec{u}+\vec{v})^2$ d) $|\vec{u}\times\vec{v}|$

10. Je daný vektor $\vec{a}=[6,3]$. Nájdite vektor $\vec{b}$ tak, aby:
a) $\vec{b}\perp\vec{a}\ \wedge\ |\vec{b}|=2$ b) $\vec{a}.\vec{b}=10\ \wedge\ \vec{b}$ bol lineárne závislý s $\vec{a}$

11. Odvoďte vzorec pre výpočet súradníc
a) stredu úsečky b) ťažiska trojuholníka c) ťažiska štvorstena pomocou súradníc vrcholov

12. V pravidelnom šesťuholníku $A-F$ je $A[3,0],C[0,\sqrt{3}],D[-1,0]$. Určite súradnice ostatných vrcholov.

13. Sú dané body $A[2,1,3];B[4,6,3];C[1,8,3];F[3,7,8]$. Určite súradnice bodov D,E,G,H, tak aby $ABCDEFGH$ bol rovnobežnosten.

14. Určite tretiu súradnicu vrcholu $C[0,1,c]$ rovnostranného trojuholníka $ABC, A[1,0,0]$, $B[0,0,1]$

25. ANALYTICKÁ GEOMETRIA LINEÁRNYCH ÚTVAROV

1. Analytická geometria
- analytické vyjadrenie útvaru, lineárne útvary

2. Analytické vyjadrenie priamky

3. Analytické vyjadrenie roviny

4. Vzájomné polohy priamok a rovín

5. Uhly priamok a rovín

6. Vzdialenosti bodov, priamok a rovín

……

- syntetická geometria (6.-4. tis. p.n.l.), zavŕšená bola v roku 1899 (Hilbert vytvoril axiomatický systém)
- geometria ako veda vznikla v 7.-6. stor. p.n.l (Pytagoras, Tales)
- Apolónius z Pergy v 3. stor. p.n.l. položil základy analytickej geometrie (elipsa, hyperbola, parabola, …)
- 17. stor. (Descartes, Fermat) rozvinuli analytickú geometriu

- geometrické pojmy sa opisujú pomocou čísel, rovníc, nerovníc a ich sústav, čím sa geometrické útvary menia na algebrické

Def.
Analytickým vyjadrením útvaru U nazývame takú rovnicu, nerovnicu alebo ich sústavu, že súradnice každého bodu útvaru jej vyhovujú a súradnice žiadneho bodu nepatriaceho útvaru U jej nevyhovujú U .

Def.
Geometrický útvar sa nazýva lineárny, ak jeho analytické vyjadrenie tvoria len lineárne rovnice a lineárne nerovnice.

- lineárne útvary sú: **priamka** a **rovina**

- parametrické vyjadrenie priamky

Def.
Smerový vektor priamky je každý nenulový vektor, ktorého umiestnenie leží na priamke.

- priamka je v rovine aj v priestore jednoznačne určená **dvoma rôznymi bodmi** alebo **bodom a smerovým vektorom**

$$X \in p \Leftrightarrow \vec{v} = t.\vec{s} \qquad X = A + \vec{v}$$

$\boxed{p : X = A + t.\vec{s}; t \in R}$ - **parametrická rovnica priamky**, t je parameter

- môžeme to zapísať aj takto:

$$p : x = a_1 + t.s_1$$
$$y = a_2 + t.s_2$$
$$z = a_3 + t.s_3; t \in R$$

Pr.

Napíšte parametrické vyjadrenie priamky $AB; A[1,2,3], B[4,3,2]$:

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = [3,1,-1]$$
$$p: x = 1 + 3t$$
$$y = 2 + t$$
$$z = 3 - t; t \in R$$

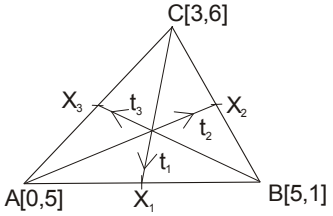
Pr.

Určite druhú súradnicu bodu $M[\pi, y]$ tak, aby ležal na priamke $RS, R[0,4], S[-2,-1]$:

$$\vec{s} = \overrightarrow{RS} = [-2,-5] \qquad \pi = -2t$$
$$p: x = 0 - 2t \qquad t = -\tfrac{\pi}{2}$$
$$y = 4 - 5t; t \in R \qquad y = 4 + \tfrac{5}{2}\pi \qquad M[\pi, 4 + \tfrac{5}{2}\pi]$$

Pr.

Parametricky vyjadrite ťažnice trojuholníka $ABC, A[0,5], B[5,1], C[3,6]$:



$X_1 = A \quad B \qquad X_2 = B \quad C \qquad X_3 = A \quad C$

$X_1[2{,}5;3] \qquad X_2[4;3{,}5] \qquad X_3[1{,}5;5{,}5]$

$\vec{t_1} = \overrightarrow{CX_1} = [-0{,}5;-3] \qquad p_1: x = 3 - 0{,}5t$

$y = 6 - 3t; t \in R$

$\vec{t_2} = \overrightarrow{AX_2} = [4;-1{,}5] \qquad p_2: x = 4t$

$y = 5 - 1{,}5t; t \in R$

$\vec{t_3} = \overrightarrow{BX_3} = [-3{,}5;4{,}5] \qquad p_3: x = 5 - 3{,}5t$

$y = 1 + 4{,}5t; t \in R$

Pr.

Zistite, či parametrické vyjadrenie $x = -t, y = 3 + t; t \in R$ určuje tú istú priamku ako parametrické vyjadrenie $x = 2 - s, y = 1; s \in R$:

- na to aby boli rovnaké nám postačí ukázať, že dva rôzne body patria obom priamkam, keďže dva rôzne body určujú celú priamku
- ak nájdeme bod, ktorý na jednej leží a na druhej nie, tak priamky sú rôzne

$p: x = -t \qquad q: x = 2 - s$

$y = 3 + t; t \in R \qquad y = 1; s \in R$

$t = 0 \ldots A[0,3]$

$t = 1 \ldots B[-1,4]$

$0 = 2 - s$

$3 = 1 \ldots A \notin q$

- sú to dve rôzne priamky

Pr.

Sú dané body $A[2,3,4], B[6,0,-2], C[4,5,1]$. Napíšte parametrickú rovnicu priamky $p, A \in p, p \parallel BC$:

- aby boli priamky rovnobežne, tak musia mať rovnakú smerový vektor

$$\vec{s} = \overrightarrow{CB} = [2,-5,-3]$$
$$p: x = 2 + 2t, y = 3 - 5t, z = 4 - 3t; t \in R$$

Pr.

Je daná priamka $p: x = 1 - 3t, y = -2 + 2t; t \in R$:

a) určite smerový vektor

$$\vec{s} = [-3, 2]$$

b) určite súradnice bodu P, ktorému prislúcha parameter $t = 1{,}5$

$$P = [1 - 3.1{,}5; -2 + 2.1{,}5] = [-3{,}5; 1]$$

c) zistite, či body $D[-5, 2], E[3,4]$ ležia na p

$-5 = 1 - 3t \wedge 2 = -2 + 2t$ $\qquad$ $3 = 1 - 3t \wedge 4 = -2 + 2t$

$-6 = -3t \quad 4 = 2t$ $\qquad$ $2 = -3t \quad 6 = 2t$

$t = 2 \quad t = 2$ $\qquad$ $t = -\frac{2}{3} \quad t = 3$

$D \in p$ $\qquad$ $E \notin p$

d) určite $y \in R$ tak, aby platilo: $C[3, y] \in p$

$3 = 1 - 3t \wedge y = -2 + 2t$

$2 = -3t$

$t = -\frac{2}{3} \qquad y = -2 + 2t = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$ $\qquad$ $C[3, -\frac{10}{3}]$

e) určite priesečníky priamky so súradnicovými osami

$x \ \ldots \ y = 0$ $\qquad$ $y \ \ldots \ x = 0$

$0 = -2 + 2t$ $\qquad$ $0 = 1 - 3t$

$t = 1$ $\qquad$ $t = \frac{1}{3}$

$x = 1 - 3 = -2$ $\qquad$ $y = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$

$P_x[-2, 0]$ $\qquad$ $P_y[0, -\frac{4}{3}]$

Pr.

Nájdite priesečník priamky $q: x = 2 - 3t, y = 1 - t, z = 3 + 2t; t \in R$ sa súradnicovou rovinou xy. Pretína priamka q os z?

$q: x = 2 - 3t$

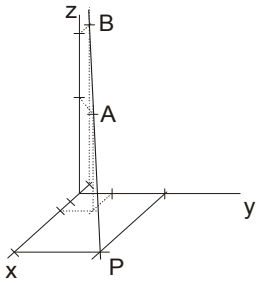
$y = 1 - t$

$z = 3 + 2t; t \in R$

$A[2,1,3]$

$\vec{s} = [-3, -1, 2]$

$B[-1, 0, 5]$



- aby priamka pretínala os z, tak musí platiť $x = 0 \wedge y = 0$:

$0 = 2 - 3t \ \ldots \ t = \frac{2}{3} \wedge 0 = 1 - t \ \ldots \ t = 1$, teda os nepretína (rôzne t)

- pre priesečník s rovinou xy platí: $P[x, y, 0]$

$0 = 3 + 2t \ \ldots \ t = -\frac{3}{2}$

$x = 2 - 3.\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{2}$

$y = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ $\qquad$ $P[\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 0]$

Pr.

Napíšte parametrické vyjadrenie priamky p, ktorá prechádza bodom $M[1,3,6]$ a je rovnobežná:

a) s osou z

$$\vec{s_1} = [0,0,1] \ldots \ p_a: x = 1, y = 3, z = 6 + t; t \in R$$

b) s osou x

$$\vec{s}_2 = [1,0,0] \ldots \; p_b : x = 1 + t, y = 3, z = 6; t \in R$$

c) s rovinou xy

- bude taká istá ako v b)

- ak by sme chceli parametricky vyjadriť úsečku AB, tak to bude takto:

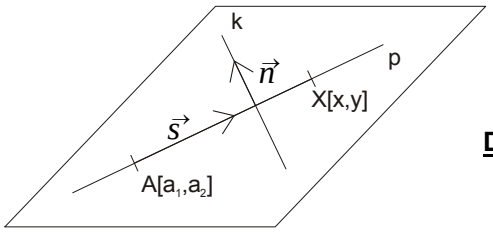
$$AB : X = A + t.\vec{s}; t \in \langle 0, b \rangle, (B = A + b.\vec{s})$$

- polpriamku by sme vyjadrili takto:

$$\overrightarrow{AB} : X = A + t.s; t \in \langle 0, \infty)$$

$$\overrightarrow{BA} : X = A + t.s; t \in (\infty, 0\rangle$$

- <u>všeobecná rovnica priamky v rovine</u>



- priamka je v rovine určená **bodom a vektorom na ňu kolmým**

<u>Def.</u>

Normálový vektor $\vec{n} = [a, b]$ je nenulový vektor kolmý na priamku.

$$\vec{s} = [x - a_1, y - a_2]$$

$$X \in p \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{s}$$

$$\vec{n}.\vec{s} = 0$$

$$a(x - a_1) + b(y - a_2) = 0$$

$$ax + by + \underbrace{(-aa_1 - ba_2)}_{c} = 0$$

$$\boxed{p : ax + by + c = 0; a, b, c \in R, a \neq 0 \vee b \neq 0}$$

- **všeobecná rovnica priamky v rovine**

> uvažujme o podmienke $a \neq 0 \vee b \neq 0$:

- ak by boli obe nulové, dostali by sme rovnicu:

$0x + 0y + c = 0 \ldots c = 0$ a jej vyhovujú všetky body roviny, takže to nie je rovnica priamky

$\ldots c \neq 0$ to by nebola rovnica ani priamky ani roviny

<u>Pr.</u>

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky p, ktorá je určená bodom $M[1,3]$ a normálovým vektorom $\vec{n} = [2, -3]$. Nájdite dva smerové vektory:

$$p : ax + by + c = 0$$

$$p : 2x - 3y + c = 0$$ > c môžeme určiť dvoma spôsobmi:

1. $c = -aa_1 - ba_2 = -1.2 - 3.(-3) = 7$
2. dosadíme do rovnice súradnice bodu a vypočítame c

$$2.1 - 3.3 + c = 0$$

$$c = 7$$

- máme všeobecnú rovnicu priamky $p: 2x - 3y + 7 = 0$

- smerový vektor tak isto môžeme určiť dvoma spôsobmi:
  1. nájdeme ďalší bod na priamke a dva body priamky určujú smerový vektor

$x = 2 \ldots 11 = 3y$

$y = \frac{11}{3}$ $\quad A[2, \frac{11}{3}]$ $\quad \vec{u} = \overrightarrow{MA} = [1, \frac{2}{3}]$

$x = 3 \ldots 13 = 3y$

$y = \frac{13}{3}$ $\quad B[3, \frac{13}{3}]$ $\quad \vec{v} = \overrightarrow{MB} = [2, \frac{4}{3}]$

  2. využijeme vlastnosť $\vec{n}.\vec{s} = 0$

$\vec{n} = [a, b], \vec{s} = [s_1, s_2]$

$a.s_1 + b.s_2 = 0$

$a.(k.b) + b.(-k.a) = 0$

$\vec{s} = [k.b, k.(-a)]; k \in R$

$\vec{s} = [3, 2]$

$\vec{s}' = [6, 4]$

Pr.

Je daná priamka $p: x - 2y + 1 = 0$ určite:

a) normálový vektor $\vec{n} = [1, -2]$ b) smerový vektor $\vec{s} = [2, 1]$

c) $m, A[1, m]$

$1 - 2y + 1 = 0$

$y = 1 \quad A[1, 1]$

d) priesečník s osou y

$x = 0 \ldots 0 - 2y + 1 = 0$

$y = \frac{1}{2}$ $\quad P_y[0, \frac{1}{2}]$

Pr.

Určite priamku $p: x = 2 - t, y = 3 - 2t; t \in R$ všeobecnou rovnicou:

- sú dva postupy:

1. určíme si normálový vektor

$p: x = 2 - t$

$y = 3 - 2t; t \in R$

$\vec{s} = [-1, -2]$

$\vec{s}.\vec{n} = 0$

$\vec{n} = [-2, 1]$

$p: -2x + y + c = 0$

$A[2, 3]$

$-4 + 3 + c = 0$

$c = 1$

$p: -2x + y + 1 = 0$

$p: 2x - y - 1 = 0$

2. odstránime parameter

$x = 2 - t \quad | .2$

$y = 3 - 2t \quad | .(-1)$

$2x = 4 - 2t$

$-y = -3 + 2t$

$2x - y = 1$

$p: 2x - y - 1 = 0$

Pr.

Určite priamku $p: x-3y+5=0$ parametrickou rovnicou:

$p: x-3y+5=0$ $\quad x=1 \ldots y=2 \quad A[1,2]$

$\vec{n}=[1,-3] \quad \vec{s}=[3,1]$ $\quad p: x=1+3t$

$y=2+t; t \in R$

Pr.

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky q, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: 2x-3y+1=0$ a prechádza bodom $A[2,5]$:

- keďže sú rovnobežné, tak budú mať rovnaký normálový vektor $\vec{n}=[2,-3]$

$q: 2x-3y+c=0 \quad A[2,5]$

$4-15+c=0 \quad c=11$

$q: 2x-3y+11=0$

Pr.

Určite všeobecnou rovnicou kolmicu na priamku $p: 2x-7y+3=0$, ktorá prechádza bodom $K[3,5]$:

$\vec{s}_k=\vec{n}_p=[2,-7] \quad \vec{n}_k=[7,2]$

$k: 7x+2y+c=0$

$21+10+c=0 \quad c=-31$

$k: 7x+2y-31=0$

Pr.

Určite všeobecnú rovnicu osi úsečky $AB, A[-2,3], B[4,7]$:

$S[1,5]$

$\vec{n}=\overrightarrow{SB}=[3,2]$

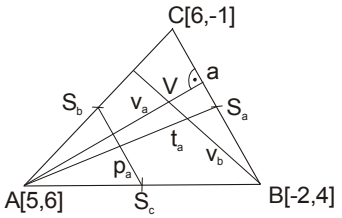
$o: 3x+2y+c=0$

$3+10+c=0 \quad c=-13$

$o: 3x+2y-13=0$

Pr.

Je daný $\Delta ABC, A[5,6], B[-2,4], C[6,-1]$. Nájdite:



a) všeobecnú rovnicu a

$\vec{s}_a=\overrightarrow{BC}=[8,-5] \quad \vec{n}_a=[5,8]$

$a: 5x+8y+c=0 \quad B[-2,4]$

$-10+32+c=0 \quad c=-22$

$a: 5x+8y-22=0$

b) všeobecnú rovnicu t_a

$S_a[2;1{,}5] \quad \vec{s}_{t_a}=\overrightarrow{S_aA}=[3;4{,}5] \quad \vec{n}_{t_a}=[4{,}5;-3]$

$t_a: 4{,}5x-3y+c=0 \quad A[5,6]$

$22{,}5-18+c=0 \quad c=-4{,}5$

$t_a: 4{,}5x-3y-4{,}5=0$

c) všeobecnú rovnicu v_a

$$\vec{n}_{v_a} = \vec{s}_a = [8,-5]$$

$$v_a : 8x - 5y + c = 0 \qquad A[5,6]$$

$$40 - 30 + c = 0 \qquad c = -10$$

$$v_a : 8x - 5y - 10 = 0$$

d) všeobecnú rovnicu strednej priečky rovnobežnej s a

$$\vec{n}_{p_a} = \vec{n}_a = [5,8]$$

$$p_a : 5x + 8y + c = 0 \qquad S_b[5{,}5; 2{,}5]$$

$$27{,}5 + 20 + c = 0 \qquad c = -47{,}5$$

$$p_a : 5x + 8y - 47{,}5 = 0$$

e) súradnice päty v_a

- bude to priesečník a a v_a, označme ho $P_{v_a}[a_1, a_2]$
- prienik dvoch priamok zistíme tak, že vyriešime sústavu pozostávajúcu z dvoch rovníc:

$$5a_1 + 8a_2 = 22 \quad |.5$$

$$8a_1 - 5a_2 = 10 \quad |.8$$

$$25a_1 + 40a_2 = 110$$

$$64a_1 - 40a_2 = 80$$

$$89a_1 = 190$$

$$a_1 = \tfrac{190}{89} \qquad a_2 = \tfrac{22-5a_1}{8} = \tfrac{126}{89} \qquad P_{v_a}\left[\tfrac{190}{89}, \tfrac{126}{89}\right]$$

f) $|v_a|$

$$\vec{v}_a = \overrightarrow{P_{v_a}A} = \left[\tfrac{255}{89}, \tfrac{408}{89}\right]$$

$$|\vec{v}_a| = \sqrt{\left(\tfrac{255}{89}\right)^2 + \left(\tfrac{408}{89}\right)^2} = \tfrac{51\sqrt{89}}{89}$$

g) súradnice ortocentra V

$$v_a : 8x - 5y - 10 = 0$$

$$\vec{n}_{v_b} = [1,-7]$$

$$v_b : x - 7y + c = 0 \qquad B[-2,4]$$

$$-2 - 28 + c = 0 \qquad c = 30$$

$$v_b : x - 7y + 30 = 0$$

$$8x - 5y - 10 = 0$$

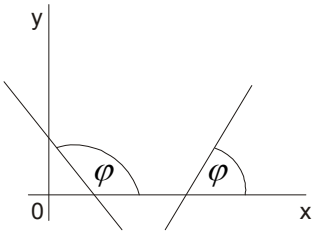
$$x - 7y + 30 = 0$$

$$x = 7y - 30$$

$$56y - 250 = 0$$

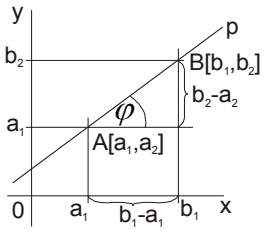
$$y = \tfrac{125}{28} \qquad x = \tfrac{5}{4} \qquad V\left[\tfrac{5}{4}, \tfrac{125}{28}\right]$$

- <u>smernicová rovnica priamky v rovine</u>



<u>Def.</u>

1. Smerový uhol priamky $p \parallel x$ je nulový.
2. Smerový uhol priamky $p \nparallel x$ je uhol, ktorý zviera časť priamky, ktorá je nad osou x, s kladným smerom osi x. $\varphi \in \langle 0°, 180°)$

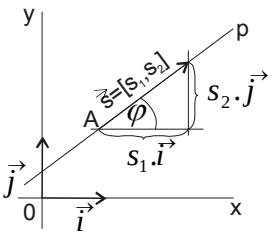


$$\boxed{k = \mathrm{tg}\varphi = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}}$$

<u>Def.</u>

Smernica priamky $p \nparallel x$ je číslo $k = \mathrm{tg}\varphi$. Smernica priamky $p \parallel x$ neexistuje.

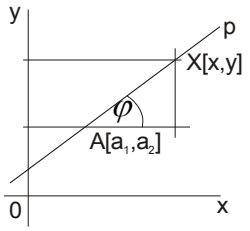
- ďalej uvažujme takto, súradnicovú sústavu považujme za dvojrozmerný priestor, určený ortogonálnou (kolmou) bázou jednotkových vektorov $\vec{i}, \vec{j}$:



$$s = s_1\vec{i} + s_2\vec{j}$$

$$\boxed{k = \mathrm{tg}\varphi = \frac{s_2\vec{i}}{s_1\vec{j}} = \frac{s_2}{s_1}}$$

- je zrejmé, že pre určenie danej priamky nám nebude stačiť iba jej smernica, keďže nekonečne veľa priamok môže mať tú istú smernicu, ale budeme potrebovať aj iný údaj, postačí nám napríklad jeden bod a vieme určiť danú priamku



$$X \in p \Leftrightarrow \mathrm{tg}\varphi = \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

$$k(x - a_1) = y - a_2$$

$$y = kx + \underbrace{a_2 - ka_1}_{q}$$

$$\boxed{p : y = kx + q;\ p \nparallel x}$$

- **smernicová rovnica priamky v rovine**

- ak $x = 0$, tak dostávame bod $[0, q]$, čo je priesečník priamky s osou y

Pr.

Napíšte smernicovú, všeobecnú a parametrickú rovnicu priamky p, ktorá prechádza bodom $A[1,3]$ a s osou x zviera uhol $\alpha = 135°$:

1. smernicová rovnica

$k = \mathrm{tg}\alpha = -1$ $\quad p: y = -x + q$ $\quad A[1,3]$

$3 = -1 + q$ $\quad p: y = -x + 4$

2. všeobecná rovnica

- vypočítame ju zo smernicovej rovnice

$p: y = -x + 4$

$p: x + y - 4 = 0$

3. parametrická rovnica

- môžeme ju vyjadriť pomocou smerového vektora

$p: x = 1 + t$

$y = 3 - t; t \in R$

- alebo zo všeobecnej rovnice:

$p: x = t$

$y = 4 - t; t \in R$

Pr.

Určite smerový uhol priamky $p: 2x - 2\sqrt{3}y + 5 = 0$:

$y = \frac{2x+5}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{2\sqrt{3}}$

$k = \frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{tg}\alpha \quad \alpha = 30°$

- majme priamku p, ktorá má smernicu k_1, uvažujme priamku q, kolmú na p, zaujíma nás jej smernica:

- nech priamka p má smerový vektor $\vec{s}_p = [s_1, s_2]$, potom pre smernicu platí: $k_1 = \frac{s_2}{s_1}$
- q, je kolmá na p, teda jej smerový vektor bude normálový vektor priamky p, čiže $\vec{s}_q = [s_2, -s_1]$ a jej smernica $k_2 = -\frac{s_1}{s_2}$
- keď si porovnáme smernice, tak dostávame $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, čiže platí:

$k_1.k_2 = -1$

$$\boxed{p \perp q \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1}$$

Pr.

Určite smernicovú rovnicu priamky r, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2x - 3$ a prechádza bodom $M[1,4]$:

$k_p = 2 \quad k_p.k_r = -1 \quad k_r = -\frac{1}{2}$

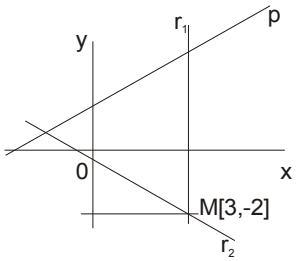
$r: y = -\frac{1}{2}x + q \quad M[1,4]$

$4 = -\frac{1}{2} + q \quad q = \frac{9}{2}$

$r: y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

Pr.

Určite priamku, ktorá prechádza bodom $M[3,-2]$ a s priamkou $p: 2x-2\sqrt{3}+5=0$ zviera uhol $\alpha = 60°$:



$p: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{2\sqrt{3}}$

$\varphi = 30°$

$\omega_1 = 90°$ $\qquad$ $\omega_2 = 180° - 30° = 150°$

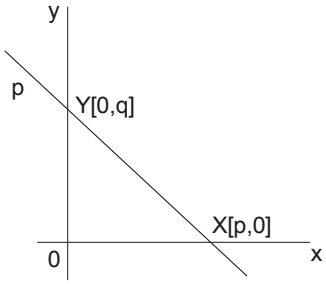
$r_1: x = 3$ $\qquad$ $k = \mathrm{tg}(180° - 30°) = -\mathrm{tg}30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$x + 0y - 3 = 0$ $\qquad$ $r_2: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + q$ $\qquad$ $M[3,-2]$

$-2 = -\sqrt{3} + q$ $\qquad$ $q = \sqrt{3} - 2$

$r_2: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} - 2$

- <u>úsekový tvar rovnice priamky v rovine</u>



- úsečka XY je úsek priamky p medzi súradnicovými osami

$p: ax + by + c = 0; c \neq 0$

$ax + by = -c$

$\frac{a}{-c}x + \frac{b}{-c}y = 1$

$\frac{x}{\frac{-c}{a}} + \frac{y}{\frac{-c}{b}} = 1$

$x = 0 \ldots y = -\frac{c}{b} = q$

$y = 0 \ldots x = -\frac{c}{a} = p$

$\boxed{p: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$

- úseková rovnica priamky v rovine

Pr.

Napíšte úsekovú a všeobecnú rovnicu priamky $AB, A[3,0], B[0,4]$:

- tieto dva body ležia na osiach, takže hneď vidno: $p = 3, q = 4$

> dostávame rovnicu: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, na určenie všeobecnej rovnice nám postačí túto rovnicu anulovať a vynásobiť dvanástimi:

$p: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 1 = 0$

$p: 4x + 3y - 12 = 0$

Pr.

Určite rovnicu priamky, ktorej úsek je rozpolený bodom $P[2,-1]$:

- potrebujeme určiť body $A[p,0], B[0,q]$, postačí nám nato vzorec pre stred úsečky a dostaneme: $2 = \frac{p+0}{2} \wedge -1 = \frac{q+0}{2} \ldots \; p = 4, q = -2$

$\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$ $\qquad$ $p: x - 2y - 4 = 0$

Pr.

Určite priamku, ktorá prechádza bodom $P[6,5]$ a na osiach určuje úseky v pomere $3:5$

- bude platiť: $p = 3n, q = 5n; n \neq 0$, potom dostávame rovnicu: $\frac{x}{3n} + \frac{y}{5n} = 1$, je zrejmé, že ak túto rovnicu vynásobíme $15n$, tak žiadne n neovplyvní výslednú rovnicu a teda to bude platiť pre všetky n

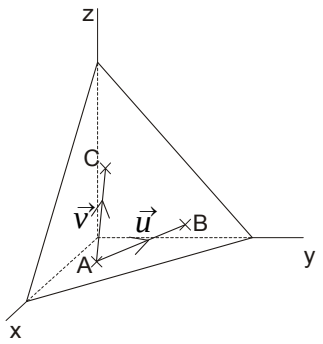
> to znamená, že výsledná rovnica bude: $p: 5x + 3y - 15n = 0$, teraz nám postačí do rovnice dosadiť bod P:

$$30 + 15 - 15n = 0$$

$$45 = 15n \qquad n = 3$$

$$p: 5x + 3y - 45 = 0$$

- <u>parametrické vyjadrenie roviny</u>



- rovina je v priestore jednoznačne určená **troma rôznymi nekolineárnymi bodmi** a **dvomi lineárne nezávislými vektormi**

<u>Def.</u>

Smerový vektor roviny ρ je každý nenulový vektor, ktorého umiestnenie leží v rovine ρ.

- všetky smerové vektory roviny tvoria dvojrozmerný vektorový priestor

$$X \in \rho \Leftrightarrow \vec{x} = r.\vec{u} + s.\vec{v} \qquad X = A + \vec{x}$$

$\boxed{\rho: X = A + r.\vec{u} + s.\vec{v}; r, s \in R}$ - **parametrická rovnica roviny**, r, s sú parametre

- môžeme to zapísať aj takto:

$$\rho: x = a_1 + r.u_1 + s.v_1$$
$$y = a_2 + r.u_2 + s.v_2$$
$$z = a_3 + r.u_3 + s.v_3; r, s \in R$$

Pr.

Parametricky vyjadrite rovinu ρ, ktorá je tvorená bodmi:

a) $A[2,1,-2], B[3,1,2], C[-1,-3,5]$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [1,0,4]$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = [-3,-4,7]$$

$$\rho: x = 2 + r - 3s$$
$$y = 1 - 4s$$
$$z = -2 + 4r + 7s; r, s \in R$$

b) $K[0,1,2], L[-1,-2,0], M[2,1,0]$

$\vec{u} = \overrightarrow{KL} = [-1,-3,-2]$

$\vec{v} = \overrightarrow{KM} = [2,0,-2]$

$\rho: x = -r + 2s$
$y = 1 - 3r$
$z = -2 - 2r - 2s; r, s \in R$

Pr.

Parametricky vyjadrite rovinu $\rho = \overrightarrow{pA}$, kde $A[4,-2,5]; p: x = 1 - 2t, y = 4 + t, z = -t; t \in R$:

- na určenie roviny nám postačí určiť ďalšie dva body , tie dostaneme dosadením za parameter do rovnice priamky:

$p: x = 1 - 2t$
$y = 4 + t$
$z = -t; t \in R$

$t = 0 \ldots B[1,4,0]$ $\quad t = 1 \ldots B[-1,5,-1]$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [-3,6,-5]$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = [-5,7,-6]$

$\rho: x = 4 - 3r - 5s$
$y = -2 + 6r + 7s$
$z = 5 - 5r - 6s; r, s \in R$

Pr.

Zistite, či bod $R[1,4,-5]$ leží v rovine $\rho: x = 1 - t - s, y = 2 + t - s, z = 4 + t + 2s; t, s \in R$:

- dosadíme bod do rovnice roviny ak dostaneme rovnaké parametre, tak bod do roviny patrí, a ak nie, tak do roviny nepatrí:

$1 = 1 - t - s \ \wedge \ 4 = 2 + t - s \ \wedge \ z = 4 + t + 2s$

$t = -s \qquad 2 = -2s \qquad -5 = 4 + 1 - 2$

$s = -1 \qquad -5 \neq 3$

> dosadili sme do poslednej rovnice vypočítané parametre a tie jej nevyhovovali, to znamená že $R \notin \rho$

Pr.

Je daná rovina $\rho: x = 1 + t - s, y = t, z = 2 + t - s; t, s \in R$. Nájdite jej priesečníky so súradnicovými osami a jej priesečnicu a s rovinou xz:

$y = 0, z = 0 \ldots \qquad x = 1 + t - s = 1 + 0 - 2 = -1$

$0 = t$

$s = 2 \qquad X[-1,0,0]$

$x = 0, z = 0 \ldots \qquad t = s - 1$

$y = t$

$0 = 2 + s - 1 - s \ldots 0 \neq 1 \qquad Y$ neexistuje

$y = 0, z = 0 \ldots \qquad s = 1$

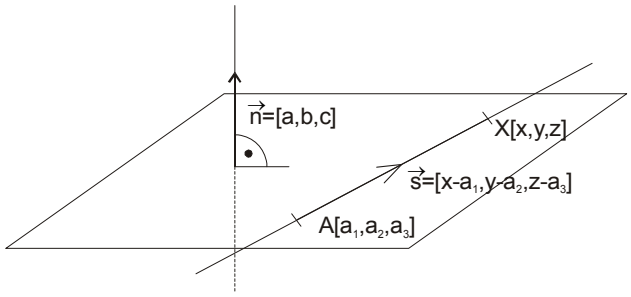
$0 = t$

$z = 2 + 0 - 1 = 1 \qquad Z[0,0,1]$

$u = \overrightarrow{XZ} = [1,0,1]$

$a: x = -1 + r$
$y = 0$
$z = r; r \in R$

- <u>všeobecná rovnica roviny</u>



<u>Def.</u>

Normálový vektor roviny je smerový vektor priamky kolmej na rovinu.

$$\vec{s} = [x - a_1, y - a_2, z - a_3]$$
$$X \in p \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{s}$$
$$\vec{n}.\vec{s} = 0$$
$$a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3) = 0$$
$$ax + by + cz + \underbrace{(-aa_1 - ba_2 - ca_3)}_{d} = 0$$

$$\boxed{p: ax + by + cz + d = 0; a, b, c, d \in R, a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0}$$

- všeobecná rovnica roviny

> uvažujme o podmienke $a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0$:

- ak by boli všetky nulové, dostali by sme rovnicu:

$0x + 0y + 0z + d = 0 \ldots d = 0$ a jej vyhovujú všetky body priestoru, takže to nie je rovnica roviny

$\ldots d \neq 0$ to by bola rovnica, ktorej nevyhovuje žiaden bod priestoru, čiže to nie je rovnica roviny

> ak $d = 0$, dostávame rovnicu $ax + by + cz = 0$ a táto rovina prechádza bodom $O[0, 0, 0]$

<u>Pr.</u>

Napíšte rovnicu roviny α, ktorá je určená bodom $A[4, -2, 5]$ a normálovým vektorom $\vec{n} = [-1, 4, 3]$:

$$\alpha: \ ax + bz + cz + d = 0$$
$$-x + 4z + 3z + d = 0$$
$$-4 - 8 + 15 + d = 0 \qquad d = -3$$
$$\alpha: \ ax + bz + cz - 3 = 0$$

<u>Pr.</u>

Je daná rovina $\rho: x + 2y - 3z + 6 = 0$. Určite jej normálový vektor, zistite, či obsahuje bod $A[1, 4, 3]$. Zistite jej priesečníky s osami x a y, nájdite priesečnicu s rovinou xy:

$$\vec{n} = [1, 2, -3]$$
$$A[1, 4, 3] \ldots 1 + 8 - 9 + 6 = 6 \neq 0$$
$$A \notin \rho$$

$y = 0, z = 0 \ldots X[-6,0,0]$

$x = 0, z = 0 \ldots Y[0,-3,0]$

- priesečnicu určíme tak, že za z dosadíme nulu (pretože priesečnicu tvoria body $[x, y, 0]$):

$\rho : x + 2y - 3z + 6 = 0$

$z = 0$

$p : x + 2y + 6 = 0$

Pr.

Napíšte rovnicu roviny α, ktorá je rovnobežná s rovinou $\beta : x + 2y - 3z + 6 = 0$ a obsahuje bod $A[3,2,1]$:

- keď majú byť rovnobežné, tak majú rovnaký normálový vektor, teda platí: $\alpha : x + 2y - 3z + d = 0$, dosadíme súradnice bodu A a dostávame:

$3 + 4 - 3 + d = 0$

$d = -4$

$\alpha : x + 2y - 3z - 4 = 0$

Pr.

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny:

a) $\rho : x = 2 - t + 2s$

$y = 1 + 2t - s$ $\quad A[2,1,-3]$

$z = -3 + t + s; t, s \in R$ $\quad \vec{u} = [-1,2,1]$

$\vec{v} = [2,-1,1]$

- na určenie všeobecnej rovnice potrebujeme bod a normálový vektor, bod už máme a normálový vektor je vektor kolmý na rovinu, čiže kolmý na všetky vektory v rovine

> máme dva smerové vektory, ktoré sú lineárne nezávislé a to znamená, že môžeme spraviť ich vektorový súčin a dostaneme vektor na ne kolmý

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}$$

$3 \quad 3 \quad -3$ $\qquad \vec{u} \times \vec{v} = [3,3,-3]$

$\vec{n} = [1,1,-1]$

$\rho : x + y - z + d = 0$

$2 + 1 + 3 + d = 0 \qquad d = -6$

$\rho : x + y - z - 6 = 0$

b) $\rho = \overleftrightarrow{ABC}; A[1,1,0], B[-2,0,1], C[0,1,3]$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [-3,-1,1]$

$$\begin{array}{ccccc} -3 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = [-1,0,3]$ $\qquad -3 \quad 8 \quad -1$ $\qquad \vec{u} \times \vec{v} = [-3,8,-1]$

$\vec{n} = [-3,8,-1]$

$\rho : -3x - 8y - z + d = 0$

$-3 + 8 + d = 0 \qquad d = 5$

$\rho : -3x - 8y - z + 5 = 0$

Pr.

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je kolmá na priamku $p: x = 1 + 2t, y = 3 + t,$ $z = 4 - t; t \in R$ a prechádza bodom $A[1,2,3]$:

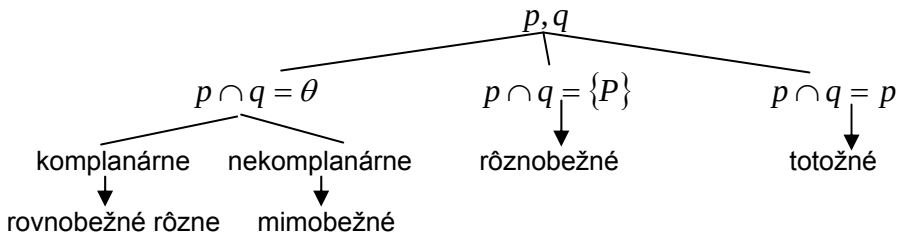
$$s_p = n_\rho = [2,1,-1]$$

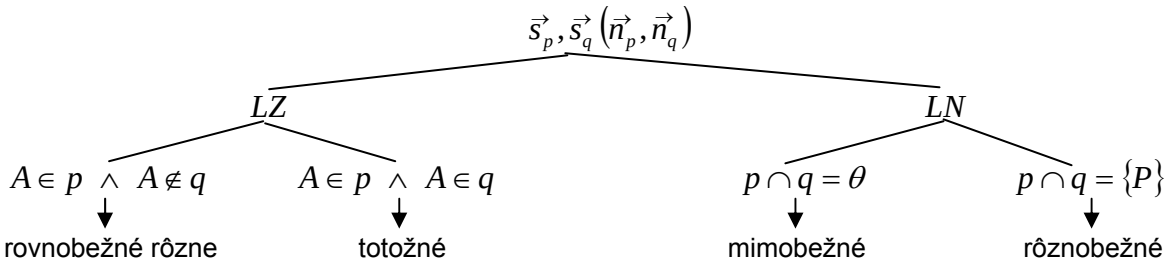
$$\rho: 2x + y - z + d = 0 \qquad A[1,2,3]$$

$$2 + 2 - 3 + d = 0 \qquad d = -1$$

$$\rho: 2x + y - z - 1 = 0$$

- <u>vzájomná poloha dvoch priamok</u>





Pr.

Určite vzájomnú polohu priamok:

a) $p: x = 1 - t \qquad q: x = 1 + 2s$

$y = 2 + t \qquad y = -1 - s$

$z = 3t; t \in R \qquad z = 3 + s; s \in R$

- určíme si smerové vektory: $\vec{s}_p = [-1,1,3], \vec{s}_q = [2,-1,1]$, vidíme, že sú lineárne nezávislé, čo znamená, že môžu byť mimobežné aj rôznobežné (ak nájdeme spoločný bod):

$$1 - t = 1 + 2s \ \wedge\ 2 + t = -1 - s \ \wedge\ 3t = 3 + s$$

$$t = -2s \qquad 2 - 2s = -1 - s \qquad -18 \neq 6$$

$$s = 3, t = -6$$

> nemajú spoločný bod, teda priamky p, q sú mimobežné

b) $p: x = 1 - 2t \qquad q: x = 4 + s$

$y = 8 + 3t \qquad y = 3 - 2s$

$z = 6 - t; t \in R \qquad z = 10 + 3s; s \in R$

$\vec{s}_p = [-1,1,3] \qquad \vec{s}_q = [2,-1,1] \qquad LN$

$1-2t=4+s \ \wedge \ 8+3t=3-2s \ \wedge \ 6-t=10+3s$

$s=-3-2t \qquad 8+3t=9+4t \qquad 7=7$

$t=-1, s=-1 \qquad P[3,5,7]$

> majú spoločný bod, teda priamky p,q sú rôznobežné

c) $p: 2x-y+1=0, q: x+2y-7=0$

$\vec{n}_p=[2,-1], \vec{n}_q=[1,2] \qquad LN$

$$\begin{array}{l} 2x-y+1=0 \\ \underline{x+2y-7=0} \\ 4x-2y+2=0 \\ \underline{x+2y-7=0} \\ 5x-5=0 \qquad x=1, y=3 \qquad P[1,3] \end{array}$$

> rôznobežné

Pr.

Zistite, či úsečka $AB; A[0,4], B[5,3]$ pretína priamku $p: x=-5t, y=3; t\in R$:

$\vec{s}_{AB}=\overrightarrow{AB}=[5,-1] \qquad s_p=[-5,0] \qquad LN$

$AB: x=5s$

$y=4-s; s\in\langle 0,1\rangle$

$5s=-5t \ \wedge \ 4-s=3$

$s=-t=-1 \qquad s=1 \qquad P[5,3]$

> úsečka má koncový bod B na priamke p

- uvažujme priamky $p_1: a_1x+b_1y+c_1=0;\ p_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ ak pre ich koeficienty platí:
  - a) $\forall a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \ \exists k\neq 0: a_1=ka_2 \ \wedge \ b_1=kb_2 \ \wedge \ c_1=kc_2$, tak sú totožné
  - b) $\forall a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \ \exists k\neq 0: a_1=ka_2 \ \wedge \ b_1=kb_2 \ \wedge \ c_1\neq kc_2$, tak sú rovnobežné rôzne
  - c) $\forall a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \ \exists k\neq 0: a_1\neq ka_2 \ \vee \ b_1\neq kb_2 \ \wedge \ c_1,c_2\in R$, tak sú rôznobežné

- uvažujme priamky $p_1: y=k_1x+q_1;\ p_2: y=k_2x+q_2$ ak pre ich koeficienty platí:
  - a) $\forall k_1,k_2,q_1,q_2: k_1=k_2 \ \wedge \ q_1=q_2$, tak sú totožné
  - b) $\forall k_1,k_2,q_1,q_2: k_1=k_2 \ \wedge \ q_1\neq q_2$, tak sú rovnobežné rôzne
  - c) $\forall k_1,k_2,q_1,q_2: k_1\neq k_2 \ \wedge \ q_1,q_2\in R$, tak sú rôznobežné

Pr.

Je daná priamka $p: 2x-3y+6=0$. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá je s ňou:

a) totožná

$a: 6x-9y+18=0$

b) rovnobežná rôzna

$b: 6x-9y+5=0$

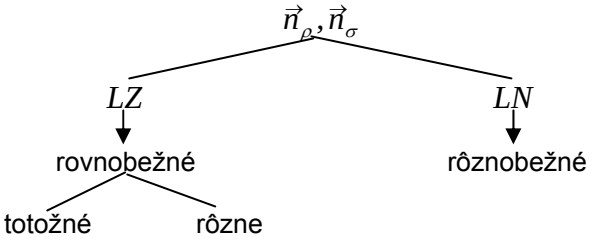
c) rôznobežná

$\vec{s}_c=[6,9] \qquad A[0,2]\in p$

$c: 6x+9y+d=0 \qquad A[0,2] \qquad d=-18$

$c: 6x+9y-18=0$

- <u>vzájomná poloha dvoch rovín</u>



<u>Pr.</u>

Určite vzájomnú polohu rovín:

a) $\rho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

$\sigma : 2x - 4y + 6z - 11 = 0$

$\vec{n}_\rho = [1, -2, 3], \vec{n}_\sigma = [2, -4, 6] = 2.\vec{n}_\rho$ $\qquad LZ$

> sú rovnobežné rôzne $A[0,0,2] \in \rho \ \wedge \ A[0,0,2] \notin \sigma$

b) $\rho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

$\sigma : 3x + y - 2z + 10 = 0$

$\vec{n}_\rho = [1, -2, 3], \vec{n}_\sigma = [3, 1, -2]$ $\qquad LN$

> roviny budú rôznobežné, keďže dve rôznobežné roviny sa pretínajú v priesečnici, tak sústave rovníc, týchto rovín, vyhovujú len body ležiace na jednej priamke

> keďže sme v priestore a máme len dve rovnice a tri neznáme, tak jednu si zvolíme za parameter a po dosadení zaň dostávame sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi

sústavu dvoch rôznobežných rovín: $\rho : ax + by + cz + d = 0$ $\sigma : ex + fy + gz + h = 0$ - označujeme ako **všeobecné rovnice priamky v priestore**

- smerový vektor priesečnice bude vektorový súčin normálových vektorov:

$\vec{s}_p = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma$

$$\begin{array}{|cccccc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}$$

$1 \quad 11 \quad 7$ $\qquad \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = [1, 11, 7]$

$x - 2y + 3z - 6 = 0$

$3x + y - 2z + 10 = 0$

$z = 0$

$x - 2y - 6 = 0$

$3x + y + 10 = 0$

$x - 2y - 6 = 0$

$6x + 2y + 20 = 0$

$7x + 14 = 0$

$x = -2, y = -4$ $\qquad A[-2, -4, 0]$

$p : x = -2 + t$

$y = -4 + 11t$

$z = 7t; t \in R$

> smerový vektor nemusíme počítať vektorovým súčinom, postačí nám ak si podobne určíme ďalší bod a dva body nám určujú smerový vektor priamky, pre ktorý bude platiť: $\vec{s}_{AB} = k.(\vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma); k \in R$

$$\begin{array}{l} x-2y+3z-6=0 \\ 3x+y-2z+10=0 \\ \hline z=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-2y=0 \\ 3x+y+6=0 \\ \hline x-2y=0 \\ 6x+2y+12=0 \\ \hline 7x+12=0 \end{array}$$

$x=-\frac{12}{7}, y=-\frac{6}{7}$ $\quad B\left[-\frac{12}{7},-\frac{6}{7},2\right]$

$\vec{s}_{AB}=\overrightarrow{AB}=\left[\frac{2}{7},\frac{22}{7},2\right]$ $\quad \frac{7}{2}.\left[\frac{2}{7},\frac{22}{7},2\right]=[1,11,7]$

c) $\rho: x=1-t+s$ $\quad \sigma: x=4-k-l$

$y=2+t-2s$ $\quad y=4+2l$

$z=3+2t-s; t,s\in R$ $\quad z=4+3k-5l; k,l\in R$

$\vec{u}=[-1,1,2]$ $\quad \vec{a}=[-1,0,3]$

$\vec{v}=[1,-2,-1]$ $\quad \vec{b}=[-1,2,-5]$

$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{n}_\rho=[3,1,1]$ $\quad \vec{a}\times\vec{b}=\vec{n}_\sigma=[-6,-8,-2]$ $\quad LN$

> rôznobežné

$\rho: 3x+y+z+d=0$ $\quad \sigma: -6x-8y-2z+e=0$

$A[1,2,3]$ $\quad d=-8$ $\quad B[4,4,4]$ $\quad e=64$

$\rho: 3x+y+z-8=0$ $\quad \sigma: -6x-8y-2z+64=0$

$\sigma: 3x+4y+z-32=0$

$\vec{s}_p=\vec{n}_\rho\times\vec{n}_\sigma=[-3,0,9]$ $\quad \vec{s}_p{}'=-\frac{1}{3}.[-3,0,9]=[1,0,-3]$

$$\begin{array}{l} 3x+y+z-8=0 \\ 3x+4y+z-32=0 \\ \hline x=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y+z-8=0 \\ 4y+z-32=0 \\ \hline 3y=24 \end{array}$$

$y=8, z=0$ $\quad C[0,8,0]$

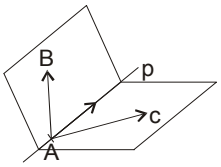
$p: x=t$

$y=8$

$z=-3t; t\in R$

<u>Pr.</u>

Napíšte všeobecné rovnice priamky $p: x=1+t, y=2, z=3-3t; t\in R$:



$\vec{s}_p=[1,0,-3]$ $\quad A[1,2,3]$

- zvolíme si dva body, ktoré neležia na priamke:

$B[1,2,0], C[0,1,0]$

> priamka p a bod $B(C)$ určujú rovinu $\rho(\sigma)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=[0,0,3]$ $\quad \vec{v}=\overrightarrow{AC}=[-1,-1,-3]$

$\vec{n}_\rho=\vec{s}_p\times\vec{u}=[0,3,0]$ $\quad \vec{n}_\sigma=\vec{s}_p\times\vec{v}=[-3,6,-1]$

$\rho: 3y + d = 0 \qquad B[1,2,0] \qquad d = -6$

$\rho: 3y - 6 = 0 \qquad \rho: y - 2 = 0$

$\sigma: -3x + 6y - z + e = 0 \qquad C[0,1,0] \qquad e = -6$

$\sigma: -3x + 6y - z - 6 = 0 \qquad \sigma: 3x - 6y + z + 6 = 0$

$\rho: y - 2 = 0$

$\underline{\sigma: 3x - 6y + z + 6 = 0}$

- <u>vzájomná poloha priamky a roviny</u>

p, ρ

- $p \cap \rho = \theta$ → rovnobežné
- $p \cap \rho = \{P\}$ → rôznobežné
- $p \cap \rho = p$ → p leží v ρ

<u>Pr.</u>

Určite vzájomnú polohu priamky $p: x = 2 - t, y = 3t, z = 3 + 4t, t \in R$ a roviny $\rho: x - 5y + 4z - 6 = 0$:

- pri riešení nám postačí dosadiť za x, y, z do rovnice roviny:

$x - 5y + 4z - 6 = 0$

$2 - t - 5.3t + 4(3 + 4t) - 6 = 0$

$2 - t - 15t + 12 + 16t - 6 = 0$

$0.t = 8 \qquad P = \theta$

> $p \cap \rho = \theta$ $\qquad p$ neleží v ρ

<u>Pr.</u>

Určite vzájomnú polohu priamky $p: x = 1 - r, y = 2 + 3r, z = 3r, r \in R$ a roviny $\rho: x = 1 + 2t - s, y = 2 - t + s, z = t - s; t, s \in R$:

$\vec{u} = [2,-1,1], \vec{v} = [-1,1,-1]$

$\vec{n}_\rho = \vec{u} \times \vec{v} = [0,1,1]$

$\rho: y + z + d = 0 \qquad A[1,2,0] \qquad d = -2$

$\rho: y + z - 2 = 0$

$2 + 3r + 3r - 2 = 0$

$6r = 0$

$r = 0 \qquad P[1,2,0]$

$p \cap \rho = P$ $\qquad$ rôznobežné

<u>Pr.</u>

Je daná rovina $\rho: x - 2y + 4z + 5 = 0$. Napíšte rovnicu priamky p, ktorá:

a) leží v ρ

$A[1,-1,-2], B[-5,0,0] \in \rho \qquad \vec{s}_p = \overrightarrow{AB} = [-6,1,2]$

$p: x = 1 - 6t, y = -1 + t, z = -2 + 2t; t \in R$

b) je rovnobežná s ρ a neleží v nej

$C[0,0,1] \notin \rho \qquad p: x - 6t, y = t, z = 1 + 2t; t \in R$

c) je rôznobežná s ρ

$\vec{s}_p = \overrightarrow{AC} = [-1,1,3] \qquad p: x = 1 - t, y = -1 + t, z = -2 + 3t, t \in R$

- <u>úlohy o kolmosti</u>

<u>Pr.</u>

Je daná priamka $p: 2x-3y+1=0$ a bod $A[1,2]$. Napíšte rovnicu priamky $q; A \in q, q \perp p$:

$\vec{n}_p = [2,-3] \quad \vec{s}_p = [3,2] = \vec{n}_q$

$q: 3x+2y-7=0$

<u>Pr.</u>

Je daná priamka $p: x=1-t, y=2+2t, z=3-3t; t \in R$ a bod $K[1,1,2]$. Napíšte rovnicu priamky $q; K \in q, q \perp p$:

$\vec{s}_p = [-1,2,-3]$

$\vec{s}_p \perp \vec{s}_q$

$\vec{s}_p . \vec{s}_q = 0$

$-1s_1 + 2s_2 - 3s_3 = 0$

$s_1 = 2, s_2 = 1 \ldots s_3 = 0 \qquad \vec{s}_q = [2,1,0]$

$q: x = 1+2s, y = 1+s, z = 2; s \in R$

<u>Pr.</u>

Je daná priamka $p: x=1-t, y=2+2t, z=3-3t; t \in R$ a bod $K[1,1,2]$. Napíšte rovnicu priamky $q; K \in q, q \perp p, p \cap q = P$:

- táto úloha sa od predchádzajúcej líši tým, že priamky musia byť rôznobežné a preto nám nebude stačiť ak určíme smerový vektor priamky q, keďže sa môže stať že priamky môžu byť mimobežné
- budeme musieť bodom K preložiť rovinu kolú na priamku p, nájsť ich priesečník a máme dva body, ktoré nám budú určovať smerový vektor

$\vec{s}_p = [-1,2,-3] = \vec{n}_\rho$

$\rho: -x+2y-3z+d=0 \qquad K[1,1,2] \qquad d=5$

$\rho: -x+2y-3z+5=0$

$\rho: x-2y+3z-5=0$

$1-t-2(2+2t)+3(3-3t)-5=0 \qquad \rightarrow$

$1-t-4-4t+9-9t-5=0$

$1=14t$

$t = \frac{1}{14} \qquad P\left[\frac{13}{14}, \frac{30}{14}, \frac{39}{14}\right] \qquad \vec{s}_q = \overrightarrow{KP} = \left[-\frac{1}{14}, \frac{16}{14}, \frac{11}{14}\right]$

$\vec{s}_q{}' = \overrightarrow{KP} = [-1,16,11]$

$q: x = 1-s, y = 1+16s, z = 2+11s; s \in R$

<u>Pr.</u>

Sú dané body $A[2,3,5], B[1,7,10]$ a rovina $\rho: 3x-y+2z-5=0$. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je kolmá na ρ a prechádza bodmi A, B:

$\vec{n}_\rho = [3,-1,2], \vec{u} = \overrightarrow{AB} = [-1,4,5] \qquad \vec{n}_\sigma = \vec{n}_\rho \times \vec{u} = [-13,-17,11]$

$\sigma: -13x-17y+11z+d=0 \qquad A[2,3,5] \qquad d=22$

$\sigma: -13x-17y+11z+22=0$

$\sigma: 13x+17y-11z-22=0$

Pr.

Je daný bod $M[2,3,7]$ a roviny $\rho: 2x - y + z - 3 = 0,\ \sigma: x + y - z + 8 = 0$, napíšte rovnicu roviny, ktorá je na ne kolmá a prechádza bodom M :

$$\vec{n}_\rho = [2,-1,1], \vec{n}_\sigma = [1,1,-1]$$
$$\vec{n}_\tau = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = [0,3,3]$$
$$\tau: 3y + 3z + d = 0 \qquad M[2,3,7] \qquad d = -30$$
$$\tau: 3y + 3z - 30 = 0$$
$$\tau: y + z - 10 = 0$$

Pr.

Určite súradnice bodu A_1, ktorý je kolmým priemetom bodu $A[3,-1,7]$ do roviny $\rho: 2x - 3y + 4z - 8 = 0$:

$$\vec{n}_\rho = [2,-3,4] = \vec{s}_p$$
$$p: x = 3 + 2t, y = -1 - 3t, z = 7 + 4t, t \in R$$
$$2(3 + 2t) - 3(-1 - 3t) + 4(7 + 4t) - 8 = 0$$
$$6 + 4t + 3 + 9t + 28 + 16t - 8 = 0$$
$$29t = -29$$
$$t = -1 \qquad A_1[1,2,3]$$

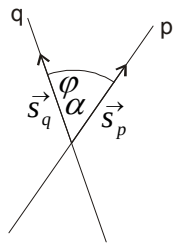
- <u>uhol dvoch priamok</u>

<u>Def.</u>

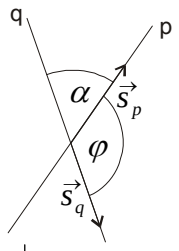
1. Uhol rovnobežných priamok je nulový.
2. Uhol rôznobežných priamok je najmenší uhol z uhlov, ktoré určujú.
3. Uhol mimobežných priamok p, q je uhol rôznobežiek p', q' takých, že platí $p' \parallel p \wedge q' \parallel q$.

- vo vektorovom priestore pre uhol vektorov platí:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$



$$\alpha = \varphi$$
$$\cos\alpha = \cos\varphi$$



$$\alpha = 180°\varphi$$
$$\cos\alpha = \cos 180° - \varphi =$$
$$= -\cos\varphi$$

$$\cos\alpha = |\cos\varphi|$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{s}_p . \vec{s}_q|}{|\vec{s}_p||\vec{s}_q|}}$$

Pr.

Určite uhol priamok:

a) $p = \overrightarrow{AB}; A[1,0,3], B[2,1,1];\ q: x = 3 - t, y = 1, z = -1 + t; t \in R$

$$\vec{s}_p = \overrightarrow{AB} = [1,1,-2] \qquad \vec{s}_q = [-1,0,1]$$
$$\cos\alpha = \frac{|-1+0-2|}{\sqrt{1+1+4}.\sqrt{1+0+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}.\sqrt{2}} = \frac{3}{2.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha = 30°$$

b) $p: 5x+3y-7=0;\ q: 4x-y+5=0$

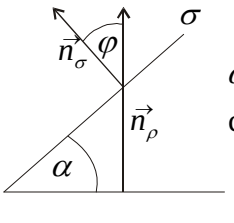
$$\vec{n}_p=[5,3]\ldots\ \vec{s}_p=[3,-5] \qquad \vec{n}_q=[4,-1]\ldots\ \vec{s}_q=[1,4]$$

$$\cos\alpha=\frac{|3-20|}{\sqrt{9+25}.\sqrt{1+16}}=\frac{|-17|}{\sqrt{34}.\sqrt{17}}=\frac{17}{\sqrt{2}\sqrt{17}\sqrt{17}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha=45°$$

- <u>uhol dvoch rovín</u>

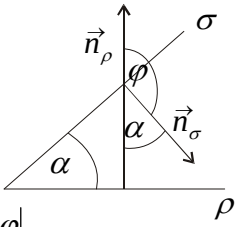
<u>Def.</u>

1. Uhol dvoch rovnobežných rovín je nulový.
2. Uhol dvoch rôznobežných rovín ρ,σ je uhol priamok a,b kolmých na priesečnicu rovín ρ,σ takých, že $a\in\rho, b\in\sigma$.



$\alpha=\varphi$

$\cos\alpha=\cos\varphi$



$\alpha=180°\varphi$

$\cos\alpha=\cos 180°-\varphi=$

$=-\cos\varphi$

$$\cos\alpha=|\cos\varphi|$$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_\rho.\vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho||\vec{n}_\sigma|}}$$

<u>Pr.</u>

Určite uhol rovín $\rho: 2x+3y+z-5=0;\ \sigma: x-y+z+12=0$:

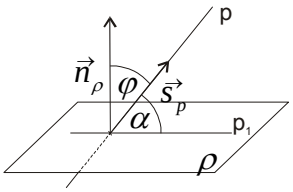
$$\vec{n}_\rho=[2,3,1] \qquad \vec{n}_\sigma=[1,-1,1]$$

$$\cos\alpha=\frac{|2-3+1|}{\sqrt{4+9+1}.\sqrt{1+1+1}}=\frac{0}{\sqrt{14}.\sqrt{3}}=0 \qquad \alpha=90°$$

- <u>uhol priamky a roviny</u>

<u>Def.</u>

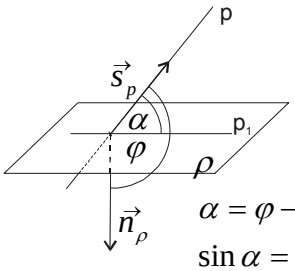
1. Ak priamka p je rovnobežná s rovinou ρ, tak ich uhol je nulový.
2. Ak priamka p je kolmá na rovinu ρ, tak ich uhol má veľkosť 90°.
3. Ak priamka p je rôznobežná s rovinou ρ a $p \not\perp \rho$, tak ich uhol je uhol priamky p a jej kolmého priemetu p_1 do roviny ρ.



$\alpha=90°-\varphi$

$\sin\alpha=\sin(90°-\varphi)=$

$=\sin 90°\cos\varphi-\cos 90°\sin\varphi=\cos\varphi$



$\alpha=\varphi-90°$

$\sin\alpha=\sin(\varphi-90°)=$

$=-\cos\varphi$

$$\sin\alpha=|\cos\varphi|$$

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{|\vec{s}_p.\vec{n}_\rho|}{|\vec{s}_p||\vec{n}_\rho|}}$$

Pr.

Určite uhol priamky $p: x = 5 + t, y = 1 + 3t, z = -2t; t \in R$ a roviny $\rho: 2x - y + 3z - 4 = 0$:

$$\vec{s}_p = [1, 3, -2] \quad \vec{n}_\rho = [2, -1, 3]$$

$$\sin\alpha = \frac{|2-3-6|}{\sqrt{1+9+4}.\sqrt{4+1+9}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \qquad \alpha = 30°$$

Pr.

V kocke $A - H$ určite uhol:

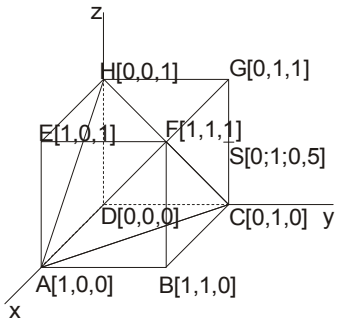
a) uhol priamok $AB, ES; S = C \overline{\cdot} G$

$$\vec{s}_p = \overrightarrow{AB} = [0,1,0] \qquad \vec{s}_q = \overrightarrow{ES} = [-1,1,-\tfrac{1}{2}] \quad \cos\alpha = \frac{|0+1+0|}{\sqrt{1}.\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{2}{3} \qquad \alpha \doteq 48°11'$$

b) uhol priamky $AS; S = C \overline{\cdot} G$ a roviny AEF

$$\vec{n}_\rho = \overrightarrow{AD} = [-1,0,0] \quad \vec{s}_p = \overrightarrow{AS} = [-1,1,\tfrac{1}{2}] \quad \sin\alpha = \frac{|1+0+0|}{\sqrt{1}.\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{2}{3} \qquad \alpha \doteq 41°48'$$

c) uhol rovín ACF, ACH



$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = [-1,1,0], \vec{v} = \overrightarrow{AF} = [0,1,1], \vec{w} = \overrightarrow{AH} = [-1,0,1]$$

$$\vec{n}_\rho = \vec{u} \times \vec{v} = [1,1,-1] \qquad \vec{n}_\sigma = \vec{u} \times \vec{w} = [1,1,1]$$

$$\cos\alpha = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \qquad \alpha \doteq 70°31'$$

- <u>vzdialenosť bodov</u>

$$A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$$

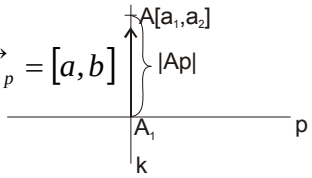
$$\boxed{|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}}$$

- <u>vzdialenosť bodu od útvaru</u>

<u>Def.</u>

Vzdialenosť bodu A od útvaru U je najmenšia zo vzdialeností $|AX|; X \in U$.

<u>A.</u> **vzdialenosť bodu od priamky v rovine**



$$\vec{s}_k = \vec{n}_p = [a, b]$$

$$p: ax + by + c = 0 \qquad k: x = a_1 + at$$

$$y = a_2 + bt; t \in R$$

$$a(a_1 + at) + b(a_2 + bt) + c = 0$$

$$aa_1 + a^2 t + ba_2 + b^2 t + c = 0 \quad t = -\frac{aa_1 + ba_2 + c}{a^2 + b^2}$$

$$A_1\left[a_1 - a\frac{aa_1 + ba_2 + c}{a^2 + b^2}, a_2 - b\frac{aa_1 + ba_2 + c}{a^2 + b^2}\right]$$

$$|Ap| = |AA_1| = \sqrt{\left(a\frac{aa_1 + ba_2 + c}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(b\frac{aa_1 + ba_2 + c}{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(aa_1 + ba_2 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}.(a^2 + b^2)} = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$p: ax + by + c = 0 \qquad A[a_1, a_2]$$

$$\boxed{|Ap| = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

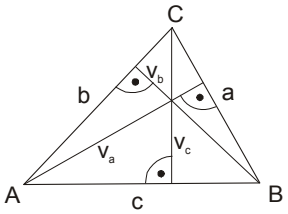
Pr.

Vypočítajte vzdialenosť bodu $A[3,2]$ od priamky $p: 3x-4y-7=0$:

$$|Ap| = \frac{|3.3+(-4).2-7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{6}{5}$$

Pr.

V $\Delta ABC; A[0,0], B[7,0], C[4,5]$ vypočítajte veľkosti výšok:



$\vec{s}_a = \overrightarrow{BC} = [-3,5]$ $\quad \vec{n}_a = [5,3]$

$\vec{s}_b = \overrightarrow{AC} = [4,5]$ $\quad \vec{n}_b = [5,-4]$

$\vec{s}_c = \overrightarrow{AB} = [7,0]$ $\quad \vec{n}_c = [0,7]$

$a: 5x+3y-35=0 \qquad v_a = |Aa| = \frac{|5.0+3.0-35|}{\sqrt{25+9}} = \frac{35}{\sqrt{34}}$

$b: 5x-4y=0 \qquad v_b = |Bb| = \frac{|5.7-4.0|}{\sqrt{25+16}} = \frac{35}{\sqrt{41}}$

$c: 7y=0 \qquad v_c = |Cc| = \frac{|0.4+7.5-0|}{\sqrt{0+49}} = \frac{35}{\sqrt{49}} = 5$

Pr.

Určite vzdialenosť bodu $A[1,0,5]$ od priamky $p: x=t, y=1-t, z=2t; t \in R$:

- keďže sme v priestore, tak bodom A musíme preložiť rovinu, kolmú na priamku p, teda platí: $\vec{s}_p = \vec{n}_\rho = [1,-1,2]$ a dostávame rovinu:

$\rho: x-y+2z-11=0$

> nájdeme priesečník priamky a roviny:

$x-y+2z-11=0$

$t-1+t+4t-11=0$

$6t=12 \qquad t=2 \qquad P[2,-1,4]$

$$|Ap| = |AP| = \sqrt{(1-2)^2+(0+1)^2+(5-4)^2} = \sqrt{3}$$

Pr.

Nájdite rovnicu priamky, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: 4x-3y-12=0$ a má od bodu $A[2,3]$ vzdialenosť 5:

$\vec{n}_p = \vec{n}_a = [4,-3] \qquad a: 4x-3y+c=0$

$|Aa| = 5 = \frac{|4.2-3.3+c|}{\sqrt{25}} = \frac{|c-1|}{5} \qquad |c-1| = 25 \qquad c=-24 \vee c=26$

$a_1: 4x-3y-24=0 \qquad a_2: 4x-3y+26=0$

Pr.

Na osi y nájdite bod, ktorý má od začiatku súradnicovej sústavy aj od priamky $p: 3x-4y+12=0$ rovnakú vzdialenosť:

$X[0,x_2] \qquad |Xp| = \frac{|-4x_2+12|}{5} \qquad O[0,0] \qquad |XO| = \sqrt{0^2+x_2^2} = |x_2|$

$|XO| = |Xp| \qquad 9x_2^2+96x_2-144=0$

$|x_2| = \frac{|-4x_2+12|}{5} \qquad x_{2\ 1,2} = \frac{-96\pm120}{18}$

$5|x_2| = |12-4x_2| \ \Big|^2 \qquad x_2=-12 \qquad X_1[0,-12]$

$25x_2^2 = 144-96x_2+16x_2^2 \qquad x_2 = \frac{4}{3} \qquad X_2[0,\frac{4}{3}]$

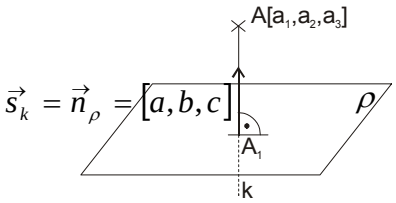
- umocňovanie je dôsledková úprava a po dosadení oboch bodov do rovnosti dostávame pravdivý výrok, čiže nám žiadny koreň rovnice nepribudol

Pr.

Na priamke $p: x+2y-5=0$ nájdite bod, ktorý má od priamky $q: 3x-4y-5=0$ vzdialenosť 2:

$$A[x,y]\in p \qquad x=5-2y$$
$$|Aq| = \frac{|3x-4y-5|}{5} = 2$$
$$|3x-4y-5| = 10$$
$$|15-6y-4y-5| = 10$$
$$|10-10y| = 10$$
$$|1-y| = 1 \qquad y=0 \vee y=2$$
$$A_1[5,0], A_2[1,2]$$

B. **vzdialenosť bodu od roviny**



$$\vec{s}_k = \vec{n}_\rho = [a,b,c]$$

$$\rho: ax+by+cz+d=0 \qquad k: x=a_1+at$$
$$y=a_2+bt$$
$$z=a_3+ct; t\in R$$
$$a(a_1+at)+b(a_2+bt)+c(a_3+ct)+d=0$$
$$aa_1+a^2t+ba_2+b^2t+ca_3+c^2t+d=0 \qquad t=-\frac{aa_1+ba_2+ca_3+d}{a^2+b^2+c^2}$$
$$A_1\left[a_1-a\frac{aa_1+ba_2+ca_3+d}{a^2+b^2+c^2}, a_2-b\frac{aa_1+ba_2+ca_3+d}{a^2+b^2+c^2}, a_3-c\frac{aa_1+ba_2+ca_3+d}{a^2+b^2+c^2}\right]$$
$$|A\rho| = |AA_1| = \sqrt{\left(a\frac{aa_1+ba_2+ca_3+d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2+\left(b\frac{aa_1+ba_2+ca_3+d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2+\left(c\frac{aa_1+ba_2+ca_3+d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{(aa_1+ba_2+ca_3+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.(a^2+b^2+c^2)} = \frac{|aa_1+ba_2+ca_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\rho: ax+by+cz+d=0 \qquad A[a_1,a_2,a_3]$$

$$\boxed{|A\rho| = \frac{|aa_1+ba_2+ca_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Pr.

Vypočítajte vzdialenosť bodu $A[2,3,5]$ od roviny $\rho: 2x+4y-z+3=0$:

$$|A\rho| = \frac{|2.2+4.3-1.5+3|}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{14}{\sqrt{21}}$$

- vzdialenosť útvarov

Def.

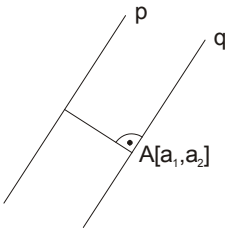
Vzdialenosť dvoch útvarov je dĺžka ich najkratšej priečky.

A. **vzdialenosť priamok**

a) totožné priamky p,q $\qquad |pq| = 0$

b) rôznobežné priamky p,q $\qquad |pq| = 0$

c) rovnobežné rôzne priamky p, q v rovine



$p: ax + by + c_1 = 0$

$q: ax + by + c_2 = 0 \qquad A \in q \qquad aa_1 + ba_2 + c_2 = 0$

$aa_1 + ba_2 = -c_2$

$|pq| = |Ap| = \frac{|aa_1 + ba_2 + c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\boxed{|pq| = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

d) mimobežné priamky p, q -vzdialenosť je veľkosť ich osi

<u>Pr.</u>

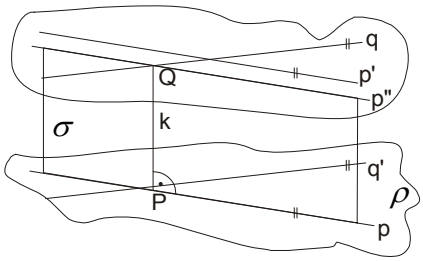
Vypočítajte veľkosť uhlopriečky štvorca, ktorého dve strany ležia na priamkach $p: 5x - y - 2 = 0$, $q: 5x - y + 5 = 0$:

$$a = |pq| = \frac{|-2-5|}{\sqrt{26}} = \frac{7}{\sqrt{26}}$$

$$u = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2\left(\frac{7}{\sqrt{26}}\right)^2} = \sqrt{2.\frac{49}{26}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

<u>Pr.</u>

Nájdite rovnicu osi mimobežiek $p: x = 7 + t, y = 3 + 2t, z = 9 - t; t \in R;\ q: x = 3 - 7t, y = 2t, z = 1 + 3t; t \in R$. Vypočítajte ich vzdialenosť.



$\vec{s}_p = [1, 2, -1] \quad \vec{s}_q = [-7, 2, 3] \quad A[7, 3, 9] \in \sigma$

$\vec{n}_\rho = \vec{s}_p \times \vec{s}_q = [8, 4, 16] \qquad \vec{n}_\rho{}' = [2, 1, 4]$

$\vec{n}_\sigma = \vec{n}_\rho \times \vec{s}_p = [-9, 6, 3] \qquad \vec{n}_\sigma{}' = [3, -2, -1]$

$\sigma: 3x - 2y - z - 6 = 0$

$3(3 - 7t) - 2.2t - 1 - 3t - 6 = 0$

$9 - 21t - 4t - 1 - 3t - 6 = 0$

$2 = 28t \qquad t = \frac{1}{14} \qquad Q\left[\frac{35}{14}, \frac{2}{14}, \frac{17}{14}\right]$

$\vec{s}_k = \vec{n}_\rho{}'$

$k: x = \frac{35}{14} + 2s, y = \frac{2}{15} + s, z = \frac{17}{14} + 4s; s \in R$

$7 + t = \frac{35}{14} + 2s \ \wedge\ 9 - t = \frac{17}{14} + 4s \qquad \wedge\ 3 + 2t = \frac{2}{14} + s$

$16 = \frac{52}{14} + 6s \qquad s = \frac{43}{21}, t = -\frac{17}{42} \qquad 3 - \frac{17}{21} = \frac{2}{14} + \frac{43}{21}$

$\frac{92}{42} = \frac{92}{42}$

$t = -\frac{17}{42} \qquad P\left[\frac{277}{42}, \frac{92}{42}, \frac{395}{42}\right]$

$|pq| = |PQ| = \sqrt{\left(\frac{277}{42} - \frac{35}{14}\right)^2 + \left(\frac{92}{42} - \frac{2}{14}\right)^2 + \left(\frac{395}{42} - \frac{17}{14}\right)^2} =$

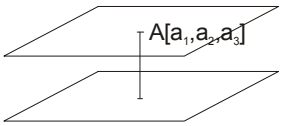
$= \sqrt{\left(\frac{122}{42}\right)^2 + \left(\frac{86}{42}\right)^2 + \left(\frac{344}{42}\right)^2} \doteq 8{,}928$

B. **vzdialenosť rovín**

a) rôznobežné roviny ρ, σ $\quad |\rho\sigma| = 0$

b) totožné roviny ρ, σ $\quad |\rho\sigma = 0|$

c) rovnobežné rôzne roviny ρ, σ



$$\rho : ax + by + cz + d_1 = 0$$
$$\sigma : ax + by + cz + d_2 = 0$$
$$A \in \sigma \quad aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_2 = 0$$
$$aa_1 + ba_2 + ca_3 = -d_2$$
$$|\rho\sigma| = |A\rho| = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\boxed{|\rho\sigma| = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

- na záver tejto kapitoly si uveďme zopár príkladov:

Pr.

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá je súmerne združená s priamkou $p : y = 2x - 1$ podľa bodu $S[-2,1]$:

$$p' : y = 2x + q$$
$$A[1,1] \in p \qquad A'[a_1, a_2] \in p'$$
$$A \div A' = S \qquad -2 = \tfrac{1+a_1}{2} \ \wedge \ 1 = \tfrac{1+a_2}{2}$$
$$a_1 = -5 \qquad a_2 = 1$$
$$p' : 1 = 2.(-5) + q \qquad q = 11$$
$$p' : y = 2x + 11$$

Pr.

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi $M[3;-2;-4], N[7,2,1]$ a je rovnobežná s osou x:

$$\vec{u} = \overrightarrow{MN} = [4,4,5] \qquad \vec{i} = [1,0,0] \qquad \vec{n}_\rho = \vec{u} \times \vec{i} = [0,-5,4]$$
$$\rho : 5y - 4z - 6 = 0$$

Pr.

Nájdite bod súmerne združený s bodom $M[1,2]$ podľa priamky $\overleftrightarrow{AB}$, kde $A[1,0], B[-1,-2]$:

$$\vec{s}_p = \overrightarrow{AB} = [2,2] \qquad p : x = 1 + 2t$$
$$y = 2t; t \in R$$
$$\vec{n}_k = \vec{s}_p \qquad M \in k \qquad k : 2x + 2y - 6 = 0$$
$$2(1 + 2t) + 2.2t - 6 = 0$$
$$8t = 4 \qquad t = \tfrac{1}{2} \qquad P[2,1] = M \div M' \qquad M'[3,0]$$

Pr.

V ΔABC sú dané vrcholy $A[-1,6], B[7,6]$ a ortocentrum $V[1,0]$. Určite súradnice vrcholu C:

$\vec{n}_a = \overrightarrow{VA} = [-2,6]$ $\quad B \in a$ $\quad a: -2x+6y-22=0$

$a: x-3y+11=0$

$\vec{n}_{v_c} = \overrightarrow{BA} = [8,0]$ $\quad V \in v_c$ $\quad v_c: 8x-8=0$

$v_c: x-1=0$

$C = a \cap v_c$

$x-3y+11=0$

$x-1=0$

$x=1, y=4 \quad C[1,4]$

Pr.

Nájdite bod B súmerne združený podľa priamky $p: x=3+5t, y=2+4t, z=1+2t, t \in R$ s bodom $A[10,3,4]$:

- sme v priestore, takže bodom A preložíme rovinu kolmú na p

$\vec{s}_p = \vec{n}_\rho = [5,4,2]$

$\rho: 5x+4y+2z-70=0$

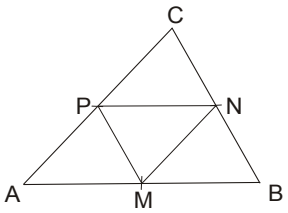
$5(3+5t)+4(2+4t)+2(1+2t)=70$

$15+25t+8+16t+2+4t=70$

$45t=45 \quad t=1 \quad P[8,6,3] = A \div B \quad B[6,9,2]$

Pr.

Body $M[2,-1], N[-2,4], P[-2,2]$ sú stredy strán trojuholníka ABC, určite súradnice vrcholov:



$\vec{u} = \overrightarrow{PN} = [0,-2]$

$A = M - \vec{u} = [2,-3] \quad B = M + \vec{u} = [2,1]$

$N = C \div B \quad C[-6,7]$

Pr.

Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A[1,2]$ a má rovnakú vzdialenosť od bodov $B[3,3], C[5,2]$:

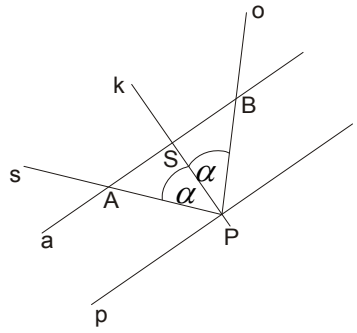
$S = B \div C \quad S[4;2{,}5] \quad \vec{s}_{p_1} = \overrightarrow{AS} = [3;0{,}5] \quad \vec{s}_{p_2} = \overrightarrow{BC} = [2,-1]$

$p_1: x=1+3t \quad p_2: x=1+2t$

$y=2+0{,}5t; t \in R \quad y=2-t; t \in R$

Pr.

Svetelný lúč má rovnicu $s: x-2y+5=0$. Rozhranie, na ktoré dopadá, má rovnicu $p: 3x-2y+7=0$. Napíšte rovnicu odrazeného lúča:



$x-2y+5=0$

$3x-2y+7=0$

$2x+2=0 \quad x=-1 \quad P[-1,2]$

$\vec{n}_k = \vec{s}_p = [2,3] \quad k: 2x+3y-4=0$

$A[5,5] \quad n_a = n_p = [3,-2] \quad a: 3x-2y-5=0$

$x = \frac{23}{13} \quad S\left[\frac{23}{13}, \frac{2}{13}\right]$

$B\left[-\frac{19}{13}, -\frac{61}{13}\right] \quad \vec{s}_o = \overrightarrow{PB} = \left[-\frac{6}{13}, -\frac{87}{13}\right]$

$o: x = -\frac{19}{13} - \frac{6}{13}t, y = -\frac{61}{13} - \frac{87}{13}t; t \in R$

Neriešené úlohy

1. Priamka p pretína dve súradnicové roviny v bodoch $A[1,2,0], B[2,0,4]$. Nájdite jej priesečník s treťou súradnicovou rovinou.

2. Napíšte parametrickú a všeobecnú rovnicu roviny $\rho = ABC; A[2;-1;-2], B[3,1,2]$, $C[-1;-3;5]$.

3. V kocke $A-H$ určite:
a) vzdialenosť bodu B od roviny ACF
b) objem štvorstena $AEFD$

4. Sú dané body $A[2,2], B[6,5], C[3,9]$. Určite súradnice vrcholu D, rovnobežníka $ABCD$. Dokážte, že rovnobežník je štvorec.

5. Určite obraz bodu $A[3;-4;-6]$ v súmernosti určenej rovinou $\rho: x-y-4z-13=0$.

6. Napíšte rovnicu priamky súmerne združenej s priamkou $p: 4x-3y-12=0$ podľa bodu $S[5,1]$.

7. Nájdite bod A_1 súmerne združený s bodom $A[10,3,4]$ podľa priamky $p: x=3+5t, y=2+4t, z=1+2t; t \in R$.

8. Určite súradnice bodu A_1, ktorý je kolmým priemetom bodu $A[3,-1,7]$ do roviny $\rho: 2x-3y+4z-8=0$.

9. V ΔABC sú dané vrcholy $A[-10,2], B[6,4]$ a ortocentrum $V[5,2]$. Určite súradnice vrcholu C.

10. Napíšte rovnicu priamky, ktorá je rovnobežná s priamkou $12x+5y-5=0$ a je od nej vzdialená $2\,cm$.

11. Na priamke $4x-12y-2=0$ nájdite bod, ktorý má od priamky $5x+12y+5=0$ vzdialenosť 3.

12. Určite vzdialenosť bodu $A[5,-1,3]$ od priamky $p: x=-1+2t, y=-5+3t, z=-2+2t$; $t \in R$.

13. Určite uhol priamky $p = \overrightarrow{AB}; A[1,0,-3], B[3,2,7]$ so súradnicovými osami. Zistite súčet druhých mocnín kosínusov týchto uhlov.

14. Uhlopriečky štvorca ležia na súradnicových osiach. Dĺžka strany štvorca je 4. Napíšte všeobecné rovnice strán štvorca.,

26. Kužeľosečky

1. Základné pojmy
- objav kužeľosečiek, kužeľosečka ako rez

2. Transformácia súradnicovej sústavy
- posunutie, otočenie

3. Kružnica
- definícia, stredová rovnica, všeobecná rovnica a parametrické vyjadrenie
- priamka a kružnica, rovnica dotyčnice

4. Elipsa
- definícia, stredová rovnica a všeobecná rovnica
- priamka a elipsa, rovnica dotyčnice

5. Hyperbola
- definícia, stredová rovnica a všeobecná rovnica
- priamka a hyperbola, rovnica dotyčnice

6. Parabola
- definícia, vrcholová rovnica a všeobecná rovnica
- priamka a parabola, rovnica dotyčnice

7. Vyšetrovanie bodov danej vlastnosti

8. Všeobecná teória kužeľosečiek
- analytická definícia kužeľosečky
- determinant kužeľosečky
- priamka a kužeľosečka
- asymptotický smer kužeľosečky
- stred kužeľosečky, singulárny bod

9. Singulárne kužeľosečky
- definícia, typy

10. Regulárne kužeľosečky
- definícia, typy

11. Os kužeľosečky

……

- kužeľosečky vznikli pre potrebu riešenia úloh typu:
  - kvadratúra kruhu, trisekcia uhla a duplicita kocky (Délsky problém)

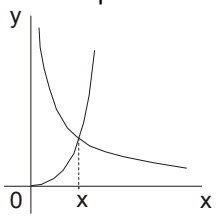
> úlohou bolo vypočítať veľkosť hrany kocky B, ak poznáme hranu kocky A, tak aby kocka B mala dvojnásobný objem:

$$a \ldots 2a^3 = x^3 \quad x = ?$$

$$x^2 = \frac{2a^3}{x}$$

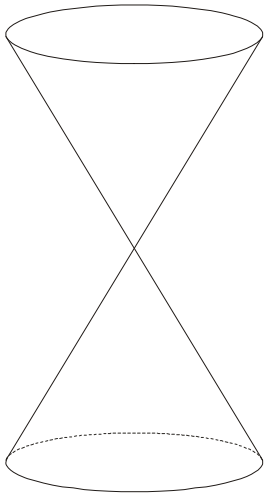
- a toto nás privádza k riešenie úlohy, kde máme prienik funkcií:

$$y = x^2 \qquad y = \frac{2a^3}{x}$$

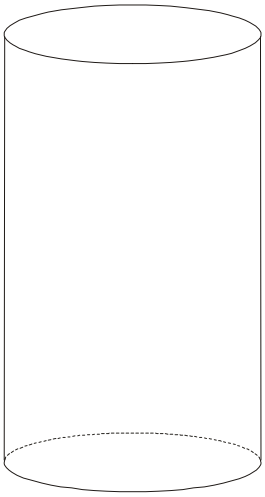


- Gréci chápali kužeľosečky ako **prieniky kužeľových a valcových plôch s rovinou** (tento prienik je vlastne rez telesa rovinou) , tak vznikne **deväť typov**

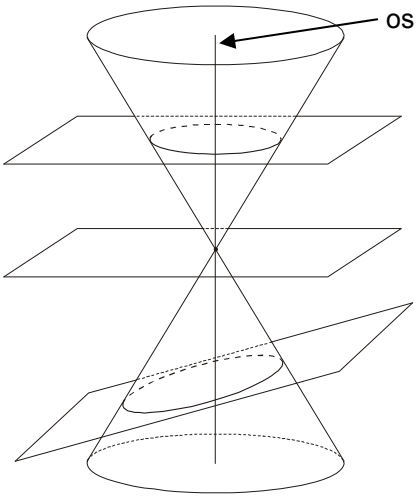
- **kužeľová plocha**
  vznikne tak, že spojíme dva plášte kužeľu vo vrchole



- valcová plocha
je to plášť valca



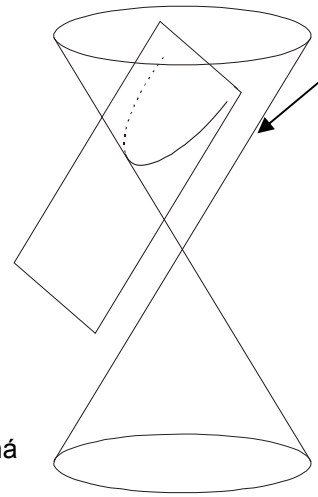
- <u>typy kužeľosečiek</u>



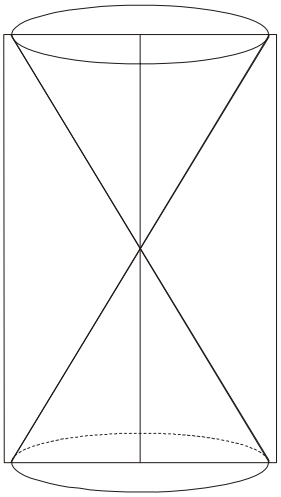
KRUŽNICA
- rovina kolmá na os

BOD
- rovina idúca vrcholom

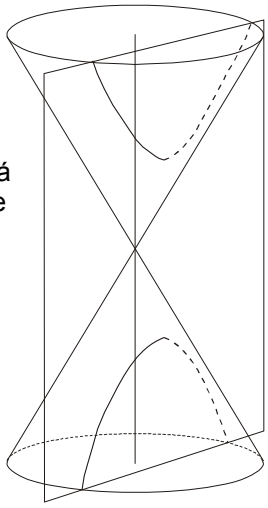
ELIPSA
- rovina nie je kolmá na os a ani rovnobežná s povrchovou priamkou



PARABOLA
- rovina je rovnobežná s povrchovou priamkou

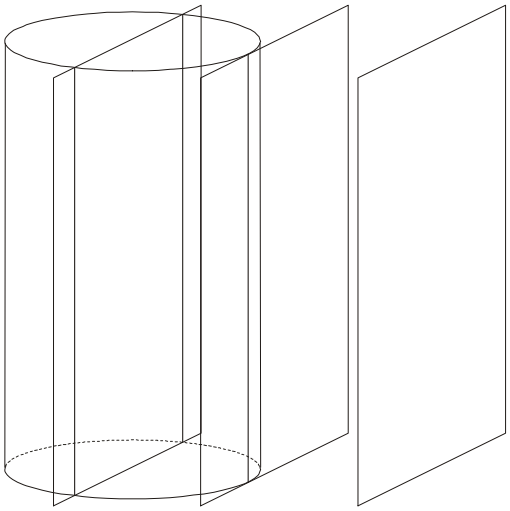


RÔZNOBEŽKY
- rovina rovnobežná s osou a obsahuje os



HYPERBOLA
- rovina rovnobežná s osou a neobsahuje os

> pre valcovú plochu:



RÔZNE ROVNOBEŽKY
- rovina je rovnobežná s osou a pretína valcovú plochu v dvoch priamkach

PRIAMKA
- rovina je rovnobežná s osou a dotýka sa valcovej plochy

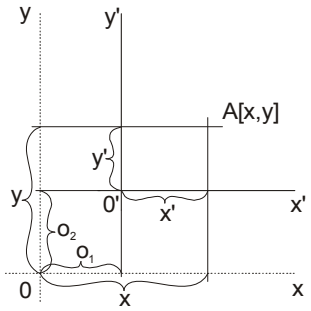
PRÁZDNA MNOŽINA
- rovina nepretína plochu

- <u>transformácia súradnicovej sústavy</u>

- pod týmto pojmom rozumieme prechod od jednej súradnicovej sústavy ku druhej pomocou **transformačných rovníc**

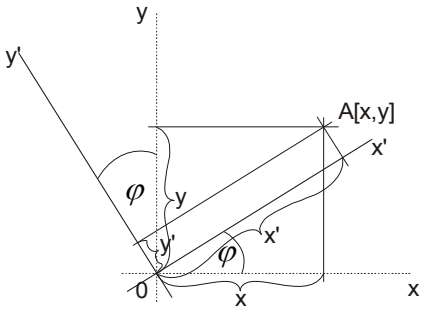
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}}$$

<u>A.</u> **posunutie súradnicovej sústavy**



$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - o_1 \\ y' &= y - o_2 \end{aligned}}$$

<u>B.</u> **otočenie súradnicovej sústavy**



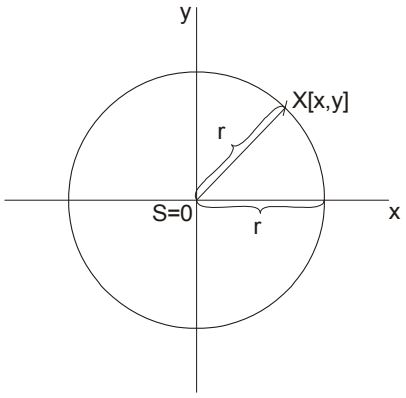
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}}$$

- <u>kružnica</u>

<u>Def.</u>

Kružnica k so stredom S a polomerom r je množina všetkých bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od bodu S je r.

$$k(S,r)=\{X \in \rho; |XS| = r\}$$



- kružnica so stredom v začiatku súradnicovej sústavy

$$X \in k \Leftrightarrow |XS| = r$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = r$$

$$\boxed{k: x^2+y^2=r^2}$$

stredová rovnica kružnice $S[0,0]$

<u>Pr.</u>

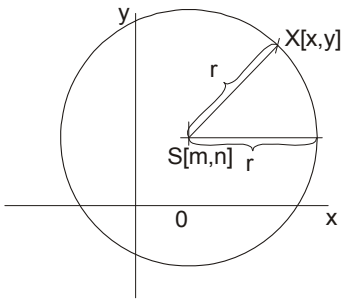
Napíšte rovnicu kružnice k, ktorá má stred v začiatku súradnicovej sústavy a prechádza bodom $A[-3,4]$:

$$k: x^2+y^2=r^2$$

$$(-3)^2+4^2=r^2$$

$$r^2=25 \qquad r=5$$

$$k: x^2+y^2=25$$



- kružnica, ktorá nemá stred v začiatku súradnicovej sústavy

$$X \in k \Leftrightarrow |XS| = r$$

$$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2} = r$$

$$\boxed{k: (x-m)^2+(y-n)^2=r^2}$$

stredová rovnica kružnice $S[m,n]$

<u>Pr.</u>

Napíšte rovnicu kružnice:

a) so stredom $S[2,-3]$ a polomerom $r=3$ $\qquad k: (x-2)^2+(y+3)^2=9$

b) s priemerom $AB; A[6,1], B[0,7]$ a stredom $S[3,4]$

$$d=|AB|=\sqrt{6^2+(-6)^2}=\sqrt{72}=2.\sqrt{18} \qquad r=\sqrt{18}$$

$$k: (x-3)^2+(y-4)^2=18$$

Pr.

Zistite, či na kružnici, so stredom $S[0,3]$ a polomerom $r=2$, ležia body $A[2,2], C[-2,3]$:

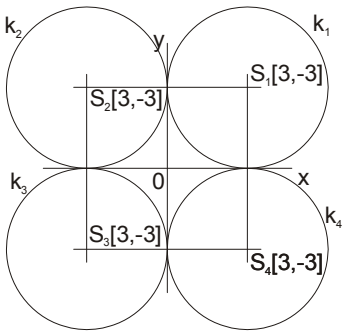
$$k: x^2+(y-3)^2=4$$

$$A[2,2]\ldots 2^2+(2-3)^2=4+1=5\neq 4\ldots A\notin k$$

$$C[-2,3]\ldots (-2)^2+(3-3)^2=4+0=4\ldots C\in k$$

Pr.

Nájdite kružnicu, ktorá sa dotýka súradnicových osí a má polomer $r=3$:



$$k_1: (x-3)^2+(y-3)^2=9$$

$$k_2: (x+3)^2+(y-3)^2=9$$

$$k_3: (x+3)^2+(y+3)^2=9$$

$$k_4: (x+3)^2+(y+3)^2=9$$

$$k: (x\pm 3)^2+(y\pm 3)^2=9$$

- zoberme si stredovú rovnicu kružnice $k: (x-m)^2+(y-n)^2=r^2$ a uvažujme nasledovne:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

$$(x-m)^2+(y-n)^2-r^2=0$$

$$x^2-2xm+m^2+y^2-2yn+n^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2+(-2m)x+(-2n)y+(m^2+n^2-r^2)=0$$

- ďalej si označme: $A=-2m, B=-2n, C=m^2+n^2-r^2$ a potom dostávame:

$$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$$ **všeobecná rovnica kružnice**

Pr.

Zistite, či daná rovnica je rovnicou kružnice:

a) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

- máme dve možnosti riešenia:

1. **dosadíme do vzťahov**: $A=-2m, B=-2n, C=m^2+n^2-r^2$

$$-4=-2m \ \wedge\ 6=-2n \ \wedge\ 4=m^2+n^2-r^2$$

$$m=2 \qquad n=-3 \qquad 4=4+9-r^2$$

$$S[2,-3] \qquad r=3 \qquad k: (x-2)^2+(y+3)^2=9$$

2. je zrejmé, že pre prvý postup si musíme pamätať tri rovnice a môžem sa ľahko zmýliť a preto je tento postup menej používaný, pri nasledujúcom postupe budeme v rovnici **dopĺňať na štvorce**

$$x^2+y^2-4x+6y+4=0$$

$$(x^2-4x+4)-4+(y^2+6y+9)-9+4=0$$

$$k: (x-2)^2+(y+3)^2=9$$

- pri riešení dopĺňaním na štvorce máme tri možnosti:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$A = -2m, B = -2n, C = m^2 + n^2 - r^2$$
$$\left(x^2 - 2mx + m^2\right) - m^2 + \left(y^2 - 2ny + n^2\right) - n^2 + m^2 + n^2 - r^2 = 0$$
$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

1. $r^2 > 0$ … kružnica
2. $r^2 = 0$ … bod
3. $r^2 < 0$ … nie je ani kružnica a ani bod

---

b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0$$
$$\left(x^2 + 4x + 4\right) - 4 + \left(y^2 - 6y + 9\right) - 9 + 14 = 0$$
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = -1$$ nie je kružnica

<u>Pr.</u>

Nájdite rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A[5,1], B[0,6], C[4,-2]$:

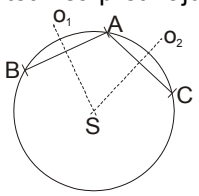
- pri riešení takejto úlohy máme dve možnosti:

<u>1.</u> využijeme všeobecnú rovnicu kružnice $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, dosadíme do nej za x a y > máme sústavu troch rovníc o troch neznámych:

$$26 + 5A + B + C = 0$$
$$36 + 0A + 6B + C = 0$$
$$20 + 4A - 2B + C = 0 \quad \Big|\cdot(-1)$$
$$6 + A + 3B = 0$$
$$16 - 4A + 8B = 0$$
$$24 + 4A + 12B = 0$$
$$16 - 4A + 8B = 0$$
$$40 + 20B = 0$$
$$B = -2, C = -24, A = 0$$

$$k: x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$$

<u>2.</u> keďže tri body ležiace na kružnici neležia na jednej priamke, tak tvoria dve tetivy a osi tetív sa pretínajú v strede kružnice



$A[5,1]$ $B[0,6]$ $\qquad$ $A[5,1]$ $C[4,-2]$

$S_1[2{,}5;3{,}5]$ $\qquad$ $S_2[4{,}5;0{,}5]$

$\vec{n_1} = \overrightarrow{BA} = [5,-5]$ $\qquad$ $\vec{n_2} = \overrightarrow{CA} = [1,3]$

$o_1: 5x - 5y + c = 0$ $\qquad$ $o_2: x + 3y + c = 0$

$S_1 \in o_1$ $\qquad$ $S_2 \in o_2$

$o_1: 5x - 5y + 5 = 0$ $\qquad$ $o_2: x + 3y - 3 = 0$

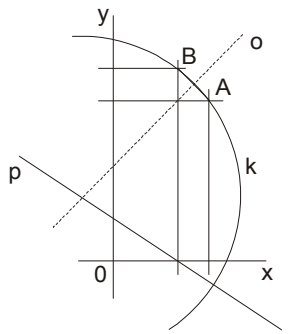
$$5x-5y+5=0$$
$$x+3y-3=0$$
$$5x-5y+5=0$$
$$-5x-15y+15=0$$
$$20y=20$$
$$y=1, x=0 \qquad S[0,1]$$

- použijeme stredovú rovnicu: $k: x^2+(y-1)^2=r^2$ dosadíme bod (napr. $A[5,1]$):

$$25+0=r^2$$
$$r=5 \qquad k: x^2+(y-1)^2=25$$

Pr.

Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A[3,5], B[2,6]$ a stred S leží na priamke $p: 2x+3y-4=0$:



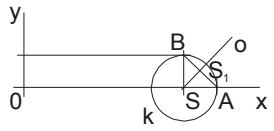
$$A[3,5] \quad B[2,6]$$
$$S_1[2{,}5;5{,}5] \qquad \vec{n}=\overrightarrow{AB}=[-1,1]$$
$$o: -x+y+c=0 \qquad S_1 \in o$$
$$o: -x+y-3=0$$

$$2x+3y-4=0$$
$$-x+y-3=0$$
$$2x+3y-4=0 \qquad 5y=10$$
$$-2x+2y-6=0 \qquad y=2, x=-1 \quad S[-1,2]$$

$$k: (x+1)^2+(y-2)^2=r^2$$
$$A\ldots 16+9=r^2 \qquad r=5 \qquad k: (x+1)^2+(y-2)^2=25$$

Pr.

Nájdite rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A[6,0], B[5,1]$ a stred S leží na osi x:



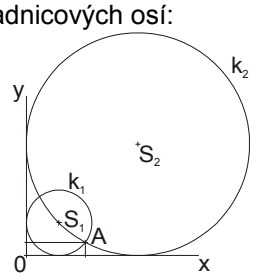
$$A[6,0] \quad B[5,1]$$
$$S_1[5{,}5;0{,}5] \qquad \vec{n}=\overrightarrow{BA}=[-1,1]$$
$$o: -x+y+c=0 \qquad S_1 \in o$$

$$o: -x+y+5=0$$
$$x: y=0$$
$$y=0=n, x=5=m \qquad S[5,0]$$

$$k: (x-5)^2+y^2=r^2 \qquad A \in k \rightarrow r^2=1$$
$$k: (x-5)^2+y^2=1$$

Pr.

Nájdite rovnice všetkých kružníc, ktoré prechádzajú bodom $A[9,2]$ a dotýkajú sa oboch súradnicových osí:



$A[9,2] \qquad S_1[s_1,s_1] \qquad S_2[s_2,s_2]$

$|AS_1| = |S_1x|$

$x: y = 0 \qquad |S_1x| = \frac{|0s_1+s_1+0|}{1} = s_1$

$|AS| = s_1 = r$

$$\sqrt{(9-s_1)^2+(2-s_1)^2} = s_1$$

$$\sqrt{85-22s_1+2s_1^{\ 2}} = s_1$$

$$85-22s_1+2s_1^{\ 2} = s_1^{\ 2}$$

$$D = b^2-4ac = 144 \qquad \sqrt{D} = 12$$

$$s_{1_{1,2}} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{22\pm12}{2}$$

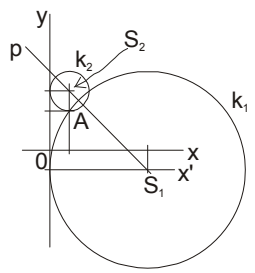
$$s_1 = 5 \quad s_2 = 17$$

$$k_1: (x-5)^2+(y-5)^2 = 25$$

$$k_2: (x-17)^2+(y-17)^2 = 289$$

Pr.

Nájdite kružnicu, ktorá prechádza bodom $A[1,2]$, dotýka sa osi y a stred S leží na priamke $p: x+y-4=0$:



$S = p \cap x'$

$S_1[s_1,s_2]$

$x: y = 0 \qquad x': y - s_2 = 0$

$$\begin{array}{l} x+y-4=0 \\ \quad y-s_2=0 \\ \hline x = 4-s_2 \end{array} \qquad S[s_1,s_2] \qquad s_1 = 4-s_2$$

$y: x = 0 \qquad |Sy| = |AS| = r \qquad |Sy| = \frac{|s_1+0s_2+0|}{1} = s_1$

$$|AS| = \sqrt{(1-s_1)^2+(2-s_2)^2} = s_1$$

$$(1-s_1)^2+(2-s_2)^2 = s_1^{\ 2}$$

- po úprave dostávame:

$$s_1^{\ 2}-6s_1+5=0$$

$$(s_1-1)(s_1-5)=0$$

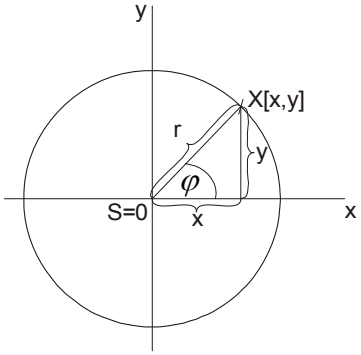
$$s_1 = 1 \ \vee \ s_1 = 5$$

$$s_2 = 3 \qquad s_2 = -1$$

$$k_1: (x-1)^2+(y-3)^2 = 1$$

$$k_2: (x-5)^2+(y+1)^2 = 25$$

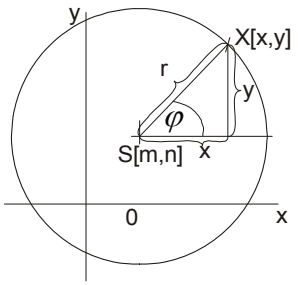
- <u>parametrické vyjadrenie kružnice</u>



$\cos\varphi = \frac{r}{x}$ $\sin\varphi = \frac{r}{y}$

$$\boxed{\begin{aligned} k:\ x &= r.\cos\varphi \\ y &= r.\sin\varphi;\varphi \in R \end{aligned}}$$

parametrická rovnica kružnice $S[0,0]$

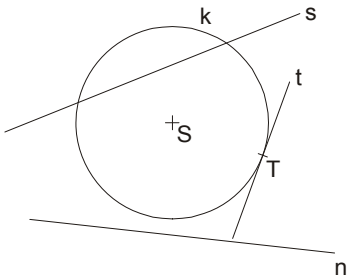


$$\begin{aligned} k:\ x' &= r.\cos x \\ y' &= r.\sin x \\ \hline x - m &= r.\cos x \\ y - n &= r.\sin x \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k:\ x &= m + r.\cos\varphi \\ y &= n + r.\sin\varphi;\varphi \in R \end{aligned}}$$

parametrická rovnica kružnice $S[m,n]$

- <u>priamka a kružnica</u>



- dva spoločné body - **sečnica**
- jeden spoločná bod - **dotyčnica (tangenta)**
- žiaden spoločný bod - **nesečnica**

<u>Pr.</u>

Určite $c \in R$ tak, aby priamka $p: 3x + 4y + c = 0$ bola a) sečnicou, b) dotyčnicou, c) nesečnicou kružnice $k: x^2 + y^2 = 25$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ 3x + 4y + c &= 0 \\ \hline 3x &= -4y - c \\ 9x^2 + 9y^2 &= 225 \\ \hline (-4y - c)^2 + 9y^2 &= 225 \\ 25y^2 + 8cy + (c^2 - 225) &= 0 \end{aligned}$$

$$D = -36c^2 + 22500$$

a) sečnica … $D > 0$

$-36c^2 + 22500 > 0$

$22500 > 36c^2$

$625 > c^2$

$|c| < 25$

$c \in (-25, 25)$

b) dotyčnica … $D = 0$

$-36c^2 + 22500 = 0$

$22500 = 36c^2$

$625 = c^2$

$|c| = 25$

$c \in \{-25, 25\}$

c) nesečnica … $D < 0$

$-36c^2 + 22500 < 0$

$22500 < 36c^2$

$625 < c^2$

$|c| > 25$

$c \in (-\infty, -25) \cup (25, \infty)$

<u>Pr.</u>

Nájdite rovnicu dotyčnice, ktorá s osou x zviera uhol $\varphi = 45°$, ku kružnici $k: x^2 + y^2 = 49$:

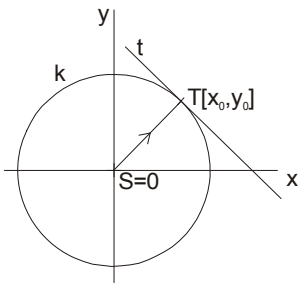
$k: x^2 + y^2 = 49$

$t: y = k_t x + q \qquad k_t = \mathrm{tg}45° = 1$

$t: y = x + q$

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 49 \\ &\underline{y = x + q} \\ &2x^2 + 2xq + q^2 - 49 = 0 \\ &D = -4q^2 + 392 = 0 \\ &4q^2 = 392 \\ &q^2 = 98 \qquad |q| = \sqrt{98} \qquad t: y = x \pm \sqrt{98} \end{aligned}$$

- odvodenie rovnice dotyčnice ku kružnici:



$k: x^2 + y^2 = r^2 \quad T[x_0, y_0] \in k \quad r^2 = x_0^2 + y_0^2$

$t: ax + by + c = 0 \quad \vec{n_t} = \overrightarrow{ST} = [x_0, y_0]$

$t: x_0 x + y_0 y + c = 0 \quad T \in t$

$t: x_0 x + y_0 y - x_0^2 - y_0^2 = 0$

$t: x_0 x + y_0 y - r^2 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &k: x^2 + y^2 = r^2 \quad T[x_0, y_0] \\ &t: x_0 x + y_0 y = r^2 \end{aligned}}$$

dotyčnica ku kružnici $S[0,0]$

$$\boxed{\begin{aligned} &k: (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \quad T[x_0, y_0] \\ &t: (x_0 - m)(x-m) + (y_0 - n)(y-n) = r^2 \end{aligned}}$$

dotyčnica ku kružnici $S[m,n]$

Pr.

Nájdite rovnicu dotyčnice:

a) ku kružnici $k: x^2 + y^2 = 9$ v bode $T[2, y_0]$

$y_0 = \pm\sqrt{5}$ $\quad T_1[2, \sqrt{5}]$ $\quad t_1: 2x + \sqrt{5}y - 9 = 0$

$T_2[2, -\sqrt{5}]$ $\quad t_2: 2x - \sqrt{5}y - 9 = 0$

b) ku kružnici so stredom $S[2, -1]$ a polomerom $r = 3$ v bode $T[3, y_0 < 0]$

$k: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

$(y_0 + 1)^2 = 8 \quad y_0{}^2 + 2y - 7 = 0 \qquad y_{01,2} = \frac{-2+4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$

$y_0 < 0 \ldots y_0 = 1 - 2\sqrt{2} \qquad T[3, -1 - 2\sqrt{2}]$

$t: (x-2) - 2\sqrt{2}(y+1) - 9 = 0$

Pr.

Je daná kružnica $k: (x-3)^2 + (y+12)^2 = 100$ a body $L[9, -4], M[5, 2]$. Určite dotyčnice ku kružnici, danými bodmi:

a) $L[9, -4]$

$(9-3)^2 + (-4+12)^2 = 100$

$100 = 100 \qquad L \in k$ - jedna dotyčnica

$(x-3)(9-3) + (y+12)(-4+12) = 100$

$6x - 18 + 8y + 96 = 100$

$3x - 9 + 4y + 48 = 50$

$t: 3x + 4y - 11 = 0$

b) $M[5, 2]$

$(5-3)^2 + (2+12)^2 \neq 100$

$200 > 100 \qquad M \notin k$ - dve dotyčnice

$t: (x-3)(x_0 - 3) + (y+12)(y_0 + 12) = 100$

$M \in t \ldots (5-3)(x_0 - 3) + (2+12)(y_0 + 12) = 100$

$x_0 + 7y_0 + 31 = 0$

$T \in t \ldots (x_0 - 3)^2 + (y_0 + 12)^2 = 100$

$x_0 + 7y_0 + 31 = 0 \quad \ldots \quad x_0 = -31 - 7y_0$

$(x_0 - 3)^2 + (y_0 + 12)^2 = 100$

$(-7y_0 - 34)^2 + (y_0 + 12)^2 = 100$

-po úprave:

$y_0{}^2 + 10y_0 + 24 = 0$

$(y_0 + 4)(y_0 + 6) = 0$

$y_0 = -4 \vee y_0 = -6$

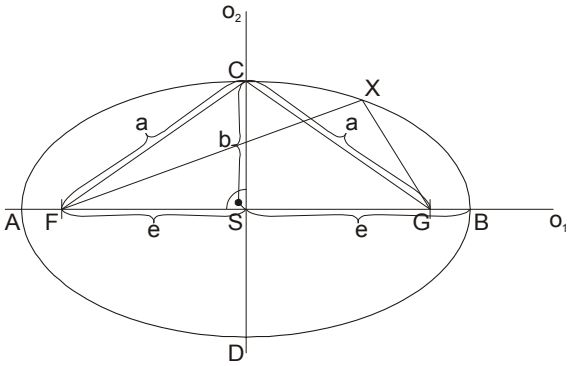
$T_1[-3, -4] \qquad t_1: 3x - 4y - 7 = 0$

$T_2[11, -6] \qquad t_2: 4x + 3y - 26 = 0$

- <u>elipsa</u>

<u>Def.</u>

Elipsa je množina všetkých bodov X v rovine, ktoré majú od dvoch pevných bodov F, G, v rovine, stály súčet vzdialeností $2a = |FX| + |GX| > |FG|$.



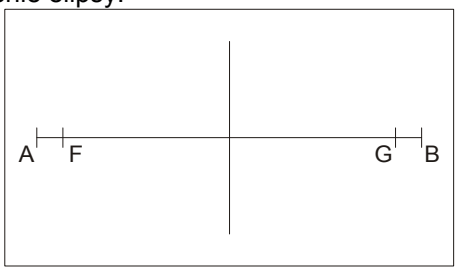
F, G - **ohniská**
A, B - **hlavné vrcholy**
C, D - **vedľajšie vrcholy**
S - **stred elipsy** (stred súmernosti)
o_1 - **hlavná os** (ležia na nej A, B, F, G)
o_2 - **vedľajšia os** (ležia na nej C, D)
a - **hlavná polos**
b - **vedľajšia polos**
e - **excentricita** (výstrednosť)

- pre a, b, e platí vzťah:

$$\boxed{a^2 = e^2 + b^2}$$

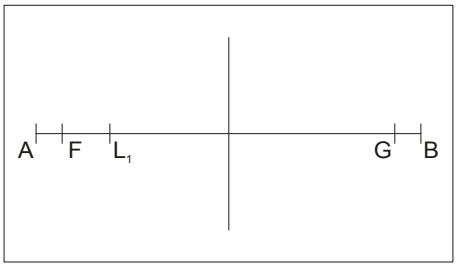
- zostrojenie elipsy:

1.



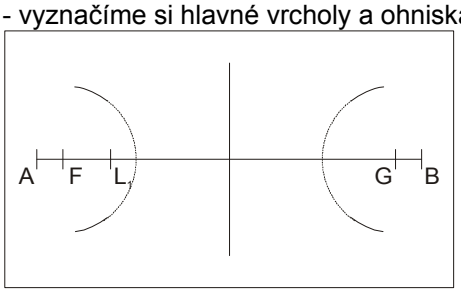
- nakreslíme si hlavnú a vedľajšiu os
- vyznačíme si hlavné vrcholy a ohniská

2.



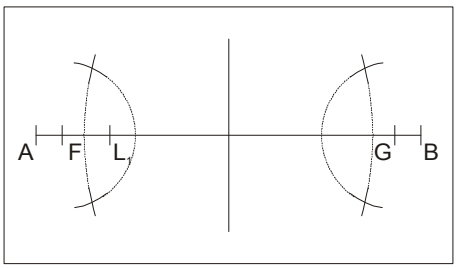
- na hlavnej osi si zvolíme bod L_1

3.



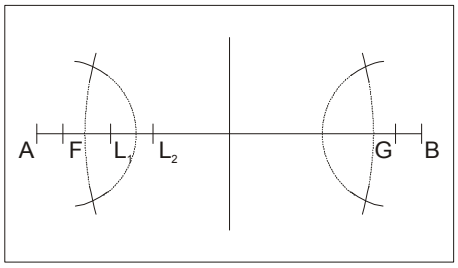
- vzdialenosť $|AL_1|$ nanesieme od F, G

4.



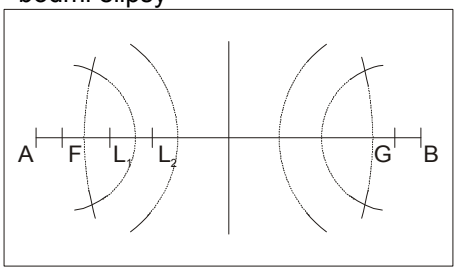
- vzdialenosť $|BL_1|$ nanesieme od F, G
- dostaneme tak štyri priesečníky, ktoré sú bodmi elipsy

5.



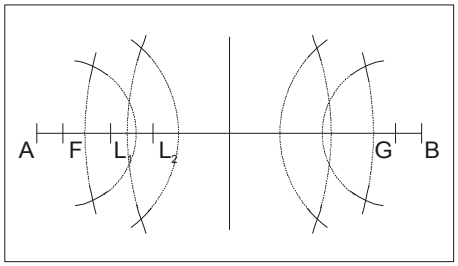
- na hlavnej osi si zvolíme bod L_2

6.



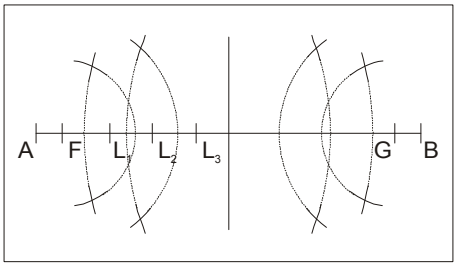
- vzdialenosť $|AL_2|$ nanesieme od F, G

7.



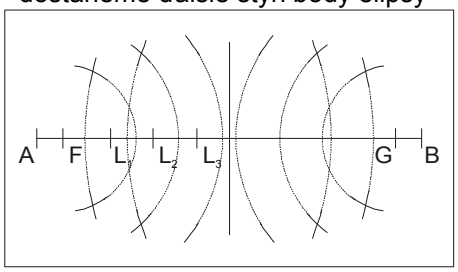
- vzdialenosť $|BL_2|$ nanesieme od F, G
- dostaneme ďalšie štyri body elipsy

8.



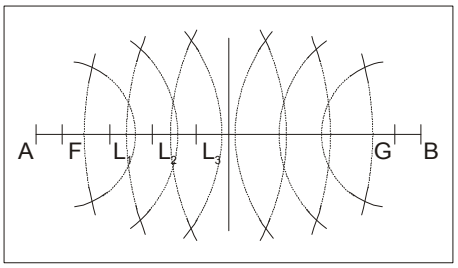
- na hlavnej osi si zvolíme bod L_3

9.



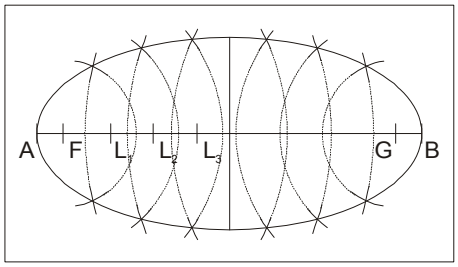
- vzdialenosť $|AL_3|$ nanesieme od F, G

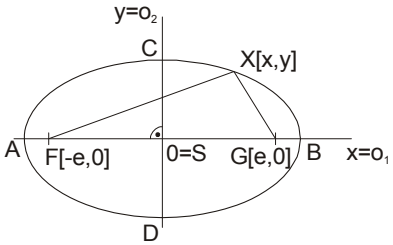
10.



- vzdialenosť $|BL_3|$ nanesieme od F, G
- dostaneme ďalšie štyri body elipsy

> takto môžeme pokračovať ďalej a čím viac bodov zostrojíme, tým bude nákres elipsy presnejší:





$$X \in E \Leftrightarrow |XF| + |XG| = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

$$x^2 + 2ex + e^2 + y^2 + x^2 - 2ex + e^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + e^2 + y^2 + 2xe)(x^2 + e^2 + y^2 - 2xe)} = 4a^2$$

$$2(x^2 + e^2 + y^2) + 2\sqrt{(x^2 + e^2 + y^2)^2 - 4x^2e^2} = 4a^2$$

$$\sqrt{(x^2 + e^2 + y^2)^2 - 4x^2e^2} = 2a^2 - (x^2 + e^2 + y^2)$$

$$(x^2 + e^2 + y^2)^2 - 4x^2e^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + e^2 + y^2) + (x^2 + e^2 + y^2)^2$$

$$a^2(x^2 + e^2 + y^2) - x^2e^2 = a^4$$

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2) \qquad (a^2 - e^2 = b^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

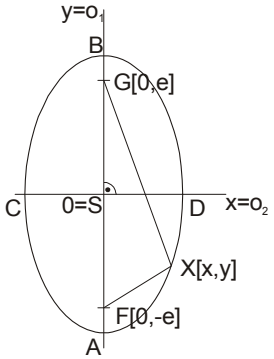
> potom pre rovnicu elipsy dostávame:

$$\boxed{E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

stredová rovnica elipsy $S[0,0]$ **a hlavná os je os** x

- ak sa polosi rovnajú, dostaneme kružnicu s polomerom a a po dosadení do rovnice elipsy máme známy vzorec: $x^2 + y^2 = a^2$

- majme elipsu, ktorej hlavná os je os y:



- potom jej stredová rovnica bude:

$$\boxed{E: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

stredová rovnica elipsy $S[0,0]$ **a hlavná os je os** y

Pr.

Napíšte rovnicu elipsy, ktorá má stred v začiatku súradnicovej sústavy $o_1 = x$ a $a = 13, e = 12$:

$$b^2 = a^2 - e^2 = 169 - 144 = 25 \qquad b = 5$$

$$E: \tfrac{x^2}{169} + \tfrac{y^2}{25} = 1$$

Pr.

Určite všetky prvky elipsy $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$:

- je zrejmé, že elipsa bude mať hlavnú os y, keďže $b^2 < a^2 \ldots 9 < 12$

$$S[0,0] \qquad b = 3, a = \sqrt{12} = 2.\sqrt{3}$$

$$e^2 = a^2 - b^2 = 3 \qquad e = \sqrt{3}$$

$$A[0,-a] = A[0,-2\sqrt{3}] \qquad C[-b,0] = C[-3,0]$$

$$B[0,a] = B[0,2\sqrt{3}] \qquad D[b,0] = D[3,0]$$

$$F[0,-e] = F[0,-\sqrt{3}] \qquad G[0,e] = G[0,\sqrt{3}]$$

Pr.

Nájdite rovnicu elipsy so stredom $S[0,0]$, $o_1 = x$, $e = 2$ a prechádza bodom $M\left[1, \frac{2}{3}\sqrt{10}\right]$:

$$e: \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a^2 = b^2 + 4 \qquad M \in e$$

$$e: \tfrac{1}{b^2+4} + \tfrac{40}{9b^2} = 1$$

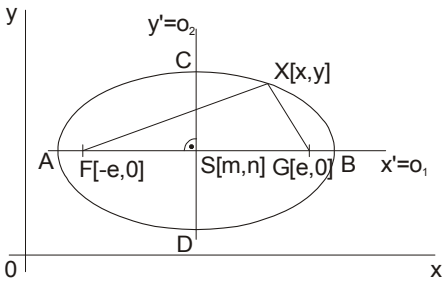
$$1.(9b^2) + 40.(b^2 + 4) = 9b^4 + 36b^2$$

$$9b^4 - 13b^2 - 160 = 0 \qquad b^2 = z$$

$$9z^2 - 13z - 160 = 0 \qquad z_{1,2} = \tfrac{13 \pm 77}{18} \qquad z_1 = 5 = b^2 \qquad z_2 = -\tfrac{32}{9}$$

$$b = \sqrt{5}, a = 3$$

$$E: \tfrac{x^2}{9} + \tfrac{y^2}{5} = 1$$



$$E: \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$
$$x' = x - m$$
$$y' = y - n$$

$$\boxed{e: \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$$

stredová rovnica elipsy $S[m,n]$ **a hlavná os je rovnobežná s osou** x

$$\boxed{e: \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1}$$

stredová rovnica elipsy $S[m,n]$ **a hlavná os je rovnobežná s osou** y

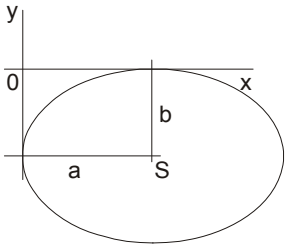
<u>Pr.</u>

Určite všetky prvky elipsy $E: \frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$:

$$S[-3,2], a = 4, b = 3, e = \sqrt{7}$$
$$F\left[-3-\sqrt{7},2\right], G\left[-3+\sqrt{7},2\right], A[-7,2], B[1,2], C[-3,5], D[-3,-1]$$

<u>Pr.</u>

Napíšte rovnicu elipsy, ktorá má stred $S[6,-4]$ a $o_1 \parallel x$:



$$a = 6, b = 4$$
$$E: \frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

- zoberme si stredovú rovnicu elipsy $e: \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ a uvažujme nasledovne:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$
$$(x-m)^2.b^2 + (y-n)^2.a^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 + \left(-2b^2m\right)x + \left(-2a^2n\right)y + \left(b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2\right) = 0$$

- ďalej si označme: $A = b^2, B = a^2, C = -2b^2m, D = -2a^2n,$

$E = b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2$ a potom dostávame:

$$A, B > 0, A \neq B$$

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0}$$

všeobecná rovnica elipsy

(osi sú rovnobežné so súradnicovými osami)

Pr.

Zistite, či daná rovnica je rovnicou elipsy:

a) $9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$

- máme dve možnosti riešenia:

1. **dosadíme do vzťahov**: $A=b^2, B=a^2, C=-2b^2m, D=-2a^2n,$

$$E=b^2m^2+a^2n^2-a^2b^2$$

$$9=b^2 \ \wedge \ 25=a^2 \ \wedge \ -54=-2b^2m \ \wedge \ -100=-2a^2n \ \wedge$$

$$\wedge \ -44=b^2m^2+a^2n^2-a^2b^2$$

$$a=5, b=3, m=3, n=2, S[2,-3] \qquad E: \tfrac{(x-3)^2}{25}+\tfrac{(y-2)^2}{9}=1$$

2. je zrejmé, že pre prvý postup si musíme pamätať štyri rovnice a môžem sa ľahko zmýliť a preto je tento postup menej používaný, pri nasledujúcom postupe budeme v rovnici **dopĺňať na štvorce**

$$9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$$

$$9(x^2-6x)+25(y^2-4y)=44$$

$$9(x^2-6x+9-9)+25(y^2-4y+4-4)=44$$

$$9(x-3)^2-81+25(y-2)^2-100=44$$

$$9(x-3)^2+25(y-2)^2=225$$

$$E: \tfrac{(x-3)^2}{25}+\tfrac{(y-2)^2}{9}=1$$

- pri riešení dopĺňaním na štvorce máme tri možnosti:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

$$A\left(x^2+\tfrac{C}{A}x+\tfrac{C^2}{4A^2}-\tfrac{C^2}{4A^2}\right)+B\left(y^2+\tfrac{D}{B}y+\tfrac{D^2}{4B^2}-\tfrac{D^2}{4B^2}\right)=-E$$

$$A\left(x+\tfrac{C}{2A}\right)^2-\tfrac{C^2}{4A}+B\left(y+\tfrac{D}{2B}\right)^2-\tfrac{D^2}{4B}=-E$$

$$A\left(x+\tfrac{C}{2A}\right)^2+B\left(y+\tfrac{D}{2B}\right)^2=\tfrac{C^2}{4A}+\tfrac{D^2}{4B}-E$$

$$\frac{\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2}{B}+\frac{\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2}{A}=\frac{\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E}{AB}$$

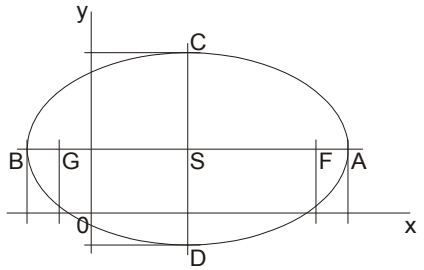
$$\frac{\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2}{B}+\frac{\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2}{A}=\tfrac{C^2}{4A^2B}+\tfrac{D^2}{4AB^2}-\tfrac{E}{AB}$$

1. $\tfrac{C^2}{4A^2B}+\tfrac{D^2}{4AB^2}-\tfrac{E}{AB}=1$ … elipsa
2. $\tfrac{C^2}{4A^2B}+\tfrac{D^2}{4AB^2}-\tfrac{E}{AB}=0$ … bod
3. $\tfrac{C^2}{4A^2B}+\tfrac{D^2}{4AB^2}-\tfrac{E}{AB}=-1$ … nie je ani elipsa a ani bod

---

- na záver riešenia, určíme všetky prvky a načrtneme si elipsu:

$$a=5, b=3, e=4, S[3,2], A[8,2], B[-2,2], C[3,5], D[3,-1], F[7,2], G[-1,2]$$



b) $9x^2+4y^2-36x+72y+324=0$

$$9\left(x^2-4x+4-4\right)+4\left(y^2+18y+9-9\right)=-324$$

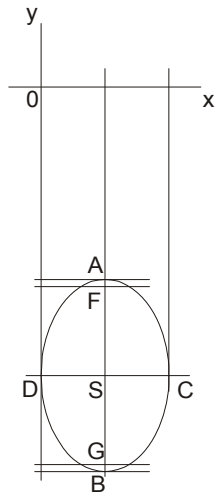
$$9(x-2)^2+4(y+9)^2=36$$

$$E:\ \tfrac{(x-2)^2}{4}+\tfrac{(y+9)^2}{9}=1$$

$$a=3, b=2, e=\sqrt{5}$$

$$S[2,-9], A[2,-6], B[2,-12], C[4,-9], D[0,-9],$$

$$F\left[2,-9+\sqrt{5}\right], G\left[2,-9-\sqrt{5}\right]$$



c) $7x^2+5y^2-28x+38=0$

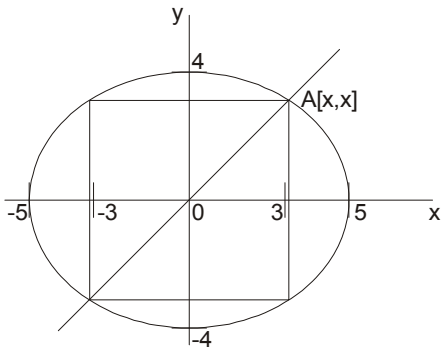
$$7\left(x^2-4x+4-4\right)+5(y+0)^2=-38$$

$$7(x-2)^2+5(y+0)^2=-10$$

$35\not<-10$ > nie je elipsa

Pr.

Vypočítajte obsah štvorca $ABCD$, vpísaného do elipsy $E: 16x^2+25y^2=400$



$$E:\ \tfrac{x^2}{25}+\tfrac{y^2}{16}=1$$

$$S[0,0], a=5, b=4, e=3$$

$$F[-3,0], G[3,0], A[-5,0], B[5,0], C[0,4], D[0,-4]$$

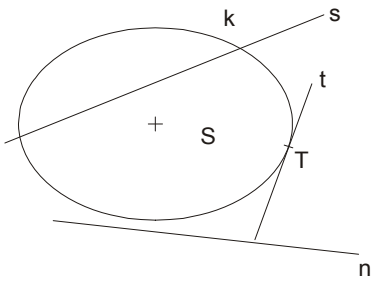
$$A\in E$$

$$16x^2+25x^2=400$$

$$x^2=\tfrac{400}{41} \qquad x=\sqrt{\tfrac{400}{41}}$$

$$a=2x \qquad S=a^2=4x^2=\tfrac{1600}{41}$$

- <u>priamka a elipsa</u>



- dva spoločné body - **sečnica**
- jeden spoločná bod - **dotyčnica (tangenta)**
- žiaden spoločný bod - **nesečnica**

Pr.

Určite $c\in R$ tak, aby priamka $p: 4x+5y+c=0$ bola a) sečnicou, b) nesečnicou, c) dotyčnicou elipsy $E: 9x^2+25y^2=900$:

$$p: y=-\tfrac{4}{5}x-\tfrac{c}{5}\ldots 5y=-4x-c\ldots 9x^2+(-4x-c)^2=900$$

$$25x^2+8cx+\left(c^2-900=0\right)$$

$$D=-36c^2+90000$$

a) sečnica … $D > 0$

$$-36c^2 + 90000 > 0$$
$$90000 > 36c^2$$
$$2500 > c^2$$
$$|c| < 50$$
$$c \in (-50, 50)$$

b) nesečnica … $D < 0$

$$-36c^2 + 90000 < 0$$
$$90000 < 36c^2$$
$$2500 < c^2$$
$$|c| > 50$$
$$c \in (-\infty, -50) \cup (50, \infty)$$

c) dotyčnica … $D = 0$

$$-36c^2 + 90000 = 0$$
$$90000 = 36c^2$$
$$2500 = c^2$$
$$|c| = 50$$
$$c \in \{-50, 50\}$$

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad T[x_0, y_0]$$
$$t: \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

dotyčnica ku elipse $S[0,0]$

$$E: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad T[x_0, y_0]$$
$$t: \frac{x_0 x}{b^2} + \frac{y_0 y}{a^2} = 1$$

dotyčnica ku elipse $S[0,0]$

$$E: \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad T[x_0, y_0]$$
$$t: \frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} + \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1$$

dotyčnica ku elipse $S[m,n]$

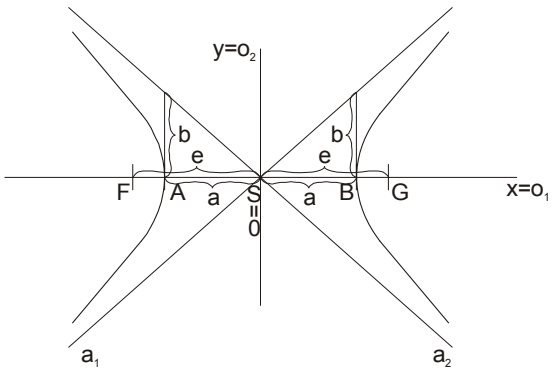
$$E: \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 \quad T[x_0, y_0]$$
$$t: \frac{(x_0-m)(x-m)}{b^2} + \frac{(y_0-n)(y-n)}{a^2} = 1$$

dotyčnica ku elipse $S[m,n]$

- <u>hyperbola</u>

<u>Def.</u>

Hyperbola je množina všetkých bodov X v rovine, ktoré majú od dvoch pevných bodov F, G, v rovine, stálu absolútnu hodnotu rozdielu vzdialeností, menšiu a vzdialenosť týchto bodov: $\big||FX| - |GX|\big| = 2a < |FG| = 2e$.



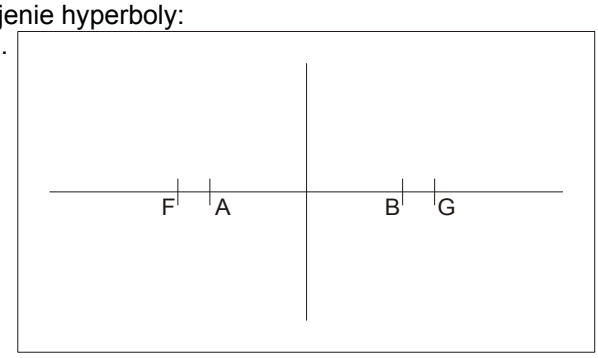
F, G - **ohniská**
A, B - **hlavné vrcholy**
S - **stred hyperboly**
o_1 - **hlavná os** (ležia na nej A, B, F, G)
o_2 - **vedľajšia os**
a - **hlavná polos**
b - **vedľajšia polos**
e - **excentricita** (výstrednosť)
a_1, a_2 - **asymptoty**

- pre a, b, e platí vzťah:

$$\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$$

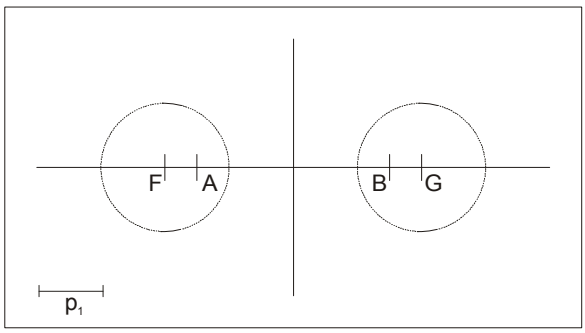
- zostrojenie hyperboly:

1.



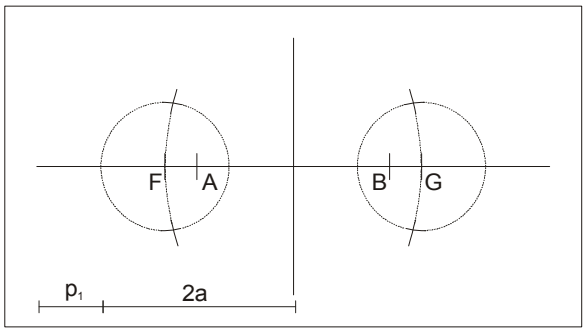
- nakreslíme si hlavnú a vedľajšiu os
- vyznačíme si hlavné vrcholy a ohniská

2.



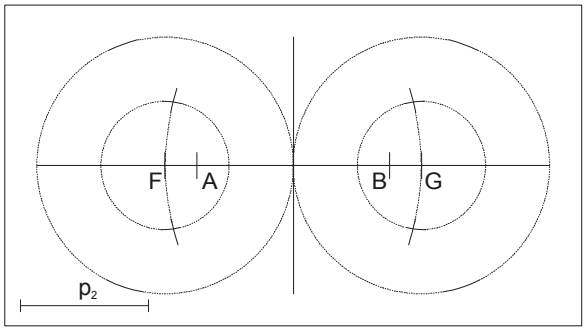
- zvolíme si polomer p_1
- v ohniskách opíšeme kružnice s polomerom p_1

3.



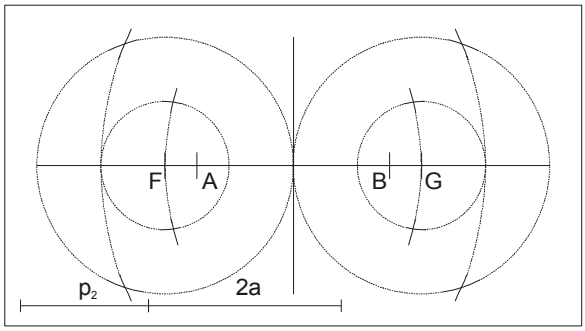
- v ohniskách opíšeme kružnice s polomerom $p_1 + 2a$
- tieto kružnice sa pretnú v štyroch bodoch hyperboly

4.



- zvolíme si polomer p_2
- v ohniskách opíšeme kružnice s polomerom p_2

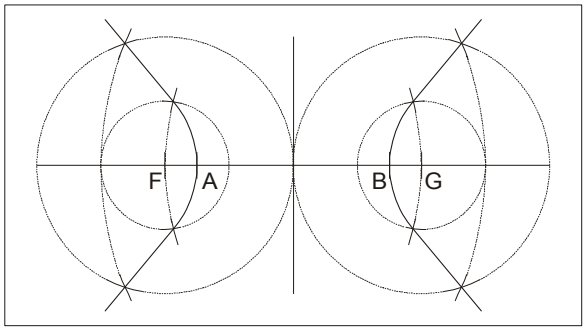
5.



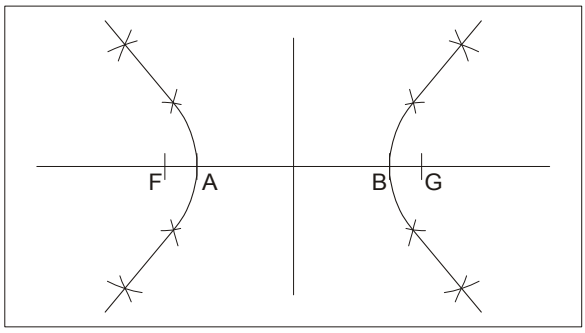
- v ohniskách opíšeme kružnice s polomerom $p_2 + 2a$
- dostaneme ďalšie štyri body hyperboly

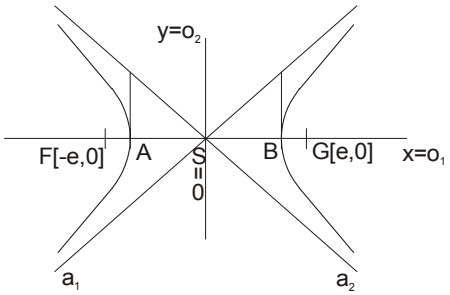
> takto môžeme pokračovať ďalej a čím viac bodov zostrojíme, tým bude nákres hyperboly presnejší:

6.



7.





$$X \in H \Leftrightarrow \left\| FX \right| - \left| GX \right\| = 2a$$

$$\left| \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$x^2 + 2ex + e^2 + y^2 + x^2 - 2ex + e^2 + y^2 - 2\sqrt{\left(x^2 + e^2 + y^2 + 2xe\right)\left(x^2 + e^2 + y^2 - 2xe\right)} = 4a^2$$

$$2\left(x^2 + e^2 + y^2\right) - 2\sqrt{\left(x^2 + e^2 + y^2\right)^2 - 4x^2e^2} = 4a^2$$

$$\sqrt{\left(x^2 + e^2 + y^2\right)^2 - 4x^2e^2} = \left(x^2 + e^2 + y^2\right) - 2a^2$$

$$\left(x^2 + e^2 + y^2\right)^2 - 4x^2e^2 = 4a^4 - 4a^2\left(x^2 + e^2 + y^2\right) + \left(x^2 + e^2 + y^2\right)^2$$

$$a^2\left(x^2 + e^2 + y^2\right) - x^2e^2 = a^4$$

$$x^2\left(a^2 - e^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - e^2\right) \qquad \left(e^2 - a^2 = b^2\right)$$

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

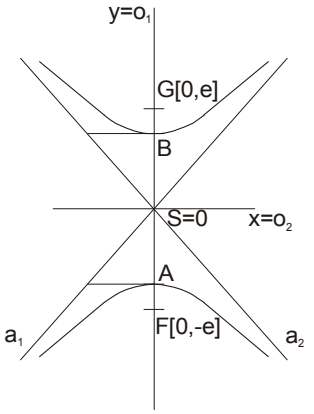
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

> potom pre rovnicu hyperboly dostávame:

$$\boxed{H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

stredová rovnica hyperboly $S[0,0]$ **a hlavná os je os** x

- majme hyperbolu, ktorej hlavná os je os y :



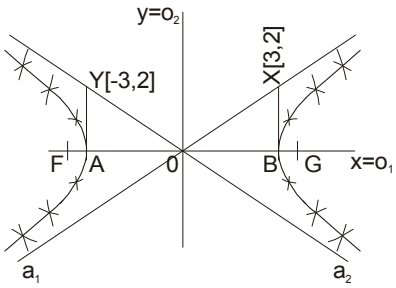
- potom jej stredová rovnica bude:

$$\boxed{H : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

stredová rovnica hyperboly $S[0,0]$ **a hlavná os je os** y

Pr.

Určite všetky prvky hyperboly $H : 4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ a napíšte rovnice asymptôt:



$H : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

$S[0,0], a = 3, b = 2, e = \sqrt{13}$

$A[-3,0], B[3,0], F[-\sqrt{13},0], G[\sqrt{13},0]$

$\vec{s_1} = \overrightarrow{SX} = [3,2]$ $\quad a_1 : x = 3t$

$y = 2t; t \in R$

$\vec{s_2} = \overrightarrow{SY} = [-3,2]$ $\quad a_2 : x = -3t$

$y = 2t; t \in R$

- alebo:

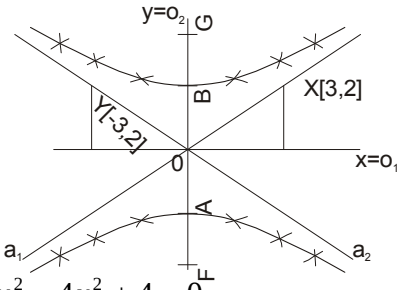
$a_1 : y = kx + q \quad k = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \quad S[0,0]$

$a_1 : y = \frac{2}{3} \quad a_2 : y = -\frac{2}{3}$

Pr.

Určite všetky prvky hyperboly a rovnice asymptôt:

a) $H : 4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$



$H : \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

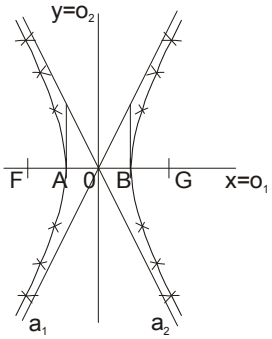
$S[0,0], a = 2, b = 3, e = \sqrt{13}$

$A[0,-2], B[0,2], F[0,-\sqrt{13}], G[0,\sqrt{13}]$

$a_1 : y = kx + q \quad k = \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \quad S[0,0]$

$a_1 : y = \frac{2}{3}x \quad a_2 : y = -\frac{2}{3}x$

b) $H : y^2 - 4x^2 + 4 = 0$



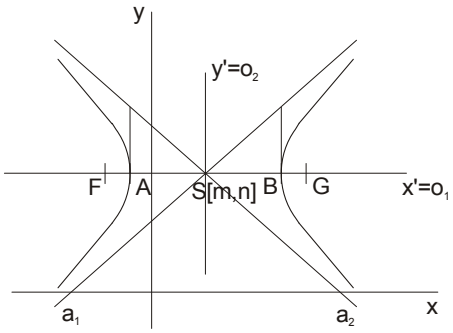
$H : x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

$S[0,0], a = 1, b = 2, e = \sqrt{5}$

$A[-1,0], B[1,0], F[-\sqrt{5},0], G[\sqrt{5},0]$

$a_1 : y = kx + q \quad k = \frac{b}{a} = 2 \quad S[0,0]$

$a_1 : y = 2x \quad a_2 : y = -2x$



$$H: \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$
$$x' = x - m$$
$$y' = y - n$$

$$\boxed{H: \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$$

stredová rovnica hyperboly $S[m,n]$ **a hlavná os je rovnobežná s osou** x

$$\boxed{H: \frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1}$$

stredová rovnica hyperboly $S[m,n]$ **a hlavná os je rovnobežná s osou** y

- zoberme si stredovú rovnicu hyperboly $H: \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ a uvažujme nasledovne:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$
$$(x-m)^2.b^2 - (y-n)^2.a^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 + (-2b^2m)x + (2a^2n)y + (b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

- ďalej si označme: $A = b^2, B = a^2, C = -2b^2m, D = 2a^2n,$

$E = b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2$ a potom dostávame:

$A, B > 0$

$$\boxed{Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0}$$

všeobecná rovnica hyperboly

(osi sú rovnobežné so súradnicovými osami)

<u>Pr.</u>

Zistite, či daná rovnica je rovnicou hyperboly:

a) $16x^2 - 9y^2 + 32x + 18y - 137 = 0$

- máme dve možnosti riešenia:

<u>1.</u> **dosadíme do vzťahov**: $A = b^2, B = a^2, C = -2b^2m, D = 2a^2n,$

$E = b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2$

$$16 = b^2 \ \wedge \ 9 = a^2 \ \wedge \ 32 = -2b^2m \ \wedge \ 18 = 2a^2n \ \wedge$$
$$\wedge \ -137 = b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2$$

$a = 3, b = 4, m = -1, n = 1, S[-1,1]$ $\quad H: \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

2. je zrejmé, že pre prvý postup si musíme pamätať štyri rovnice a môžem sa ľahko zmýliť a preto je tento postup menej používaný, pri nasledujúcom postupe budeme v rovnici **dopĺňať na štvorce**

$$16x^2 - 9y^2 + 32x + 18y - 137 = 0$$
$$16\left(x^2 + 2x\right) - 9\left(y^2 - 2y\right) = 137$$
$$16\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 9\left(y^2 - 2y + 1 - 1\right) = 137$$
$$16(x+1)^2 - 16 - 9(y-1)^2 + 9 = 137$$
$$16(x+1)^2 - 9(y-1)^2 = 144$$
$$H: \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

- pri riešení dopĺňaním na štvorce máme tri možnosti:

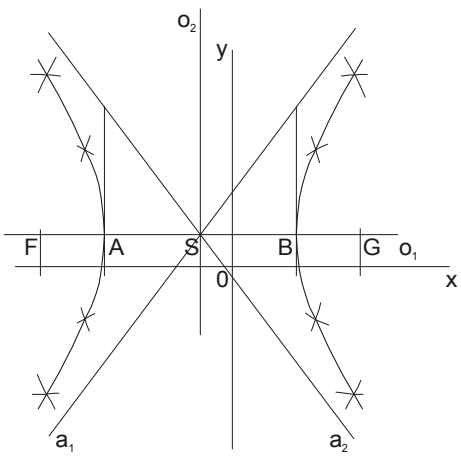
$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$$
$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{C^2}{4A^2} - \frac{C^2}{4A^2}\right) - B\left(y^2 - \frac{D}{B}y + \frac{D^2}{4B^2} - \frac{D^2}{4B^2}\right) = -E$$
$$A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{C^2}{4A} - B\left(y - \frac{D}{2B}\right)^2 - \frac{D^2}{4B} = -E$$
$$A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 - B\left(y - \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E$$
$$\frac{\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2}{B} - \frac{\left(y - \frac{D}{2B}\right)^2}{A} = \frac{\frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E}{AB}$$
$$\frac{\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2}{B} - \frac{\left(y - \frac{D}{2B}\right)^2}{A} = \frac{C^2}{4A^2B} + \frac{D^2}{4AB^2} - \frac{E}{AB}$$

1. $\frac{C^2}{4A^2B} + \frac{D^2}{4AB^2} - \frac{E}{AB} = 1$ … hyperbola $o_1 \parallel x$
2. $\frac{C^2}{4A^2B} + \frac{D^2}{4AB^2} - \frac{E}{AB} = -1$ … hyperbola $o_1 \parallel y$
3. $\frac{C^2}{4A^2B} + \frac{D^2}{4AB^2} - \frac{E}{AB} = 0$ … rôznobežky

$$\left(\frac{x-m}{a} + \frac{y-n}{b}\right)\left(\frac{x-m}{a} - \frac{y-n}{b}\right) = 0$$
$$\left(\frac{x-m}{a} + \frac{y-n}{b}\right) = 0 \vee \left(\frac{x-m}{a} - \frac{y-n}{b}\right) = 0$$

- na záver riešenia, určíme všetky prvky a načrtneme si hyperbolu:

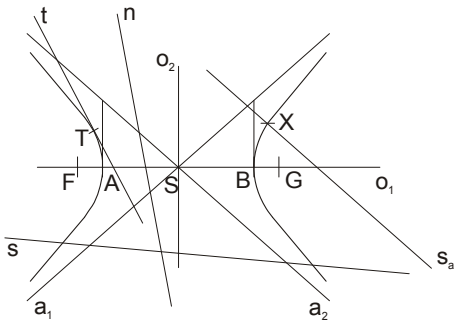
$$a = 3, b = 4, e = 5,$$
$$S[-1,1], A[-4,1], B[2,1]$$
$$F[-6,1], G[4,1]$$
$$k = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$
$$a_1: y = \frac{4}{3}x + q$$
$$S \in a_1$$
$$a_1: y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$
$$a_2: y = -\frac{4}{3}x + q$$
$$S \in a_2$$
$$a_1: y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$



b) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 32 = 0$

$$9\left(x^2 + 4x + 4 - 4\right) - 4\left(y^2 - 2y + 1 - 1\right) = -32$$
$$9(x+2)^2 - 36 - 4(y-1)^2 + 4 = -32$$
$$9(x+2)^2 - 4(y-1)^2 = 0$$
$$(3x+6)^2 - (2y-2)^2 = 0$$
$$(3x+6+2y-2).(3x+6-2y+2) = 0$$
$$3x + 2y + 4 = 0 \vee 3x - 2y + 8 = 0$$ rôznobežky

- <u>priamka a hyperbola</u>



- dva spoločné body - **sečnica**

- jeden spoločná bod - **dotyčnica (tangenta)**
  - **sečnica rovnobežná s asymptotou** (porovnáme smernice)

- žiaden spoločný bod - **nesečnica**
  - **asymptota**

<u>Pr.</u>

Zistite vzájomnú polohu priamky $p: x = 8 + 4t, y = 5t; t \in R$ a hyperboly $H: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$:

$$H: 25x^2 - 16y^2 = 400$$
$$25(8+4t)^2 - 16(5t)^2 = 400$$
$$25\left(64 + 64t + 16t^2\right) + 16.25t^2 = 400$$
$$1600t = 400$$
$$t = -\tfrac{3}{4} \ldots x = 5, y = -\tfrac{15}{4} \qquad P\left[5, -\tfrac{15}{4}\right]$$
$$s_p = [4,5] \qquad k = \tfrac{s_2}{s_1} = \tfrac{5}{4}$$
$$p: y = \tfrac{5}{4}x - 10$$ - sečnica rovnobežná s asymptotou

<u>Pr.</u>

Nájdite rovnicu hyperboly, ktorá má asymptoty $a_1: y - 3 = 2(x+1), a_2: y - 3 = -2(x+1)$ a prechádza bodom $M[4,9]$:

$$a_1: y = 2x + 5 \quad a_2: y = -2x + 1 \qquad a_1 \cap a_2 = S[m,n]$$
$$2x - y + 5 = 0$$
$$-2x - y + 1 = 0$$
$$-2y + 6 = 0 \qquad k = 2 = \tfrac{b}{a} \qquad b = 2a, M \in H$$
$$y = 3, x = -1 \quad S[-1,3] \qquad H: \tfrac{(x+1)^2}{a^2} - \tfrac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$
$$\tfrac{25}{a^2} - \tfrac{36}{4a^2} = 1$$
$$16 = a^2 \qquad a = 4, b = 8$$

$$H: \tfrac{(x+1)^2}{16} - \tfrac{(y-3)^2}{64} = 1$$

Pr.

Nájdite rovnicu hyperboly so stredom $S[0,0]$, prechádza bodom $A[15,6]$ a má asymptotu $a_1 : 2x+3y=0$:

$a_1 : y=-\frac{2}{3}x \quad a_2 : y=\frac{2}{3}x$

$\frac{2}{3}=\frac{b}{a} \quad b=\frac{2}{3}a \qquad a_2 \ldots x=15, y=10$

> hyperbola má hlavnú os os x, nakoľko bod $A[15,6]$ je pod ňou

$H : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{225}{a^2}-\frac{36}{a^2}\cdot\frac{9}{4}=1 \qquad \frac{144}{a^2}=1 \qquad 144=a^2$

$a=12, b=8 \quad H : \frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{64}=1$

$$H : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad T[x_0,y_0]$$
$$t : \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$$

dotyčnica ku hyperbole $S[0,0]$

$$H : \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad T[x_0,y_0]$$
$$t : \frac{y_0y}{a^2}-\frac{x_0x}{b^2}=1$$

dotyčnica ku hyperbole $S[0,0]$

$$H : \frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 \quad T[x_0,y_0]$$
$$t : \frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}-\frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2}=1$$

dotyčnica ku hyperbole $S[m,n]$

$$H : \frac{(y-n)^2}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{b^2}=1 \quad T[x_0,y_0]$$
$$t : \frac{(y_0-n)(y-n)}{a^2}-\frac{(x_0-m)(x-m)}{b^2}=1$$

dotyčnica ku hyperbole $S[m,n]$

Pr.

Napíšte rovnicu dotyčnice ku hyperbole $H : 25x^2-16y^2=1$ v bode $T[-3, y>0]$:

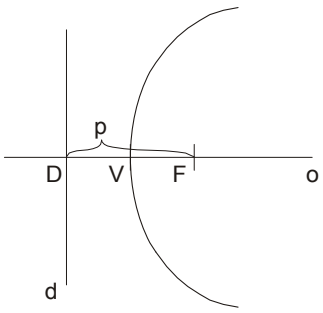
$T[-3,\sqrt{14}] \qquad H : \frac{x^2}{\frac{1}{25}}-\frac{y^2}{\frac{1}{16}}=1$

$t : \frac{-3x}{\frac{-}{15}}-\frac{\sqrt{14}y}{\frac{1}{16}}=1 \qquad t : 75x+16\sqrt{14}+1=0$

- <u>parabola</u>

<u>Def.</u>

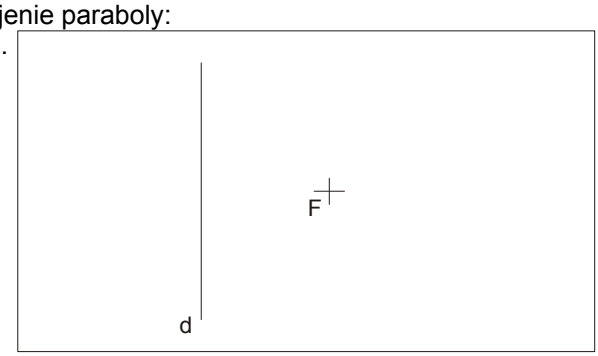
Parabola je množina všetkých bodov X v rovine, ktoré majú od danej priamky a bodu, ktorý na nej neleží, v rovine rovnakú vzdialenosť $|Xd|=|XF|$.



F - **ohnisko**
V - **vrchol paraboly**
p - **parameter**
o - **os** (ležia na nej V, F, D)
d - **určujúca (direkčná) priamka**
$D=o\cap d$

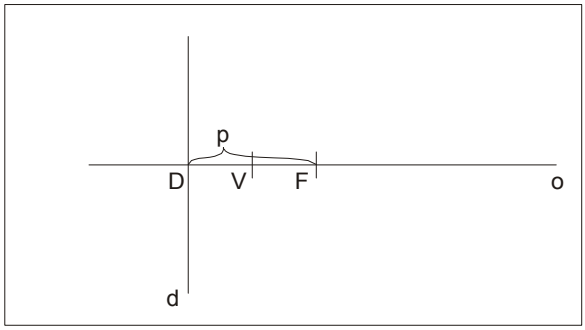
- zostrojenie paraboly:

1.



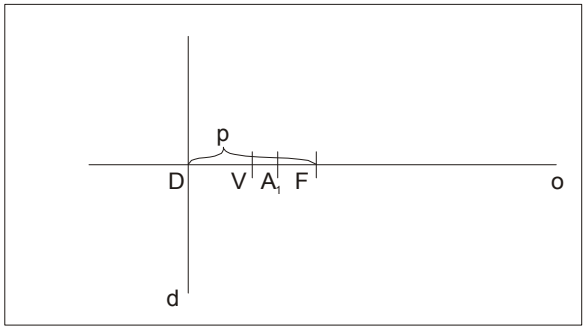
- máme danú určujúcu priamku d a ohnisko F

2.



- ohniskom vedieme kolmicu na určujúcu priamku, táto kolmica bude os o
- $D = o \cap d$ a potom $V = D \overset{-}{\cdot} F$
- ďalej platí: $|VF| = \frac{p}{2}$

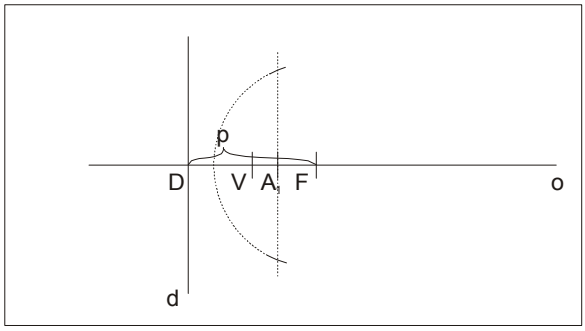
3.



- na osi o si zvolíme bod A_1

($A_1 \in \overrightarrow{VF}$)

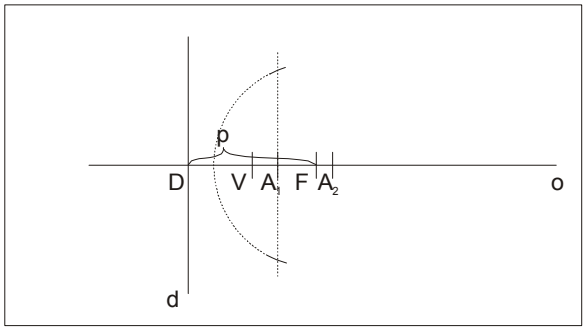
4.



- bodom A_1 vedieme rovnobežku s d a v ohnisku opíšeme kružnicu s polomerom $r = |DA_1|$

> dostaneme tak dva body paraboly

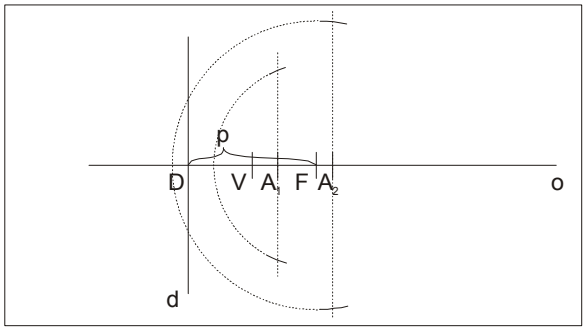
5.



- na osi o si zvolíme bod A_2

($A_2 \in \overrightarrow{VF}$)

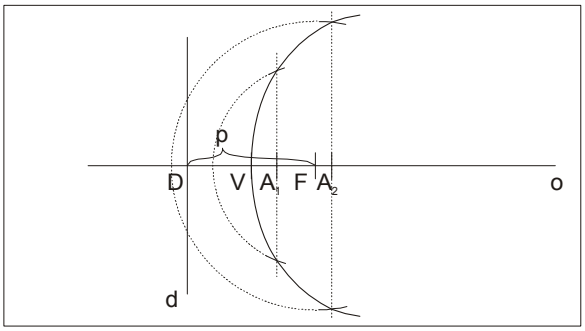
6.

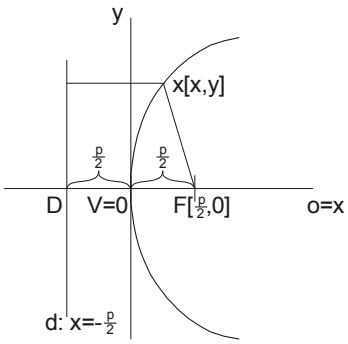


- bodom A_2 vedieme rovnobežku s d a v ohnisku opíšeme kružnicu s polomerom $r = |DA_2|$

> dostaneme tak ďalšie dva body paraboly

> takto môžeme pokračovať ďalej a čím viac bodov zostrojíme, tým bude nákres paraboly presnejší:





$$X \in P \Leftrightarrow |Xd| = |XF|$$

$$\frac{|2x+p|}{\sqrt{2^2+0^2}} = \sqrt{\left(x-\tfrac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2}$$

$$|2x+p| = 2.\sqrt{\left(x-\tfrac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2}$$

$$4x^2 + 4px + p^2 = 4x^2 - 4px + p^2 + 4y^2$$

$$4y^2 = 8px$$

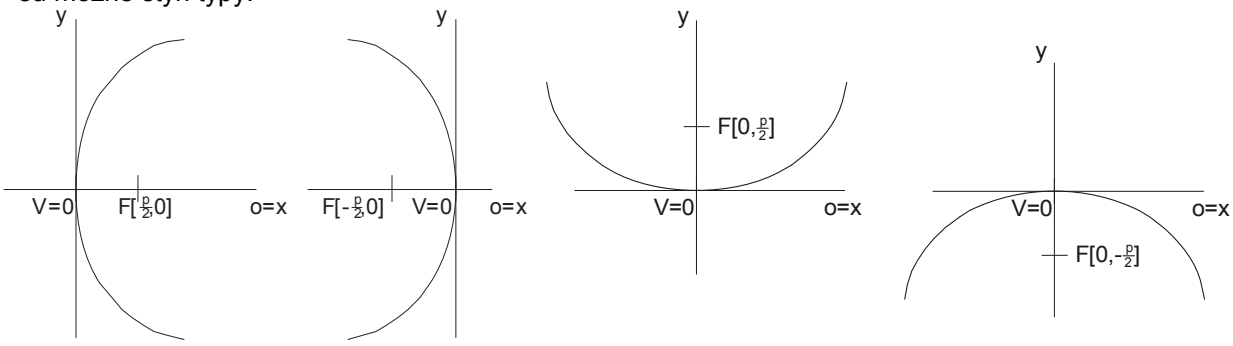
$$\boxed{P: y^2 = 2px}$$

vrcholová rovnica paraboly $V[0,0]$ **a hlavná os je os** x

$$\boxed{P: x^2 = 2py}$$

vrcholová rovnica paraboly $V[0,0]$ **a hlavná os je os** y

- sú možné štyri typy:



$P: y^2 = 2px$ $P: y^2 = -2px$ $P: x^2 = 2py$ $P: x^2 = -2py$

Pr.

Napíšte rovnicu paraboly:

a) $V[0,0], F[\frac{3}{2},0]$

$$P: y^2 = 2px \quad |VF| = \tfrac{p}{2} = \tfrac{3}{2} \quad p = 3 \quad P: y^2 = 6x$$

b) $V[0,0], F[0,5]$

$$P: x^2 = 2py \quad |VF| = \tfrac{p}{2} = 5 \quad p = 10 \quad P: x^2 = 20y$$

Pr.

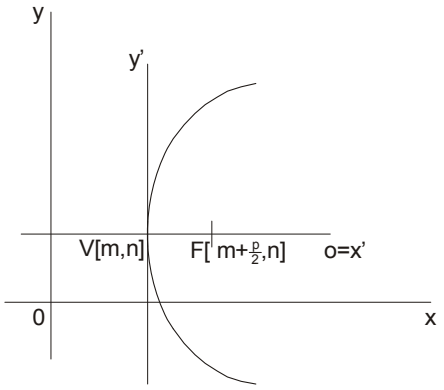
Nájdite parabolu, ktorá má os rovnobežnú so súradnicovou osou a prechádza bodom $A[2,6]$:

$$P: y^2 = 2px \qquad P: x^2 = 2py \qquad A[2,6]$$

$$36 = 4p \qquad 4 = 12p$$

$$p = 9 \qquad p = \tfrac{1}{3}$$

$$P: y^2 = 18x \qquad P: x^2 = \tfrac{2}{3}y$$



$$y'^2 = 2px'$$

$$(y-n)^2 = 2p(x-m)$$

$$\boxed{P: (y-n)^2 = \pm 2p(x-m)}$$

vrcholová rovnica paraboly $V[m,n]$ **a hlavná os je rovnobežná s osou** x

$$\boxed{P: (x-m)^2 = \pm 2p(y-n)}$$

vrcholová rovnica paraboly $V[m,n]$ **a hlavná os je rovnobežná s osou** y

- zoberme si vrcholovú rovnicu paraboly $(y-n)^2 = 2p(x-m)$ a uvažujme nasledovne:

$$(y-n)^2 = 2p(x-m)$$

$$y^2 + (-2p)x + (-2n)y + (n^2 + 2pm) = 0$$

- ďalej si označme: $A = -2p, B = -2n, C = n^2 + 2pm$ a potom dostávame:

$$A \neq 0$$

$$\boxed{y^2 + Ax + By + C = 0}$$

všeobecná rovnica paraboly

(os je rovnobežná s osou x)

$$\boxed{x^2 + Ay + Bx + C = 0}$$

všeobecná rovnica paraboly

(os je rovnobežná s osou y)

Pr.

Určite všetky prvky paraboly:

a) $y^2 + 6y - 4x + 1 = 0$

- máme dve možnosti riešenia:

1. **dosadíme do vzťahov**: $A = -2p, B = -2n, C = n^2 + 2pm$

$$-4 = -2p \ \wedge \ 6 = -2n \ \wedge 1 = n^2 + 2pm$$

$$p = 2 \qquad n = -3 \qquad 1 = 9 + 4m$$

$$m = -2$$

$$P : (y+3)^2 = 4(x+2)$$

2. je zrejmé, že pre prvý postup si musíme pamätať tri rovnice a môžem sa ľahko zmýliť a preto je tento postup menej používaný, pri nasledujúcom postupe budeme v rovnici **dopĺňať na štvorec**

$$y^2 + 6y - 4x + 1 = 0 \qquad (y-n)^2 = 2p(x-m)$$

$$y^2 + 6y = 4x - 1$$

$$y^2 + 6y + 9 - 9 = 4x - 1$$

$$(y+3)^2 = 4x + 8$$

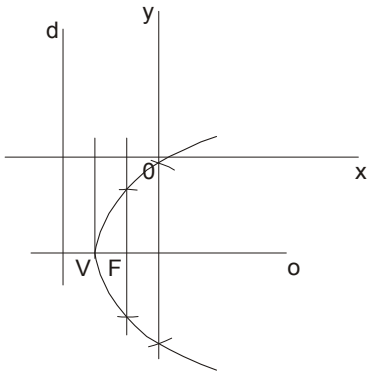
$$(y+3)^2 = 4(x+2)$$

- na záver riešenia, určíme všetky prvky a načrtneme si parabolu:

$$p = 2, m = -2, n = -3$$

$$V[-2,-3], F[-1,-3]$$

$$o : y = -3, d : x = -3$$



b) $x^2 - 10x + 9y + 61 = 0$

$$x^2 - 10x = -9y - 61$$

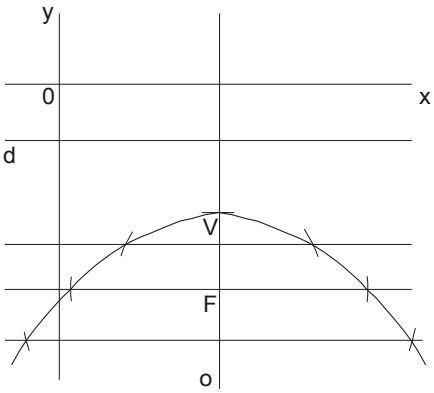
$$(x-5)^2 = -9y - 36$$

$$(x-5)^2 = -9(y+4)$$

$$m = 5, n = -4, p = \tfrac{9}{2}$$

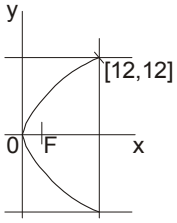
$$V[5,-4], F[5,-\tfrac{25}{4}]$$

$$o : x = 5, d : y = -\tfrac{7}{4}$$



Pr.

Priemer parabolického reflektoru auta je $24\,cm$ a hĺbka je $12\,cm$. Určite polohu diaľkového vlákna žiarovky, ak má byť v ohnisku:



$$P : y^2 = 2px \qquad [12,12] \in P$$

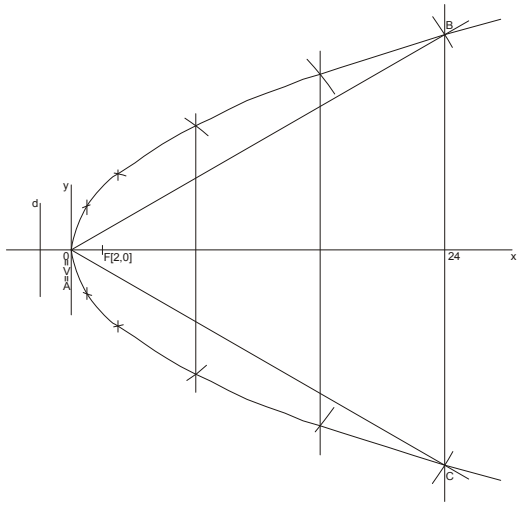
$$144 = 2.p.12$$

$$p = 6$$

$$F[3,0]$$

Pr.

Do paraboly $P: y^2 = 8x$ je vpísaný rovnostranný trojuholník ΔABC tak, že $A = V$. Určite súradnice vrcholov B, C:



$k = \mathrm{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$p_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

$y^2 = 8x$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

$y^2 = 8x$

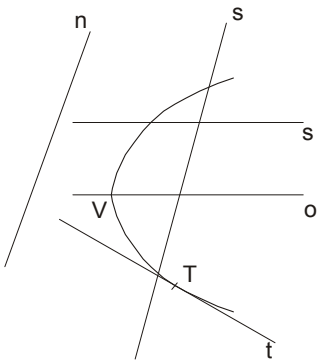
$y^2 = \frac{3}{9}x^2$

$\frac{3}{9}x^2 = 8x$

$x = 24$

$B[24, 8\sqrt{3}]; C[24, -8\sqrt{3}]$

- priamka a parabola



- dva spoločné body - **sečnica**

- jeden spoločná bod - **dotyčnica (tangenta)**
  - **sečnica rovnobežná s osou**
  (porovnáme smernice)

- žiaden spoločný bod - **nesečnica**

$P: y^2 = \pm 2px$
$y.y = \pm p(x + x) \quad T[x_0, y_0]$
$t: y_0.y = \pm p(x + x_0)$

dotyčnica ku parabole $V[0,0]$

$P: x^2 = \pm 2py$
$x.x = \pm p(y + y) \quad T[x_0, y_0]$
$t: x_0.x = \pm p(y + y_0)$

dotyčnica ku parabole $V[0,0]$

$P: (y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$
$(y-n).(y-n) = \pm p(x + x - 2m) \quad T[x_0, y_0]$
$t: (y_0 - n).(y-n) = \pm p(x + x_0 - 2m)$

dotyčnica ku parabole $V[m,n]$

$P: (x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$
$(x-m).(x-m) = \pm p(y + y - 2n) \quad T[x_0, y_0]$
$t: (x_0 - m).(x-m) = \pm p(y + y_0 - 2n)$

dotyčnica ku parabole $V[m,n]$

Pr.

Napíšte rovnicu dotyčnice ku parabole:

a) $P: y^2 = 8x \quad T[x_0, 4]$

$T[2,4], p = 4$

$t: 4y = 4(x+2)$

$t: y = x + 2$

b) $P: (x+1)^2 = 3(y-2) \quad T[2,5]$

$9 = 9, p = \frac{3}{2}$

$t: 3(x+1) = \frac{3}{2}(y+1)$

$t: 6x - 3y + 3 = 0$

- <u>vyšetrovanie bodov danej vlastnosti</u>

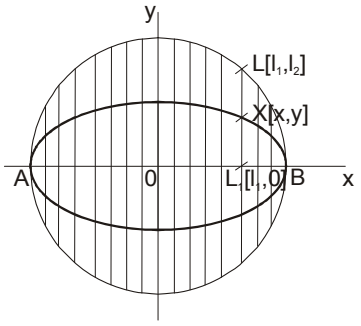
$\{X \in \rho; V(x)\} = U$

1. ak bod X má vlastnosť $V(x)$, tak bod X patrí útvaru U
2. ak bod X patrí útvaru U, tak bod X má vlastnosť $V(x)$

1. X má $V(x) \Rightarrow X \in U$
2. $X \in U \Rightarrow X$ má $V(x)$

<u>Pr.</u>

Je daná kružnica $k(S, 4cm)$ a jej priemer AB. Nájdite množinu všetkých bodov roviny, ktoré sú stredmi úsečiek $LL_1; L \in k$ a L_1 je päta kolmice z bodu L na AB:



$k: x^2 + y^2 = 16$

$L[l1, l2]; L_1[l1, 0]; X[x, y]$

1. X má $V(x) \Rightarrow X \in U$

$X = L \overset{-}{\cdot} L_1 \Rightarrow X \in U$

$X = L \overset{-}{\cdot} L_1$

$x = l_1 \wedge 2y = l_2$

$l_1^2 + l_2^2 = 16$

$x^2 + 4y^2 = 16$

$E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

$X \in E$

2. $X \in U \Rightarrow X$ má $V(x)$

$X \in E \Rightarrow X = L \overset{-}{\cdot} L_1$

$X \in E$

$E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

$x = l_1 \wedge y = \frac{l_2}{2}$

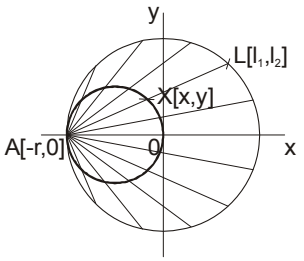
$\frac{l_1^2}{16} + \frac{l_2^2}{16} = 1$

$l_1^2 + l_2^2 = 16$

$L \in k \quad X = L \overset{-}{\cdot} L_1$

<u>Pr.</u>

Je daná kružnica $k(S, r)$ a na nej bod A. Bodom A vedieme všetky tetivy kružnice, zistite, čo bude množina stredov týchto tetív:



$k: x^2 + y^2 = r^2$

$L[l1, l2]; A[-r, 0]; X[x, y]$

$X = A \overset{-}{\cdot} L$

1. X má $V(x) \Rightarrow X \in U$

$X = A \overset{-}{\cdot} L \Rightarrow X \in U$

$X = A \overset{-}{\cdot} L$

$x = \frac{l_1 - r}{2} \wedge y = \frac{l_2}{2}$

$l_1 = 2x + r, l_2 = 2y$

$l_1^2 + l_2^2 = r^2$

$(2x + r)^2 + 4y^2 = r^2$

$4\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + 4y^2 = r^2$

$l: \left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$

$X \in l\left(S\left[-\frac{r}{2}, 0\right], r' = \frac{r}{2}\right)$

2. $X \in U \Rightarrow X$ má $V(x)$

$X \in l \Rightarrow X = A \overset{-}{\cdot} L$

$X \in l$

$l: \left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$

$x = \frac{l_1 - r}{2} \wedge y = \frac{l_2}{2}$

$\left(\frac{l_1}{2} - \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$

$\frac{l_1^2}{4} + \frac{l_2^2}{4} = \frac{r^2}{4}$

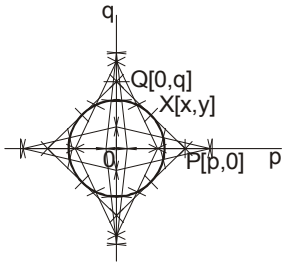
$l_1^2 + l_2^2 = r^2$

$L \in k$

$X = A \overset{-}{\cdot} L$

Pr.

Sú dané kolmice p, q a úsečka dĺžky l. Určite množinu všetkých bodov, do ktorých sa dostane stred úsečky, ak jej krajné body sa pohybujú po kolmiciach:



$l = |PQ|$

$l = \sqrt{p^2 + q^2}$

1. X má $V(x) \Rightarrow X \in U$

$X = P \dot{-} Q \Rightarrow X \in U$

$X = P \dot{-} Q$

$x = \frac{p}{2} \wedge y = \frac{q}{2}$

$p = 2x, q = 2y$

$l = \sqrt{p^2 + q^2}$

$l = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$

$4x^2 + 4y^2 = l^2$

$k : x^2 + y^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$

$X \in k\left(S[0,0], \frac{l}{2}\right)$

2. $X \in U \Rightarrow X$ má $V(x)$

$X \in k \Rightarrow X = P \dot{-} Q$

$X \in k$

$k : x^2 + y^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$

$x = \frac{p}{2} \wedge y = \frac{q}{2}$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$

$\frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} = \frac{l^2}{4}$

$l^2 = p^2 + q^2$

$l = \sqrt{p^2 + q^2}$

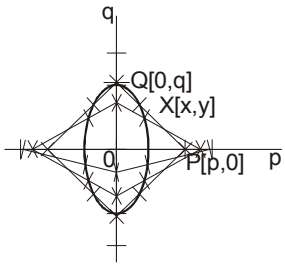
$l = \sqrt{(p-0)^2 + (0-q)^2}$

$l = |PQ|$

$X = P \quad Q$

Pr.

Sú dané kolmice p, q, úsečka dĺžky l a na nej bod X, ktorý ju delí v pomere $1:2$. Určite množinu všetkých bodov, do ktorých sa dostane bod X, ak sa krajné body úsečky sa pohybujú po kolmiciach:



$l = |PQ|$

$l = \sqrt{p^2 + q^2}$

1. X má $V(x) \Rightarrow X \in U$

X delí l v pomere $1:2$

$x = \frac{p}{3} \wedge y = \frac{2}{3}q$

$p = 3x, q = \frac{3}{2}y$

$l = \sqrt{p^2 + q^2}$

$l = \sqrt{9x^2 + \frac{9}{4}y^2}$

$l^2 = 9x^2 + \frac{9}{4}y^2$

$E : \frac{x^2}{\left(\frac{l}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2l}{3}\right)^2} = 1$

$X \in E; S[0,0],$

$a = \frac{2l}{3}, b = \frac{l}{3}$

2. $X \in U \Rightarrow X$ má $V(x)$

$X \in E$

$E : \frac{x^2}{\left(\frac{l}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2l}{3}\right)^2} = 1$

$x = \frac{p}{3} \wedge y = \frac{2}{3}q$

$\frac{\left(\frac{p}{3}\right)^2}{\left(\frac{l}{3}\right)^2} + \frac{\left(\frac{2}{3}q\right)^2}{\left(\frac{2l}{3}\right)^2} = 1$

$\frac{\frac{p^2}{9}}{\frac{l^2}{9}} + \frac{\frac{4}{9}q^2}{\frac{4l^2}{9}} = 1$

$p^2 + q^2 = l^2$

$l = \sqrt{p^2 + q^2}$

$l = |PQ|$

X delí l v pomere $1:2$

- <u>všeobecná teória kužeľosečiek</u>

- v priebehu tejto kapitoly sme sa zoznámili s kužeľosečkami, niektoré sme si charakterizovali obšírnejšie a iné nie; otázkou je či možno všetky kužeľosečky zahrnúť do jedného celku a určiť rovnaké vlastnosti pre všetky a tomu budeme venovať nasledovnú časť:

napr.:

1. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ … toto je kružnica, ale môžeme ju zapísať aj takto:

$$x^2 + y^2 + 0xy + 0x + 0y - 4 = 0$$

2. $x^2 + y^2 + 4 = 0$ … táto kužeľosečka je prázdna množina a môžeme ju zapísať:

$$x^2 + y^2 + 0xy + 0x + 0y + 4 = 0$$

3. $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$ … elipsa

$$9x^2 + 25y^2 + 0xy - 54x - 100y - 44 = 0$$

4. $xy = 4 \ldots y = \frac{4}{x}$ … hyperbola

$$0x^2 + 0y^2 + xy + 0x + 0y - 4 = 0$$

5. analytické vyjadrenie kužeľosečky, ktorú tvoria priamky:

$p: x - y + 1 = 0$

$q: x + y + 1 = 0$

$$(x - y + 1)(x + y + 1) = x^2 - y^2 + 2x + 1$$

$X[x, y]$ $\quad X \in K \Leftrightarrow X \in p \vee X \in q$

$$X \in K \Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \vee x + y + 1 = 0$$

$$x^2 - y^2 + 0xy + 2x + 0y + 1 = 0$$

<u>Def.</u>

Kužeľosečka je množina všetkých bodov v rovine, ktorých súradnice vyhovujú rovnici:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0; a, b, c, d, e, f \in R; a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0.$$

- každej kužeľosečke priraďujeme **determinant** $D = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$

> jednoduché pravidlo, ako si zapamätať koeficienty determinantu je:

1. riadok sú koeficienty členov s x
2. riadok sú koeficienty členov s y
3. riadok sú koeficienty nekvadratických členov

- <u>priamka a kužeľosečka</u>

$p: M[m, n]; \vec{u} = [u, v]$

$$p: x = m + ut$$
$$y = n + vt; t \in R$$
$$K: ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

- dosadíme za x, y do kužeľosečky:

$$a(m + ut)^2 + 2b(m + ut)(n + vt) + c(n + vt)^2 + 2d(m + ut) + 2e(n + vt) + f = 0$$

> budeme ďalej upravovať:

$$am^2 + 2amut + au^2t^2 + 2bmn + 2bmvt + 2butn + 2buvt^2 + cn^2 + 2cnvt +$$
$$+ cv^2t^2 + 2dm + 2dut + 2en + 2evt + f = 0$$

$$\left(au^2 + 2buv + cv^2\right)t^2 + 2\left[u\left(am + bn + d\right) + v\left(bm + cn + e\right)\right]t +$$
$$+ \left(am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f\right) = 0$$

> ďalej si označme:

$$A = au^2 + 2buv + cv^2$$
$$B = 2\left[u\left(am + bn + d\right) + v\left(bm + cn + e\right)\right]$$
$$C = am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f$$

> a pre prienik priamky a kužeľosečky dostávame rovnicu:

$$At^2 + Bt + C = 0$$

> teraz budeme hľadať možné riešenia danej rovnice:

1. $A = 0 \ldots Bt + C = 0$

   - $B = 0$
     - $C = 0$: $0t + 0 = 0$, ∞
     - $C \neq 0$: θ
   - $B \neq 0$: $t = -\frac{C}{B}$ … jedno riešenie

2. $A \neq 0 \ldots At^2 + Bt + C = 0$

   - kvadratická rovnica > má $0,1$ alebo 2 riešenia

> prienikom priamky a kužeľosečky môže byť:

1. θ … **prázdna množina**
2. **1-prvková množina**
3. **2-prvková množina**
4. ∞-prvková množina … **priamka**

- <u>asymptotické smery kužeľosečky</u>

<u>Def.</u>

Asymptotický smer kužeľosečky je určený takým vektorom $\vec{u} = [u, v]$, že každá priamka s ním rovnobežná má s kužeľosečkou spoločný najviac jeden alebo nekonečne veľa bodov.

(žiadna priamka, rovnobežná s asymptotickým smerom, nemôže mať s kužeľosečkou spoločné dva body)

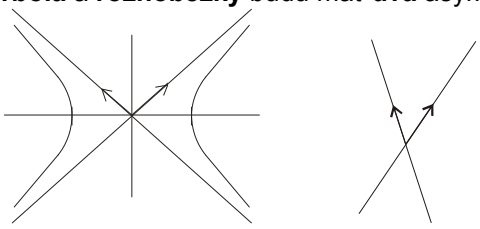
$$At^2 + Bt + C = 0$$
$$\vec{u} = [u, v]$$

> má to byť priamka a teda musí platiť: $A = 0$

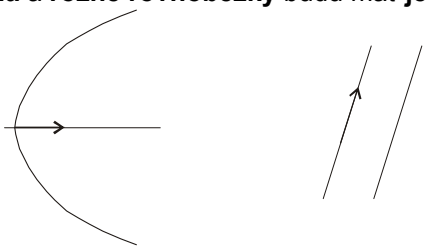
$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$ … **kvadratická rovnica a teda každá kužeľosečka má 0,1 alebo 2 asymptotické smery**

- je zrejmé, že:

1. **hyperbola** a **rôznobežky** budú mať **dva** asymptotické smery



2. **parabola** a **rôzne rovnobežky** budú mať **jeden** asymptotický smer



3. **kružnica** a **elipsa nebudú mať** asymptotické smery

4. pri kužeľosečkách ako sú **bod**, **prázdna množina** a **priamka** sa nedá spoľahnúť na názornú predstavu

<u>Pr.</u>

Určite asymptotické smery kužeľosečky:

a) $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

$\vec{u} = [u, v] \qquad A = 0$

$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$

> dosadíme prvé tri koeficienty:

$u^2 - 2uv - 3v^2 = 0$

> ďalej si zvolíme jednu súradnicu (napr. v)

1. $v = 0 \ldots u^2 = 0$

$u = 0$ > ako vidno môže sa stať, že dostaneme nulový vektor, ale ten nie je asymptotickým smerom; to znamená, že sme si zle zvolili súradnicu a musíme si ju zvoliť inak

2. $v = 1$

$u^2 - 2u - 3 = 0$

$(u-3)(u+1) = 0$

$u = 3 \vee u = -1$

$\vec{u}_1 = [3, 1]$

$\vec{u}_2 = [-1, 1]$

b) $xy - 1 = 0$

$\vec{u} = [u, v] \qquad A = 0$

$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$

$0u^2 + uv + 0v^2 = 0 \qquad uv = 0$

1. $v = 0 \ldots u.0 = 0 \ldots u \in R \qquad \vec{u}_1 = [1, 0]$

> keďže daná kužeľosečka je hyperbola, tak má dva asymp. smery

2. $v = 1 \ldots u = 0 \quad \vec{u}_2 = [0, 1]$

Pr.

Nájdite rovnicu všetkých kužeľosečiek, ktoré majú za asymptotické smery smery osí x, y:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$\vec{u}_1 = [1,0]; \vec{u}_2 = [0,1]$$

> dosadíme do rovnice:

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$$

$$a = 0, c = 0$$

> a máme rovnicu daných kužeľosečiek: $2bxy + 2dx + 2ey + f = 0$

- <u>stred kužeľosečky</u>

<u>Def.</u>

Stred kužeľosečky je jej stred súmernosti.

$At^2 + Bt + C = 0$ … t je koreň a aj $-t$ musí byť koreňom a teda $B = 0$

1. $A \neq 0 \ldots At^2 + C = 0$
   - ak $D < 0$, tak nemá rovnica riešenie (diskriminant)
   - ak $D = 0$, tak $t = -t = 0$
   - ak $D > 0$, tak:

$$t^2 = -\tfrac{C}{A}$$

$$|t| = \sqrt{-\tfrac{C}{A}}$$

$$t = \pm\sqrt{-\tfrac{C}{A}}$$

2. $A = 0 \ldots 0t^2 + 0t + C = 0$
   - ak $C \neq 0$, tak rovnica nemá riešenie
   - ak $C = 0$, tak $t \in R$

- ďalej platí:

$$B = 0$$

$$2[u(am + bn + d) + v(bm + cn + e)] = 0$$

$$u(am + bn + d) + v(bm + cn + e) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} am + bn + d = 0 \ \wedge \ bm + cn + e = 0 \\ S[m,n] \end{array}}$$

- každá kužeľosečka má 0, práve 1 alebo nekonečne veľa stredov tvoriacich priamku

Pr.

Nájdite stred kužeľosečky:

a) $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$

- sú dva spôsoby počítania:

1. $am + bn + d = 0$ → *prvé dva riadky determinantu*

$$\underline{bm + cn + e = 0}$$

$$m + 0n + 0 = 0$$

$$\underline{0 + n - 1 = 0}$$

$$m = 0, n = 1 \ldots S[0,1]$$

2. $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$

$x^2 - (y^2 - 2y) - 1 = 0$

$x^2 - (y^2 - 2y + 1 - 1) - 1 = 0$

$x^2 - (y-1)^2 + 1 - 1 = 0$

$x^2 - (y-1)^2 = 0$

$(x + y - 1)(x - y + 1) = 0$

- spravíme si sústavu:

$x + y - 1 = 0$

$x - y + 1 = 0$

> sčítame a máme $2x = 0 \ldots x = 0 \ldots y = 1$ $S[0,1]$

b) $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

$am + bn + d = 0$

$bm + cn + e = 0$

$2m - 3n - 1 = 0 \quad |\cdot 3$

$-3m + 5n + 1 = 0 \quad |\cdot 2$

$6m - 9n - 3 = 0$

$-6m + 10n + 2 = 0$

$n - 1 = 0$

$n = 1$

$m = \frac{3n+1}{2} = 2$ $S[2,1]$

- <u>singulárne body kužeľosečky</u>

- tieto body môžeme nazývať aj **zvláštne** body

<u>Def.</u>

Singulárny bod kužeľosečky je stred kužeľosečky, ktorý leží na kužeľosečke.

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

$S[m,n] \ldots am + bn + d = 0 \ \wedge \ bm + cn + e = 0$

$S[m,n] \in K$

$am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f = 0$

$(am^2 + bmn + dm) + (cn^2 + bmn + en) + (dm + en + f) = 0$

$m\underbrace{(am + bn + d)}_{0} + n\underbrace{(cn + bm + e)}_{0} + (dm + en + f) = 0$

$\boxed{dm + en + f = 0}$

$\left.\begin{array}{l} am + bn + d = 0 \\ bm + cn + e = 0 \end{array}\right\}$ stred $S[m,n]$

$dm + en + f = 0 \longrightarrow S[m,n] \in K$

Pr.

Určite singulárne body kužeľosečky a jej determinant:

a) $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

$$2m - 3n - 1 = 0$$
$$-3m + 5n + 1 = 0$$
$$n = 1, m = 2 \qquad S[2,1]$$

> teraz nám postačí súradnice stredu dosadiť do podmienky:

$$dm + en + f = 0$$
$$-m + n + 1 = 0 \qquad S[2,1]$$
$$-2 + 1 + 1 = 0$$
$$0 = 0 \qquad S \in K$$

> našli sme singulárny bod

$$D = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (10 + 3 + 3) - (5 + 9 + 2) = 0$$

b) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

$$am + bn + d = 0$$
$$bm + cn + e = 0$$
$$dm + en + f = 0$$
$$m - 2n + 1 = 0$$
$$-2m + 4n - 2 = 0$$
$$m - 2n + 1 = 0$$
$$m - 2n + 1 = 0 \ldots m = 2n - 1 \qquad S[2n-1, n]; n \in R \qquad D = 0$$

Pr.

Napíšte rovnicu kužeľosečky, ktorá má singulárny bod $A[0,0]$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$
$$am + bn + d = 0 \wedge bm + cn + e = 0 \wedge dm + en + f = 0$$
$$A[0,0] \ldots d = e = f = 0 \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

- <u>singulárne kužeľosečky</u>

<u>Def.</u>

Kužeľosečka sa nazýva singulárna ak je jej determinant rovný nule.
(*v opačnom prípade je regulárna*)

- singulárne kužeľosečky sú: rôznobežky, rôzne rovnobežky, priamka, bod a prázdna množina

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$$
$$4b^2 - 4ac$$
$$b^2 - ac$$

$b^2 - ac > 0$	$b^2 - ac = 0$	$b^2 - ac < 0$
2 asymptotické smery	1 asymptotický smer	0 asymptotických smerov
↓	↓	↓
rôznobežky	**prázdna množina** **priamka** **rôzne rovnobežky**	**bod**

- <u>regulárne kužeľosečky</u>

<u>Def.</u>

Kužeľosečka sa nazýva regulárna ak je jej determinant rôzny od nuly.

- regulárne kužeľosečky sú: hyperbola, parabola, elipsa, kružnica a prázdna množina

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$$

$$4b^2 - 4ac$$

$$b^2 - ac$$

$b^2 - ac > 0$	$b^2 - ac = 0$	$b^2 - ac < 0$
2 asymptotické smery	1 asymptotický smer	0 asymptotických smerov
↓	↓	↓
hyperbola	**parabola**	**elipsa** **kružnica** **prázdna množina**

<u>Pr.</u>

Akú kužeľosečku určuje rovnica:

a) $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 4y + 3 = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (12 + 16 + 16) - (16 + 16 + 12) = 0$$ > je singulárna

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$$

$$4u^2 + 4uv + v^2 = 0$$

1. $v = 0 \ldots 4u^2 = 0 \ldots u^2 = 0 \ldots u = 0$ > zle zvolená súradnica, zvolíme si inú
2. $v = 1 \ldots 4u^2 + 4u + 1 = 0$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$$

$$u = \tfrac{-b}{2a} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\vec{u} = \left[-\tfrac{1}{2}, 1\right]$$

$\vec{u} = [-1, 2]$ - jeden asymptotický smer (rôzne rovnobežky, priamka a prázdna množina)

- ďalej máme dve možnosti postupu:

1. upravovaním a dopĺňaním dostaneme súčin

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 4y + 3 = 0$$

$$\left(4x^2 + 4xy + y^2\right) + 4(2x + y) + 3 = 0$$

$$\left[(2x + y)^2 + 4(2x + y) + 4\right] - 4 + 3 = 0$$

$$(2x + y + 2)^2 - 1 = 0$$

$$(2x + y + 1)(2x + y + 3) = 0$$

$$p: 2x + y + 1 = 0 \qquad q: 2x + y + 3 = 0$$

2. keďže tu vystupujú kvadratické členy, budeme predpokladať, že sú to rôzne rovnobežky; máme asymptotický smer (smerový vektor)

$$\vec{n} = [2, 1]$$

$$p: 2x + y + c = 0$$

$$q: 2x + y + d = 0$$

$$(2x+y+c)(2x+y+d)=0$$
$$4x^2+2xy+2dx+2xy+y^2+dy+2cx+cy+cd=0$$

$$4x^2+4xy+y^2+(2c+2d)x+(c+d)y+cd=0$$
$$4x^2+4xy+y^2+8x+4y+3=0$$
$$8=2c+2d \;\wedge\; 4=c+d \;\wedge\; 3=cd$$
$$4=c+d \qquad c=4-d \qquad 3=(4-d)d$$
$$d^2-4d+3=0$$
$$(d-1)(d-3)=0$$
$$d=1 \vee d=3$$
$$c=3 \qquad c=1$$
$$p: 2x+y+1=0$$
$$q: 2x+y+3=0$$

b) $4x^2+4xy+y^2+8x+4y+5=0$

- táto kužeľosečka sa od predchádzajúcej líši iba v absolútnom člene, takže všetky vlastnosti budú také isté a rozdiel bude len pri konci riešenia:

$$4=c+d \;\wedge\; 5=cd$$
$$c=4-d \qquad 5=(4-d)d$$
$$d^2-4d+5=0$$
$$D=16-20=-4$$

> teda daná kužeľosečka je prázdna množina

> ako vidno rôzne rovnobežky a prázdna množina sú skoro podobné až na absolútny člen

c) $x^2-y^2+3x+y+2=0$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}=(-2+0+0)-\left(\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{4}+0\right)=0$$ > je singulárna

$$au^2+2buv+cv^2=0$$
$$u^2-v^2=0$$
$$v=1\ldots u^2=1\ldots|u|=1$$
$$\vec{u_1}=[1,1]\ldots\vec{n_1}=[1,-1]\ldots x-y+c=0$$
$$\vec{u_2}=[-1,1]\ldots\vec{n_2}=[1,1]\ldots x+y+d=0$$

rôznobežky

$$am+bn+d=0$$
$$bm+cn+e=0$$
$$dm+en+f=0$$

$$m+\tfrac{3}{2}=0$$
$$-n+\tfrac{1}{2}=0$$
$$\tfrac{3}{2}m+\tfrac{1}{2}n+2=0$$

$$m=-\tfrac{3}{2}, n=\tfrac{1}{2}, S\left[-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right]\in K$$
$$p: x+y+1=0$$
$$q: x-y+2=0$$

Pr.

Akú kužeľosečku určuje rovnica $x^2 + 2pxy + y^2 + 2x + 2qy - 3 = 0;\ p, q \in R$, keď vieme, že je singulárna:

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$$
$$u^2 + 2puv + v^2 = 0$$
$$v = 1 \ldots\ u^2 + 2pu + 1 = 0$$
$$D = 4p^2 - 4 = 0$$
$$p^2 = 1 \ldots |p| = 1$$
$$D = \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ p & 1 & q \\ 1 & q & -3 \end{vmatrix} = (-3 + 2pq) - (1 + q^2 - 3p^2) = 0$$
$$q^2 - 2pq - 3p^2 + 4 = 0$$

$p = 1$
$q^2 - 2q + 1 = 0$
$(q-1)^2 = 0$
$q = 1$

$p = -1$
$q^2 + 2q + 1 = 0$
$(q+1)^2 = 0$
$q = -1$

1. $p = 1, q = 1$

$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

$A[1,0] \ldots 0 = 0$ > nie je prázdna množina

$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$

$u^2 + 2uv + v^2 = 0$

$v = 1 \ldots\ u^2 + 2u + 1 = 0$

$(u+1)^2 = 0$

$u = -1$

$\vec{u} = [-1,1] \ldots \vec{n} = [1,1]$ > rôzne rovnobežky

$x + y + c = 0$

$x + y + d = 0$

$(x + y + c)(x + y + d) = 0$

$x^2 + xy + xc + xy + y^2 + yc + xd + yd + cd = 0$

$x^2 + 2xy + y^2 + (c+d)x + (c+d)y + cd = 0$

$c + d = 2 \ \wedge\ c + d = 2 \ \wedge\ cd = 3$

$d = 2 - c$

$c.(2 - c) = 3$

$c^2 - 2c + 3 = 0$

$(c+1)(c-3) = 0$

$c = -1 \vee c = 3$

$d = 3 \vee d = -1$

$p: x + y - 1 = 0$

$q: x + y + 3 = 0$

2. $p=-1, q=-1$

$x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$

$A[1,0]\ldots 0=0$ > nie je prázdna množina

$au^2+2buv+cv^2=0$

$u^2-2uv+v^2=0$

$v=1\ldots\ u^2-2u+1=0$

$(u-1)^2=0$

$u=1$

$\vec{u}=[1,1]\ldots\vec{n}=[1,-1]$ > rôzne rovnobežky

$x-y+c=0$

$x-y+d=0$

$(x-y+c)(x-y+d)=0$

$x^2-xy+xc-xy+y^2-yc+xd-yd+cd=0$

$x^2-2xy+y^2+(c+d)x-(c+d)y+cd=0$

$c+d=2\ \wedge\ c+d=2\ \wedge\ cd=3$

$d=2-c$ $\quad (c+1)(c-3)=0$

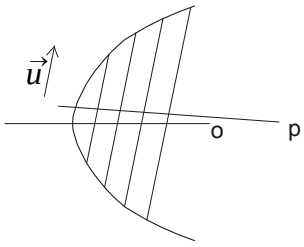
$c=-1\vee c=3$

$d=3\vee d=-1$

$p: x-y-1=0$

$q: x-y+3=0$

- <u>os kužeľosečky</u>



- majme vektor, ktorý nie je asymptotický $\vec{u}=[u,v]$, spravíme si priamky s ním rovnobežné (priemerové priamky)
- priamka p prechádzajúca ich stredmi je **priemer združený s vektorom** $\vec{u}$ (takýchto priemerov môže byť nekonečne veľa)

$K: ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$

$p: (au+bv)x+(bu+cv)y+(du+ev)=0$

$\vec{n}=[au+bv; bu+cv]$

<u>Def.</u>
Os kužeľosečky je jej os súmernosti.

<u>Def.</u>
Priesečník kužeľosečky s osou je vrchol kužeľosečky.

<u>Veta</u>
Os kužeľosečky je priemer kolmý na vektor s ním združený.

$\vec{n}_o=k.\vec{u}; k\neq 0$

$au+bv=ku$

$bu+cv=kv$

$(a-k)u+bv=0$

$bu+(c-k)v=0$

$\longrightarrow\quad \exists u,v\neq 0\ldots \begin{vmatrix} a-k & b \\ b & c-k \end{vmatrix}=0$

Pr.

Nájdite os kužeľosečky $K: 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x = 0$

$$o: (au + bv)x + (bu + cv)y + (du + ev) = 0$$
$$o: (2u + 2v)x + (2u + 5v)y + (-3u + 0v) = 0$$
$$\vec{u} = [u, v] \neq \vec{o}$$
$$au + bv = ku$$
$$\underline{bu + cv = kv}$$
$$2u + 2v = ku$$
$$\underline{2u + 5v = kv}$$
$$(2 - k)u + 2v = 0$$
$$\underline{2u + (5 - k)v = 0}$$
$$\begin{vmatrix} a - k & b \\ b & c - k \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2 - k & 2 \\ 2 & 5 - k \end{vmatrix} = (2 - k)(5 - k) - 4 = k^2 - 7k + 6 = 0$$
$$k^2 - 7k + 6 = 0$$
$$(k - 6)(k - 1) = 0$$
$$k = 6 \vee k = 1$$ > budú existovať dve osi

1. $k = 6$

$$(2 - 6)u + 2v = 0 \ \wedge \ 2u + (5 - 6)v = 0$$
$$-4u + 2v = 0 \ \wedge \ 2u - v = 0$$
$$v = 2u$$

> zvolíme si $u = 1$, potom $v = 2$ a $\vec{u}_1 = [1, 2]$

$$o_1: (2u + 2v)x + (2u + 5v)y + (-3u + 0v) = 0$$
$$o_1: 6x + 12y - 3 = 0$$

2. $k = 1$

$$(2 - 1)u + 2v = 0 \ \wedge \ 2u + (5 - 1)v = 0$$
$$u + 2v = 0 \ \wedge \ 2u + 4v = 0$$
$$-2v = u$$

> zvolíme si $v = -1$, potom $u = 2$ a $\vec{u}_2 = [2, -1]$

$$o_2: (2u + 2v)x + (2u + 5v)y + (-3u + 0v) = 0$$
$$o_2: 2x - y - 6 = 0$$

Pr.

Nakreslite kužeľosečku $K: 4x^2 - 4xy + y^2 - 28x + 4y + 44 = 0$

1. zistíme akého je typu

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -14 \\ -2 & 1 & 2 \\ -14 & 2 & 44 \end{vmatrix} = (176 + 56 + 56) - (196 + 16 + 176) = -100 \neq 0$$

> regulárna

2. hľadáme asymptotické smery

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$$

$$4u^2 - 4uv + v^2 = 0$$

$$v = 1 \ldots 4u^2 - 4u + 1 = 0$$

$$(2u-1)^2 = 0$$

$$u = \tfrac{1}{2} \qquad \vec{u} = \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]$$

> parabola

3. os

$$o: (au + bv)x + (bu + cv)y + (du + ev) = 0$$

$$o: (4u - 2v)x + (-2u + v)y + (-14u + 2v) = 0$$

$$\vec{u} = [u, v] \neq \vec{o}$$

$$4u - 2v = ku$$

$$-2u + v = kv$$

$$(4-k)u - 2v = 0$$

$$-2u + (1-k)v = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-k & -2 \\ -2 & 1-k \end{vmatrix} = (4-k)(1-k) - 4 = k^2 - 5k = k.(k-5) = 0$$

$$k = 5$$

$$-u - 2v = 0$$

$$-2u - 4v = 0$$

$$u = -2v$$

$$v = 1, u = -2 \qquad \vec{u} = [-2, 1]$$

$$o: -10x + 6y + 30 = 0$$

$$o: 2x - y - 6$$

4. vrchol

$$V = o \cap P$$

$$o: 2x - y - 6$$

$$P: 4x^2 - 4xy + y^2 - 28x + 4y + 44 = 0$$

$$4x^2 - 4x(2x-6) + (2x-6)^2 - 28x + 4(2x-6) + 44 = 0$$

$$4x^2 - 8x^2 + 24x + 4x^2 - 24x + 36 - 28x + 8x - 24 + 44 = 0$$

$$-20x + 56 = 0$$

$$x = \tfrac{14}{5} \qquad V\left[\tfrac{14}{5}, -\tfrac{2}{5}\right]$$

5. vrcholová dotyčnica

$$t: x + 2y + c = 0 \qquad V \in t$$

$$t: x + 2y - 2 = 0$$

6. priesečníky s osou x

$y = 0$

$t \ldots x = 2 \ldots P_t[2,0]$

$o \ldots x = 3 \ldots P_o[3,0]$

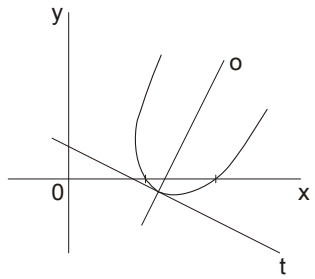
$P \ldots 4x^2 - 28x + 44 = 0$

$x^2 - 7x + 11 = 0$

$D = 5$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x_1 \doteq 4{,}6; x_2 \doteq 2{,}4$



<u>Pr.</u>

Nakreslite kužeľosečku $K: 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (45+0+0) = -45 \neq 0$$

> regulárna

$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$

$2u^2 + 4uv + 5v^2 = 0$

$v = 1 \ldots 2u^2 + 4u + 5 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 16 - 40 = -24$

> nemá asymptotický smer

$A[3,0] \in K$ > elipsa

$2m + 2n - 3 = 0$

$-2m - 5n = 0$

$-3n - 3 = 0$

$n = 1, m = \frac{5}{2} \qquad S[\frac{5}{2}, 1]$

$o: (au + bv)x + (bu + cv)y + (du + ev) = 0$

$o: (2u + 2v)x + (2u + 5v)y + (-3u + 0v) = 0$

$\vec{u} = [u, v] \neq \vec{o}$

- osi sme už počítali v príklade uvedenom skôr a tak si môžeme riešenie urýchliť

$o_1: 2x + 4y - 1 = 0$

$o_2: 2x - y - 6 = 0$

$K: 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x = 0$

$o_2: 2x - y - 6 = 0$

$2x^2 + 4x(2x-6) + 5(2x-6)^2 - 6x = 0$

$2x^2 + 8x^2 - 24x + 20x^2 - 120x + 180 - 6x = 0$

$30x^2 - 150x + 180 = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$x = 2 \vee x = 3$

$y = -2 \quad y = 0$

$B[2,-2]; A[3,0]$

$K: 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x = 0$

$o_1: 2x + 4y - 1 = 0$

$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x = 0$

$4x^2 + 8xy + 10y^2 - 12x = 0$

$(1-4y)^2 + 4(1-4y)y + 10y^2 - 6(1-4y) = 0$

$1 - 8y + 16y^2 + 4y - 16y^2 + 10y^2 - 6 + 24y = 0$

$10y^2 + 20y^2 - 5 = 0$

$2y^2 + 4y - 1 = 0$

$D = 24$

$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\qquad y_1 \doteq 0{,}25; y_2 \doteq -2{,}25$

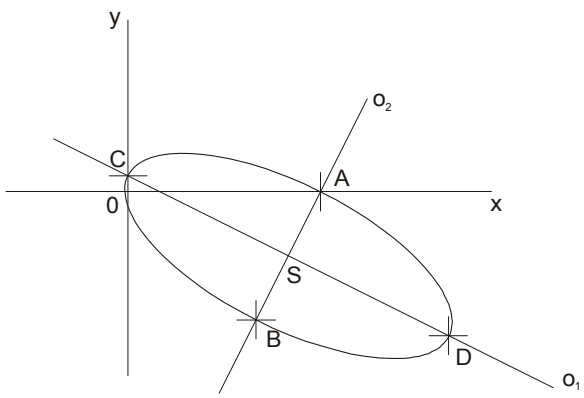
$C[0;0{,}25]; D[5;-2{,}25]$

$|AB| = \sqrt{(3-2)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{5} = 2b \qquad b = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$|CD| = \sqrt{(5-0)^2 + (-2{,}25-0{,}252)^2} = \sqrt{25+6{,}25} = \sqrt{31{,}25} = 2a$

$a = \frac{\sqrt{31{,}25}}{2}$

$e^2 = a^2 - b^2 = \frac{31{,}25}{4} - \frac{5}{4} = \frac{26{,}25}{4} = 6{,}5625 \qquad e = \sqrt{6{,}5625} = 2{,}56$



Neriešené úlohy

1. Určite $p, q \in R$ **tak, aby kužeľosečka** $x^2 + 2pxy + y^2 + 2x + 2qy - 3 = 0$ **bola dvojicou rovnobežiek.**

2. Akú kužeľosečku určuje rovnica:

a) $x^2 + 2xy - 3x - y + 1 = 0$ b) $x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$

3. Určite druh, stred a asymptotické smery kužeľosečky:

a) $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ b) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

4. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá má polomer $r = 3cm$ **a dotýka sa súradnicových osí.**

5. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A[3,5], B[2,6]$ **a má stred na priamke** $p: 2x + 3y - 4 = 0$**.**

6. Napíšte rovnicu kružnice. ktorá prechádza bodom $A[9,2]$ **a dotýka sa oboch súradnicových osí.**

7. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá má stred $S[-4,0]$ **a dotýka sa priamky** $x - y = 0$**.**

8. Vypočítajte plošný obsah štvoruholníka, ktorého vrcholmi sú ohniská a vedľajšie vrcholy elipsy $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$**.**

9. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá má stred v ohnisku elipsy $5x^2 + 9y^2 - 30x - 18y + 9 = 0$ **a prechádza vedľajším vrcholom.**

10. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorej ohniská sú hlavnými vrcholmi a vrcholy ohniskami elipsy $16x^2 + 25y^2 = 400$**.**

11. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorá má stred v začiatku súradnicovej sústavy, osi rovnobežné so súradnicovými osami, prechádza bodom $A[15,6]$ **a má asymptotu** $2x + 3y = 0$**.**

12. Napíšte rovnicu paraboly, ktorá má ohnisko v jednom vrchole hyperboly $16x^2 + 25y^2 = 400$ **a vrchol v druhom vrchole hyperboly.**

13. Tri vrcholy štvorca ABCD ležia na parabole $y^2 = 8x$ **tak, že** A **je vrchol paraboly,** $C \in x$**. Určite súradnice vrcholov štvorca.**

27. KOMBINATORIKA

1. Základné kombinatorické pojmy
- úloha kombinatoriky
- pravidlo súčtu a súčinu

2. Permutácie bez opakovania

3. Variácie bez opakovania

4. Variácie s opakovaním

5. Kombinácie bez opakovania

6. Kombinačne čísla
- ich vlastnosti

7. Binomická veta
- Pascalov trojuholník

8. Permutácie s opakovaním

9. Kombinácie s opakovaním

10. Princíp inklúzie a exklúzie

……

- časť matematiky, ktorá sa zaoberá vytváraním skupín z prvkov istej množiny (spravidla konečnej)
- pritom sa rozlišuje, či v skupinách záleží na poradí, či sa prvky môžu opakovať, …

> kombinatoriku zaujíma ako také skupiny tvoriť, koľko ich je, …

- pochádza z Indie (6. stor. p.n.l.) a samostatnou matematickou disciplínou sa stala v 17. storočí

Pr.

Koľko rôznych dvojíc týždenníkov možno zostaviť z piatich žiakov:

$$M = \{J, F, K, A, B\} \qquad \{J, F\}$$

$$\left.\begin{array}{l} JF, JK, JA, JB \\ FK, FA, FB \\ KA, KB \\ AB \end{array}\right\} 10 \text{ > kombinácie}$$

Pr.

Koľko dvojčlenných hliadok, v ktorých bude veliteľ a člen hliadky, možno vytvoriť zo šiestich žiakov:

$$M = \{J, F, K, A, B, D\} \qquad [veliteľ, člen]$$

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{\left\{\begin{array}{l} JF, JK, JA, JB, JD \\ FJ, FK, FA, FB, FD \\ KJ, KF, KA, KB, KD \\ AJ, AF, AK, AB, AD \\ BJ, BF, BK, BA, BD \\ DJ, DF, DK, DA, DB \end{array}\right.}^{5} \\ 6 \end{array}\right\} 6.5 = 30 \quad \text{> variácie}$$

Pr.

Anča dostala štyri knihy. V koľkých možných poradiach si ich mohla prečítať:

$$M = \{H, D, K, B\} \qquad [1., 2., 3., 4.]$$

$$\left.\begin{array}{l} HDKB, HDBK, HKDB, HKBD, HBDK, HBKD \\ DHKB, DHBK, DKHB, DKBH, DBHK, DBKH \\ KHDB, KHBD, KDHB, KDBH, KBHD, KBDH \\ BHDK, BHKD, BDHK, BDKH, BKHD, BKDH \end{array}\right\} 6.4 = 4.3.2 = 24$$

> permutácie

Pr.

Koľkými spôsobmi si môžu sadnúť dvaja chlapci do päťmiestnej lavice:

1	2	3	4	5

$$[1, 2]$$

$$J, F \qquad M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{\begin{array}{l} 12, 13, 14, 15 \\ 21, 23, 24, 25 \\ 31, 32, 34, 35 \\ 41, 42, 43, 45 \\ 51, 52, 53, 54 \end{array}}^{4} \end{array}\right\} 5.4 = 20$$

Pr.

Hádžeme mincou a kockou. Koľko je všetkých možných výsledkov:

minca: H - hlava
Z - znak

kocka: 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$\left.\begin{array}{l} 2\overbrace{\begin{array}{l} H1, H2, H3, H4, H5, H6 \\ Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6 \end{array}}^{6} \end{array}\right\} 6.2 = 12$$

<u>Def.</u> (Pravidlo súčinu)

Ak výsledky pokusu sú usporiadané dvojice $[A, B]$, objekt A možno vybrať M spôsobmi a objekt B možno vybrať N spôsobmi, tak počet všetkých usp. dvojíc $[A, B]$ je $p = M.N$

Pr.

Máme tri kocky rôznej veľkosti. Koľkými spôsobmi ich možno zafarbiť červenou alebo žltou farbou:

m - malá kocka, s - stredná kocka, v - veľká kocka

$$M = \{č, ž\} \qquad [m, s, v]$$

$$2.2.2 = 2^3 = 8$$

Pr.

Koľko dvojčlenných hliadok možno zostaviť zo šiestich dôstojníkov a pätnástich vojakov, ak dôstojník je veliteľ a vojak je člen hliadky:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$V = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$$

$$[D, V]$$

$$6.15 = 90$$

- <u>permutácie bez opakovania</u>

<u>Pr.</u>

Koľkými spôsobmi možno posadiť troch žiakov do trojmiestnej lavice:

1	2	3
F	J	P

$\overset{J\,F\,P}{[2,1,3]}$

$M = \{1,2,3\}$ $[\ ,\ ,\ ]$

$3.2.1 = 6$

<u>Def.</u>

Permutáciou n-prvkovej množiny M je každá usporiadaná n-tica navzájom rôznych prvkov množiny M.

- počet všetkých permutácií n-prvkovej množiny označujeme $P(n)$

<u>Veta</u>

$\forall n \in N : P(n) = n.(n-1).(n-2).\cdots.2.1 = n!$

Dôkaz

$[\ ,\ ,\ ,\cdots,\ ,\ ]$

$n.(n-1).(n-2).\cdots.2.1$

> na 1. miesto môžem vybrať z n prvkov
> na 2. miesto môžem vybrať z $n-1$ prvkov
> na 3. miesto môžem vybrať z $n-2$ prvkov
$\vdots$
> na $n-1$-vé miesto môžem vybrať z 2 prvkov
> a na n-té miesto môžem dať len posledný prvok

<u>Pr.</u>

Koľko päťciferných čísel, s rôznymi číslicami, možno vytvoriť z číslic:

a) $1,2,3,4,5$

$M = \{1,2,3,4,5\}$

$35214\ldots[3,5,2,1,4]$

$N = P(5) = 5! = 120$

b) $0,1,2,3,4$

$M = \{0,1,2,3,4\}$

$23014\ldots[2,3,0,1,4]$

$[0,3,2,1,4]$ > nie je päťciferné

$N = P(5) - P(4) = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$

> alebo $N = P(5).\frac{4}{5} = 96$

<u>Pr.</u>

Koľkými spôsobmi možno na poličku uložiť deväť kníh, z ktorých sú tri detektívky, ak detektívky majú byť:

a) ľubovoľne

1	2	3	4	5	6	7	8	9

$M = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, D_1, D_2, D_3\}$

$N = P(9) = 9! = 362880$

b) na konci

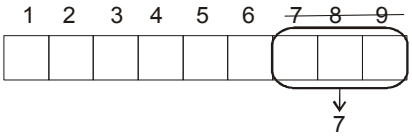
$[\underbrace{\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,}_{P(6)}\ \underbrace{\ ,\ ,\ }_{P(3)}]$ $[Knihy, Detektívky]$

$N = P(6).P(3) = 6!.3! = 4320$

c) na začiatku alebo na konci

$$N = N_Z + N_K = 2.4320 = 8640$$

d) vedľa seba



- detektívky budeme brať ako jeden celok a teda máme ako keby 7 kníh $P(7)$, lenže detektívky môžeme premiestňovať v celku medzi sebou a to je $P(3)$

> potom dostávame $N = P(7).P(3) = 7!.3! = 30240$

Pr.

Zjednodušte:

a) $\frac{9!}{7!}$ $\quad \frac{9!}{7!} = \frac{9.8.7!}{7!} = 72$ $\quad$ b) $\frac{10!}{12!}$ $\quad \frac{10!}{12!} = \frac{10!}{12.11.10!} = \frac{1}{132}$ $\quad$ c) $\frac{7!+5!}{5!}$ $\quad \frac{7!+5!}{5!} = \frac{7.6.5!+5!}{5!} = \frac{(7.6+1)5!}{5!} = 43$

d) $\frac{n!}{(n-1)!}$ $\quad \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$ $\quad$ e) $\frac{n!}{(n-2)!}$ $\quad \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$ $\quad$ f) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ $\quad \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}$

g) $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!}$ $\quad \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n!}{n!} - \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n+1-n = 1$

h) $n^2.(n+1)! - (n+1)^2.n!$ $\quad n^2.(n+1)! - (n+1)^2.n! = n^2.(n+1)! - (n+1)(n+1).n =$

$= n^2.(n+1)! - (n+1)(n+1)! = (n+1)!.(n^2 - n - 1)$

i) $\frac{(n+2)!}{n!} - 2.\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$ $\quad \frac{(n+2)!}{n!} - 2.\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} - 2.\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} =$

$(n+2)(n+1) - 2(n+1)n + n(n-1) = 2$

Pr.

Ktoré z čísel je väčšie:

$a = 500! + 503!$ $\qquad b = 501! + 502!$

$a = 500!.(1 + 503.502.501)$ $\qquad b = 500!.(501 + 502.501)$

$a > b$

Pr.

Riešte v N:

a) $4.(n+1)! = (n+2)!$

$4.(n+1)! = (n+2)!$

$4 = \frac{(n+2)!}{(n+1)!}$

$4 = \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$

$4 = n+2$

$n = 2$

b) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$ $\quad$ ... $n > 2$

$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$

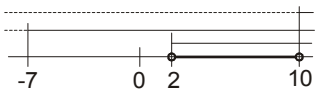
$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} < 72$

$(n-1)(n-2) < 72$

$n^2 - 3n - 70 < 0$

$(n-10)(n+7)$

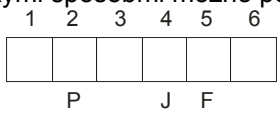
$n = 10 \vee n = -7$



- <u>variácie bez opakovania</u>

Pr.

Koľkými spôsobmi možno posadiť troch žiakov do šesťmiestnej lavice:



$\overset{J\,F\,P}{[4, 2, 5]}$

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad [\ ,\ ,\ ]$

$6.5.4 = 120$

Def.

Variáciou k -tej triedy z n -prvkovej množiny M bez opakovania, kde $k \le n$, nazývame každú usporiadanú k -ticu, utvorenú z rôznych prvkov množiny M .

- počet všetkých variácií k -tej triedy z n -prvkovej množiny bez opakovania označujeme $V(k,n)$

Veta

$$\forall\ k,n \in N, k \le n : V(k,n) = n.(n-1).(n-2).\cdots.(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dôkaz

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \qquad k \\ [\ \ ,\ \ ,\ \ ,\cdots,\ \ ] \\ n.(n-1).(n-2).\cdots.n-k+1 \end{array}$$

> na 1. miesto môžem vybrať z n prvkov
> na 2. miesto môžem vybrať z $n-1$ prvkov
> na 3. miesto môžem vybrať z $n-2$ prvkov
$\vdots$
> a na k -té miesto môžem vybrať z $n-k+1$ prvkov

$$V(k,n) = n.(n-1).(n-2).\cdots.(n-k+1) = \frac{n.(n-1).(n-2).\cdots.(n-k+1).(n-k).(n-k-1).2.1}{(n-k).(n-k-1).2.1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pr.

Koľkými spôsobmi možno v triede s 27 žiakmi zvoliť predsedu, podpredsedu a pokladníka:

$$M = \{\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3, \ldots, \check{z}_{27}\}$$

$$[\check{z}_{15}, \check{z}_{21}, \check{z}_6]$$

> dané tri funkcie sa od seba líšia; to znamená, že záleží na poradí

$$N = V(3,27) = 27.26.25 = 17550$$

Pr.

Koľkými spôsobmi možno do sedemmiestnej lavice posadiť päť žiakov, ak Jano má sedieť na kraji:

1	2	3	4	5	6	7
						J
J						

- nie je povedané, na ktorom konci má Jano sedieť a teda musíme uvažovať dve možnosti
- Jana usadíme na kraj a zostane nám šesť miest pre štyroch žiakov

$$N = 2.V(4,6) = 6.5.4.3.2 = 720$$

Pr.

Koľko štvorciferných čísel, s rôznymi číslicami, možno vytvoriť z číslic $0,1,2,3,4,5,6,7$:

$1078\ldots[1,0,7,8]$ > je štvorciferné

$0578\ldots[0,5,7,8]$ > nie je štvorciferné

- otázne je, ako vypočítame počet tých čísiel, máme tri možnosti:

1. $N = V(4,8) - V(3,7) = 1470$
   > od počtu všetkých možných čísiel odčítame počet tých, kde je nula na začiatku
2. $N = V(4,8).\frac{7}{8} = 1470$ > osmina čísel začína nulou
3. $\cancel{0\ldots V(3,7)}$
   $1\ldots V(3,7)$
   $\vdots \qquad \vdots$
   $7\ldots V(3,7)$

   > určíme si prvú číslicu a vyberáme ostatné

   $N = 7.V(3,7) = 1470$

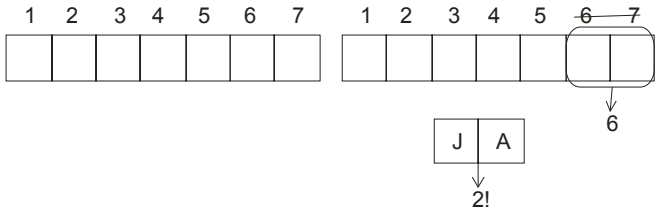
Pr.

Koľko párnych štvorciferných čísel, s rôznymi číslicami, možno vytvoriť z číslic $0,1,2,3,4,5,6,7$:

$$\ldots 0 \qquad V(3,7)=210$$
$$\ldots 2 \quad \cancel{0\ldots 2} \qquad V(3,7)-V(2,6)=180$$
$$\ldots 4 \quad \cancel{0\ldots 4} \qquad V(3,7)-V(2,6)=180$$
$$\ldots 6 \quad \cancel{0\ldots 6} \qquad V(3,7)-V(2,6)=180 \qquad N=210+3.180=750$$

Pr.

Koľkými spôsobmi možno do sedemmiestnej lavice posadiť päť žiakov, ak Jano a Anča chcú sedieť vedľa seba:



- Jano a Anča sa môžu medzi sebou premiestniť a budeme ich brať ako skupinku, ktorú môžeme posadiť na šesť miest a potom usadíme zvyšných troch žiakov na päť miest:

$$N=V(3,5).12=5.4.3.12=720$$

Pr.

Koľko prvkov má množina ak platí: $V(3,n)=5.V(2,n)$

$$n.(n-1).(n-2)=n.(n-1).5$$
$$n-2=5 \qquad n=7$$

- <u>variácie s opakovaním</u>

Pr.

Hádžeme červenou, modrou a zelenou kockou. Koľko je všetkých možných výsledkov:

$$\overset{Č\ M\ Z}{[2,5,6]} \qquad M=\{1,2,3,4,5,6\}$$

> je zrejmé, že na každom mieste je šesť možností a teda máme 6^3

<u>Def.</u>

Variáciou k-tej triedy z n-prvkovej množiny M s opakovaním nazývame každú usporiadanú k-ticu, utvorenú z prvkov množiny M.

- počet všetkých variácií k-tej triedy z n-prvkovej množiny s opakovaním označujeme $V'(k,n)$

<u>Veta</u>

$$\forall\ k,n\in N: V'(k,n)=n^k$$

Dôkaz

$$\overset{1\quad 2\qquad k}{[\ ,\ ,\cdots,\ ]}$$
$$n\ .\ n\ .\cdots.\ n$$

> na 1. miesto môžem vybrať z n prvkov
> na 2. miesto môžem vybrať z n prvkov
$\vdots$
> a na k-té miesto môžem vybrať z n prvkov

$$V'(k,n)=n^k$$

Pr.

V meste žije 1000 obyvateľov. Dokážte, že aspoň dvaja majú rovnaké iniciálky:
(uvažujme 26 písmen v abecede)

$$[meno, priezvisko]$$

$$N = V'(2,26) = 26^2 = 676 \qquad 1000 - 676 = 324$$

> iba 676 ľudí má rôzne iniciály a ostatní majú s niekým rovnaké

Pr.

Piati cestujúci nastupujú do troch vagónov. Koľkými spôsobmi môžu nastúpiť:

- je zrejmé, že budeme vyberať pätice vagónov

> tie máme len tri, takže sa musia opakovať:

$$N = V'(5,3) = 3^5 = 243$$

> vidno, že pri opakovaní môže byť $k > n$

Pr.

Koľkými spôsobmi možno trom opravárom prideliť na opravu štyri výrobky:

$$N = V'(4,3) = 3^4 = 81$$

Pr.

Šesť ľudí hľadá zamestnanie v štyroch firmách. Koľkými spôsobmi sa môžu zamestnať:

$$N = V'(6,4) = 4^6 = 4096$$

Pr.

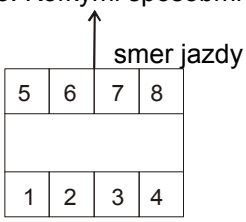
Traja chlapci a dve dievčatá si hľadajú zamestnanie v siedmych firmách. V troch berú len chlapcov, v dvoch len dievčatá a v dvoch chlapcov aj dievčatá. Koľkými spôsobmi sa môžu zamestnať:

- je zrejmé, že chlapci sa môžu zamestnať v piatich firmách … $V'(3,5)$
- a dievčatá v štyroch firmách … $V'(2,4)$

> teda dostávame $N = V'(3,5).V'(2,4) = 5^3.4^2 = 2000$

Pr.

V kupé je osem cestujúcich. Traja chcú sedieť v smere jazdy, dvaja v protismere jazdy a trom je to jedno. Koľkými spôsobmi sa môžu posadiť:



- traja v smere jazdy … $V(3,4)$
- dvaja v protismere jazdy … $V(2,4)$
- trom je to jedno … $P(3)$

> $N = V(3,4).V(2,4).P(3) = 24.12.6 = 1728$

Pr.

Koľko je štvorciferných čísiel, s rôznymi číslicami a deliteľných piatimi, zostavených z číslic:

a) $M = \{1,2,3,4,5,6\}$

. . . 5

$$N = V(3,5)$$

b) $M = \{0,1,2,3,4,5\}$

. . . 0

. . . 5 ~~0 . . . 5~~

$$N = 2.V(3,5) - V(2,4) = 120 - 12 = 108$$

- teraz si ukážeme pár príkladov, ktoré sa iba okrajovo dotýkajú kombinatoriky (môžeme v nich využiť poznatky z kombinatoriky):

Pr.

Riešte v N:

a) $n.(n-2)!>(n-1)!$

$n.(n-2)!>(n-1)!$ … vidíme, že platí $n>2$

$n.(n-2)!>(n-1)! \,\Big|\, .\frac{1}{(n-1)!}$

$\frac{n.(n-2)!}{(n-1)!}>1$

$\frac{n.(n-2)!}{(n-1).(n-2)!}>1$

$\frac{n}{n-1}-1>0$

$\frac{1}{n-1}>0$

$n>1 \qquad P=(2,\infty)\cap N=\{3,4,5,6,\dots\}$

b) $V(2,x+1)<2.V(3,x)$

$V(2,x+1)<2.V(3,x)$

$(x+1)x<2x(x-1)(x-2) \qquad x>3$

$x+1<2(x-1)(x-2)$

$0<2x^2-7x+3$

$x_1=\frac{1}{2}, x_3=3 \qquad P=(3,\infty)\cap N=\{4,5,6,\dots\}$

Pr.

Dokážte, že platí:

a) $\forall n\in N: 1.1!+2.2!+3.3!+\dots+n.n!=(n+1)!-1$

1. $n=1\dots 1.1!=(1+1)!-1$

$1=1$ … platí

2. $\forall k\in N: 1.1!+2.2!+3.3!+\dots+k.k!=(k+1)!-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1.1!+2.2!+3.3!+\dots+k.k!+(k+1).(k+1)!=(k+2)!-1$

$1.1!+2.2!+3.3!+\dots+k.k!+(k+1).(k+1)!=$

$(k+1)!-1+(k+1).(k+1)!=(k+1+1).(k+1)!-1=$

$=(k+2).(k+1)!-1=(k+2)!-1$

$\forall n\in N: 1.1!+2.2!+3.3!+\dots+n.n!=(n+1)!-1$ platí

b) $\forall n\in N: \frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$

1. $n=1\dots \frac{0}{1!}=1-\frac{1}{1!}$

$0=0$ … platí

2. $\forall k\in N: \frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{k-1}{k!}=1-\frac{1}{k!} \Rightarrow \frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{k-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}$

$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{k-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1+\frac{k-k-1}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}$

$$\forall n \in N : \tfrac{0}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{2}{3!} + \cdots + \tfrac{n-1}{n!} = 1 - \tfrac{1}{n!}$$ platí

Pr.

Koľkými nulami končí číslo 16!

$$16!16.15.14.\cdots.2.1 = 5^3.2^{15}.x = 10^3.\left(2^{12}.x\right)$$ > končí sa tromi nulami

Pr.

Koľkými spôsobmi možno usporiadať podmnožinu prirodzených čísiel $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ tak, aby párne čísla boli v poradí na párnych miestach:

- párnych čísiel máme n a taktiež aj nepárnych

> párne čísla si vymieňajú miesta medzi sebou $P(n)$ a tak isto aj nepárne

> teda $N = P(n).P(n) = n!.n! = (n!)^2$

Pr.

Koľkými spôsobmi možno usporiadať podmnožinu prirodzených čísiel $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tak, aby čísla $1, 2, 3$ nasledovali, v tomto poradí, za sebou:

- použijeme metódu, ktorá nám pomohla viac krát, teda tri čísla si predstavíme ako jednu skupinu a nebudeme mať n prvkov, ale $n-2$

> teda $= P(n-2) = (n-2)!$

- <u>kombinácie bez opakovania</u>

Pr.

Koľkými spôsobmi možno z desiatich žiakov vybrať trojčlenné družstvo:

$$M = \{\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3, \ldots, \check{z}_{10}\}$$

- tu nezáleží na poradí ako vyberáme, uvážme:

$$\{\check{z}_1, \check{z}_5, \check{z}_9\} = \{\check{z}_1, \check{z}_9, \check{z}_5\} = \{\check{z}_5, \check{z}_1, \check{z}_9\} = \{\check{z}_5, \check{z}_9, \check{z}_1\} = \{\check{z}_9, \check{z}_5, \check{z}_1\} = \{\check{z}_9, \check{z}_1, \check{z}_5\}$$

> mám šesť rovnakých družstiev

<u>Def.</u>

Kombináciou k-tej triedy z n-prvkovej množiny M bez opakovania, kde $k \le n$, nazývame každú k-prvkovú podmnožinu, utvorenú z rôznych prvkov množiny M.

- počet všetkých kombinácií k-tej triedy z n-prvkovej množiny bez opakovania označujeme $C(k, n)$

<u>Veta</u>

Pre každé dve prirodzené čísla $k \le n$ platí $V(k, n) = C(k, n).P(k)$

> napr.: variácie 3. triedy z $M = \{a, b, c, d\}$

$$\overbrace{\{a,b,c\} \quad \{a,b,d\} \quad \{a,c,d\} \quad \{b,c,d\}}^{C(3,4)}$$

$$P(3)\left\{\begin{matrix} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ cba \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} abd \\ adb \\ bad \\ bda \\ dab \\ dba \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} adc \\ acd \\ dac \\ dca \\ cad \\ cda \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} dbc \\ dcb \\ bdc \\ bcd \\ cdb \\ cbd \end{matrix}\right.$$

$$V(3,4) = C(3,4).P(3)$$

Veta

$\forall\ k,n \in N, k \le n : C(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$

Dôkaz

$$C(k,n) = \frac{V(k,n)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

Pr.

Koľko kódov možno nastaviť v označovacom strojčeku autobusu, ak z deviatich číslic možno predierkovať tri alebo štyri:

- možnosti pre tri a štyri sú od seba nezávislé a teda:

$$N = C(3,9) + C(4,9) = \frac{9!}{6!.3!} + \frac{9!}{5!.4!} = 210$$

Pr.

Koľko rôznych výsledkov existuje pri ťahu športky:

17 3 19 2 34 49 | 9

$\{2,3,17,19,34,49\}\{9\}$ $\qquad N = C(6,49).43 = \frac{49!}{43!.6!}.43 = 601304088$

Pr.

Zišlo sa päť priateľov, pri odchode si podal každý s každým ruku. Koľko bolo podaní rúk:

$$N = C(2,5) = 10$$

Pr.

V rovine je daných desať bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke. Koľko priamok je nimi určených:

$$N = C(2,10) = 45$$

- kombinačné čísla

Def.

Pre každé dve nezáporné celé čísla $k \le n$ kombinačným číslom „n nad k“ nazývame číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

Veta

$\forall\ k \le n; k,n \in N :$

1. $\binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{1} = n$
3. $\binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n}{n} = 1$
5. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
6. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dôkaz

1. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!.0!} = 1$

2. $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!.1!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n$

3. $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-n+1)!.(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n$

4. $\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!.n!} = 1$

5. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!.(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

6. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} + \frac{n!}{[n-(k+1)]!.(k+1)!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} +$

$$+ \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)!} = \frac{n!.(k+1)+n!.(n-k)}{(n-k)!.(k+1!)} = \frac{n!.(k+1+n-k)}{(n-k)!.(k+1!)} =$$

$$= \frac{n!.(n+1)}{(n-k)!.(k+1!)} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!.(k+1!)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k-1)!.(k+1!)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{[n+1-(k+1)]!.(k+1!)} = \binom{n+}{k+1}$$

Pr.

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!.2!} = 10 = \frac{5!}{2!.3!} = \binom{5}{3}$ $\binom{2}{2} = \frac{2!}{0!.2!} = 1$

Pr.

Vypočítajte:

a) $\binom{16}{4} + \binom{16}{5} = \binom{17}{5}$ b) $\binom{23}{6} + \binom{23}{7} = \binom{24}{7}$ c) $\binom{13}{2} + \binom{13}{10} = \binom{13}{2} + \binom{13}{2} = \binom{14}{3}$

d) $\binom{10}{10} + \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10} + \binom{14}{10} + \binom{15}{10} = \binom{11}{11} + \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10} + \binom{14}{10} + \binom{15}{10} =$

$$= \binom{12}{11} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10} + \binom{14}{10} + \binom{15}{10} = \binom{13}{11} + \binom{13}{10} + \binom{14}{10} + \binom{15}{10} =$$

$$= \binom{14}{11} + \binom{14}{10} + \binom{15}{10} = \binom{15}{11} + \binom{15}{10} = \binom{16}{11}$$

e) $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} = \binom{n+1}{n+1} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} =$

$$= \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} = \binom{n+3}{n+1} + \binom{n+3}{n} = \binom{n+4}{n+1}$$

Pr.

Riešte v Z_0^+:

a) $\binom{9}{4} = \binom{9}{x}$

$$\frac{9!}{(9-4)!.4!} = \frac{9!}{(9-x)!.x!}$$
$$5!.4! = (9-x)!.x!$$
$$x! = 5! \vee x! = 4!$$
$$x = 5 \vee x = 4$$
$$P = \{4,5\}$$

b) $\binom{7}{x} + \binom{7}{x+1} = \binom{8}{3}$

$$\binom{8}{x+1} = \binom{8}{3}$$
$$(x+1)! = 3! \vee (x+1)! = 5!$$
$$x+1 = 3 \vee x+1 = 5$$
$$P = \{2,4\}$$

c) $\binom{9}{4}.x = \binom{10}{5}$ $\qquad x = \dfrac{\binom{10}{5}}{\binom{9}{4}} = \dfrac{252}{126} = 2$

d) $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = 4$

$$\frac{x!}{(x-2)!.2!} + \frac{(x-1)!}{(x-3)!.2!} = 4$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!.2!} + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)!}{(x-3)!.2!} = 4$$
$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} = 4$$
$$\frac{x(x-1)+(x-1)(x-2)}{2} = 4$$
$$\frac{2x^2-4x+2}{2} = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 = 4$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x+1)(x-3) = 0$$
$$P = \{-1,3\} \cap Z_0^+ = \{3\}$$

- binomická veta

- je to veta o umocňovaní dvojčlenov (PT = Pascalov trojuholník)

n	umocnený dvojčlen	PT	$\sum$	PT	2^n
$n=0$	$(a+b)^0 = 1$	1	1	$\binom{0}{0}$	2^0
$n=1$	$(a+b)^1 = a+b$	1 1	2	$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$	2^1
$n=2$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1	4	$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	2^2
$n=3$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1	8	$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$	2^3
$n=4$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1	16	$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$	2^4
$n=5$	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1	32	$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$	2^5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

<u>Veta</u> (binomická)

$\forall a,b \in R\ \forall n \in N:$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Dôkaz

1. $n=1\ldots(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a+b$ platí

2. $\forall k \in N: (a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \Rightarrow (a+b)^{k+1} =$

$$= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \cdots + \binom{k}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b) = \left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right).$$

$$.(a+b) = \left(\binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^kb + \cdots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k\right) +$$

$$+\left(\binom{k}{0}a^kb + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}\right)$$

- ďalej využijeme: $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0} \wedge \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1} \wedge \binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1}$

- teda: $\binom{k}{0}a^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1}; \binom{k}{k}b^{k+1} = \binom{k+1}{k+1}b^{k+1};$

$$\binom{k}{i}a^{k-i+1}b^i + \binom{k}{i-1}a^{k-i+1}b^i = \binom{k+1}{i}a^{k-i+1}b^i$$

- potom:

$$\binom{k}{0}a^{k+1} + \left(\binom{k}{0}a^kb + \binom{k}{1}a^kb\right) + \cdots + \left(\binom{k}{k}ab^k + \binom{k}{k-1}ab^k\right) +$$

$$+\binom{k}{k}b^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \cdots + \binom{k}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

- vzorec: $(a-b)^n$ si ľahko odvodíme: $(a-b)^n = (a+(-b))^n$ a môžeme použiť vzorec pre $(a+b)^n$ s rozdielom, že členy, v ktorých má b nepárny exponent budú záporné

- členy binomického rozvoja $(a+b)^n$ môžeme očíslovať: $a_0, a_1, \ldots a_n$, pričom platí:

$$a_k = \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k; k = 0,1,2,\ldots,n$$

- čiže, keď chceme zistiť i-ty člen rozvoja $(a+b)^n$, tak ho vypočítame takto:

$$a_{i-1} = \binom{n}{i-1}a^{n-i+1}.b^{i-1}; i = 1,2,\ldots,n,n+1$$

Pr.

Napíšte binomický rozvoj a upravte:

a) $(a+2)^5$

$$(a+2)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4.2 + \binom{5}{2}a^3.2^2 + \binom{5}{3}a^2.2^3 + \binom{5}{4}a.2^4 + \binom{5}{5}2^5 =$$

$$= a^5 + 10a^4 + 40a^3 + 80a^2 + 80a + 32$$

b) $(x-3)^6$

$$(x-3)^6 = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5.(-3) + \binom{6}{2}x^4.(-3)^2 + \binom{6}{3}x^3.(-3)^3 +$$

$$+\binom{6}{4}x^2.(-3)^4 + \binom{6}{5}x.(-3)^5 + \binom{6}{5}(-3)^6 =$$

$$= x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1458x + 729$$

c) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^4$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^4 = \binom{4}{0}\sqrt{2}^4 + \binom{4}{1}\sqrt{2}^3.\sqrt{3} + \binom{4}{2}\sqrt{2}^2.\sqrt{3}^2 + \binom{4}{3}\sqrt{2}.\sqrt{3}^3 +$$

$$+\binom{4}{4}\sqrt{3}^4 = 4 + 4.\sqrt{2}^3.\sqrt{3} + 6.2.3 + 4\sqrt{2}\sqrt{3}^3 + 9 = 4 + 8.\sqrt{2}.\sqrt{3} +$$

$$+36 + 12\sqrt{2}\sqrt{3} + 9 = 49 + 20.\sqrt{2}\sqrt{3}$$

Pr.

Určite m -tý člen binomického rozvoja:

a) $m = 3; \left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$

$$a_{i-1} = \binom{n}{i-1}a^{n-i+1}.b^{i-1}; i = 1, 2, \ldots, n, n+1$$

$$a_2 = \binom{8}{2}x^6.\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 = 28x^6.\frac{4}{x} = 112x^5$$

b) $m = 6; \left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$

$$a_5 = \binom{8}{5}x^3.\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5 = 56x^3.\frac{16}{x^2}.\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1792x}{\sqrt{x}} = -1792\sqrt{x}$$

c) $m = 9; \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$

$$a_8 = \binom{12}{8}x^{12}.\left(\frac{1}{x}\right)^8 = 495x^4$$

Pr.

Koľký člen rozvoja výrazu $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$ neobsahuje x:

$$a_k = \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k = \binom{12}{k}\left(x^3\right)^{12-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{12}{k}x^{36-3k}.x^{-k} = \binom{12}{k}x^{36-4k}$$

$36 - 4k = 0$

$k = 9$ … 10. člen

Pr.

Koľký člen rozvoja výrazu $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ obsahuje x^8:

$$a_k = \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k = \binom{10}{k}\left(3x^2\right)^{10-k}.\left(-\tfrac{1}{x}\right)^k = \binom{10}{k} 3^{10-k}.x^{20-3k}$$

$$20 - 3k = 8$$

$$3k = 12$$

$k = 4$ … 5. člen

Pr.

Dokážte, že číslo $11^{10} - 1$ je deliteľné 100:

- musí platiť $11^{10} - 1 = 100k$, teda počítajme:

$$11^{10} - 1 = (10+1)^{10} - 1 = \binom{10}{0}10^{10} + \binom{10}{1}10^9 + \binom{10}{2}10^8 + \binom{10}{3}10^7 + \cdots +$$

$$+\binom{10}{8}10^2 + \underbrace{\binom{10}{9}}_{10}10 + \underbrace{\binom{10}{10} - 1}_{0} = 100.k \;\Rightarrow\; 100 \,|\left(11^{10} - 1\right)$$

Pr.

Dokážte, že:

a) $7\left|\left(6^{2n} - 1\right)\right.$

$$6^{2n} - 1 = 7k$$

$$6^{2n} - 1 = (7-1)^{2n} - 1 = \binom{2n}{0}7^{2n} + \binom{2n}{1}7^{2n-1}.(-1) + \cdots +$$

$$+\binom{2n}{2n-1}7.(-1)^{2n-1} + \underbrace{\binom{2n}{2n}(-1)^{2n} - 1}_{0} = 7k$$

b) $35\left|\left(6^{2n} - 1\right)\right.$

$$6^{2n} - 1 = 35k$$

$$6^{2n} - 1 = \left(6^2\right)^n - 1 = 36^n - 1 = (35+1)^n - 1 = \binom{n}{0}35^n +$$

$$+\binom{n}{1}35^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}35 + \underbrace{\binom{n}{n} - 1}_{0} = 35k$$

Pr.

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0^n = 0$

c) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = (1+2)^n = 3^n$

d) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$

Pr.

Dokážte, že $\forall\ k \le n : k.\binom{n}{k} = n.\binom{n-1}{k-1}$:

$$k.\binom{n}{m} = k.\frac{n!}{(n-k)!.k!} = \frac{k.n.(n-1)!}{(n-k)!.k.(k-1)!} = n.\frac{(n-1)!}{(n-k)!.(k-1)!} = n.\binom{n-1}{k-1}$$

Pr.

Nájdite koeficient funkcie $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ pri x^8. Budú všetky členy od premennej x:

$$a_k = \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k = \binom{10}{k}\left(3x^2\right)^{10-k}.\left(-\frac{1}{x}\right)^k = \binom{10}{k} 3^{10-k}.x^{20-3k}$$

$$20 - 3k = 8$$

$$3k = 12$$

$k = 4$ … 5. člen

$$\binom{10}{k} 3^{10-k} = \binom{10}{4} 3^6 = 153090$$

- aby člen nezávisel od x, tak musí platiť $20 - 3k = 0$ a teda $k = \frac{20}{3}$, čo pre $k \in Z_0^+$ nie je možné $\Rightarrow$ všetky členy závisia od x

Pr.

Aký zvyšok dostaneme pri delení čísla 9^{100} číslom 8:

$$9^{100} = 8k + z$$

$$9^{100} = (8+1)^{100} = \binom{100}{0} 8^{100} + \binom{100}{1} 8^{99} + \cdots + \binom{100}{99} 8 + \binom{100}{100} = 8k + 1$$

- zvyšok po delení je 1

Pr.

Dokážte Bernouliho nerovnosť: $\forall\ n \in N, x \in R^+ : (1+x)^n \ge 1 + nx$

$$(1+x)^n = \underbrace{\binom{n}{0} 1^n}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1} 1^{n-1}.x}_{nx} + \underbrace{\cdots + \binom{n}{n} x^n}_{>0} \ge 1 + nx$$

Pr.

Dokážte, bez použitia matematickej indukcie, že $\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$ je celé číslo:

$$\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9} = \frac{(9+1)^n - 1}{81} - \frac{9n}{81} = \frac{\binom{n}{0} 9^n + \binom{n}{1} 9^{n-1} + \cdots + \overbrace{\binom{n}{n}}^{0} - 1 - 9n}{81} =$$

$$= \frac{9.\left[\binom{n}{0} 9^{n-1} + \binom{n}{1} 9^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2} 9 + \overbrace{\binom{n}{n-1}}^{0} - n\right]}{81} = \frac{81.\left[\binom{n}{0} 9^{n-2} + \binom{n}{1} 9^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2}\right]}{81} =$$

$$= \binom{n}{0} 9^{n-2} + \binom{n}{1} 9^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2} = k$$

> číslo k je určite kladné celé číslo, pretože kombinačné číslo je kladné celé číslo a keď ho vynásobíme kladným celým číslo, tak zase máme kladné celé číslo a je zrejmé, že súčet kladných celých čísiel je nič iné ako celé číslo

- <u>permutácie s opakovaním</u>

<u>Pr.</u>

Koľko „slov“ možno zostaviť z hlások slova:

a) maco

- tu nemáme nad čím uvažovať, postačia nám permutácie $N = P(4) = 4!$

b) mami

$m_1am_2i = m_2am_1i$

- pri takomto slove je zrejmé, že keď použijeme permutácie, tak niektoré slová sa budú opakovať, keďže máme dve „m“ $N = \frac{P(4)}{P(2)} = \frac{4!}{2!} = 12$

c) jelene

$je_1le_2ne_3 = je_1le_3ne_2 = je_2le_1ne_3 = je_2le_3ne_1 = je_3le_1ne_2 = je_3le_2ne_1$

- tu sa budú zase niektoré opakovať $N = \frac{P(6)}{P(3)} = \frac{6!}{3!} = 120$

d) popolo

$p_1o_1p_2o_2lo_3=p_1o_1p_2o_3lo_2=p_1o_2p_2o_1lo_3=p_1o_2p_2o_3lo_1=p_1o_3p_2o_1lo_2=p_1o_3p_2o_2lo_1$
$p_2o_1p_1o_2lo_3=p_2o_1p_1o_3lo_2=p_2o_2p_1o_1lo_3=p_2o_2p_1o_3lo_1=p_2o_3p_1o_1lo_2=p_2o_3p_1o_2lo_1$

- v tomto prípade bude slov ešte menej, keďže sa opakujú dve písmená

$N = \frac{P(6)}{P(3).P(2)} = \frac{6!}{3!.2!} = 60$

> to nás privádza ku permutáciám s opakovaním

<u>Def.</u>

Permutáciou s opakovaním z n_1 prvkov prvého druhu, n_2 prvkov druhého druhu, …, n_p prvkov p-teho druhu nazývame každú usporiadanú n-ticu, utvorenú z n_1 prvkov prvého druhu, n_2 prvkov druhého druhu, …, n_p prvkov p-teho druhu, kde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$

- počet všetkých permutácií s opakovaním z n_1 prvkov prvého druhu, n_2 prvkov druhého druhu, …, n_p prvkov p-teho druhu označujeme $P'(n_1, n_2, \ldots, n_p)$

<u>Veta</u>

$$\forall\ n_1, n_2, \ldots, n_p \in N : P'(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \frac{n!}{n_1!.n_2!.\cdots.n_p!}; n = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

<u>Pr.</u>

Aranžér chce vo výklade vedľa seba umiestniť svetre dva sú rovnaké biele, dva sú rovnaké modré a jeden je zelený. Koľkými spôsobmi to môže urobiť:

$BS \ldots 2$

$MS \ldots 2$ $\quad [BS, MS, ZS, BS, MS]$

$ZS \ldots 1$ $\quad N = P'(2,2,1) = \frac{5!}{2!.2!.1!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.2.1} = 30$

<u>Pr.</u>

Koľko „slov“ možno vytvoriť z písmen slova MISSISSIPPI zámenou poradia písmen:

$M \ldots 1$

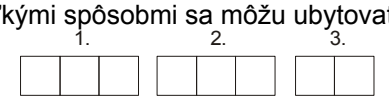
$I \ldots 4$

$S \ldots 4$ $\quad [ISMIPSIPSIS]$

$P \ldots 2$ $\quad N = P'(1,4,4,2) = \frac{11!}{4!.4!.2!.1!} = 34650$

Pr.

Osem študentov sa má ubytovať v troch izbách. Dve sú trojpostelové a jedna je dvojpostelová. Koľkými spôsobmi sa môžu ubytovať:



$[1., 2., 1., 3., 2., 3., 2., 1]$

$N = P'(3,3,2) = \frac{8!}{3!.3!.2!} = 560$

Pr.

a) Koľko existuje postupností obsahujúcich tri nuly a päť jednotiek?

b) Koľko z nich je takých, že žiadne dve nuly nie sú vedľa seba?

a) $0 \ldots 3$

$1 \ldots 5$ $\quad N = P'(3,5) = \frac{8!}{5!.3!} = 56$

b) je zrejmé, že danú úlohu nemôžeme riešiť permutáciami s opakovaním, takže uvažujme nasledovne: zapíšme jednotky za sebou, medzi nimi sa potom nachádza šesť medzier

1. 2. 3. 4. 5. 6.
1 1 1 1 1

> teda pre umiestnenie troch núl máme 6 miest, čo sú kombinácie

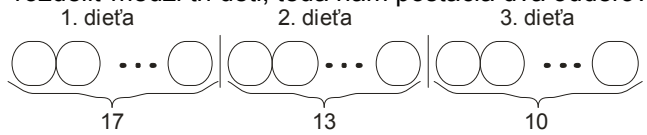
$N = C(3,6) = \frac{6!}{3!.3!} = 20$

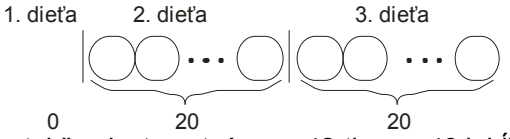
Pr.

Tri deti majú štyridsať jabĺk:

a) koľkými spôsobmi si ich môžu rozdeliť

- tu využijeme metódu „oddeľovačov“: máme štyridsať jabĺk a a máme ich rozdeliť medzi tri deti, teda nám postačia dva oddeľovače:





> takže vlastne utvárame 42-tice zo 40 jabĺk a dvoch oddeľovačov

$N = P'(40,2) = \frac{42!}{40!.2!} = 861$

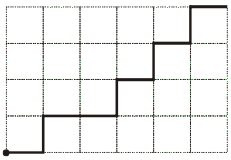
b) koľko bude spôsobov, ak každý má dostať aspoň 5 jabĺk

- každému dáme päť jabĺk a ostatné podelíme rovnako, teda:

$N = P'(25,2) = \frac{27!}{25!.2!} = 351$

Pr.

Je daný obdĺžnik $4x6cm$, rozdelený na jednotkové štvorce. Koľko existuje ciest z jedného vrcholu do protiľahlého, ak sa smie ísť po stranách štvorčekov iba hore alebo doprava:



- musíme ísť štyrikrát hore a šesťkrát doprava

doprava … 0

hore … 1 $\quad$ 0100101010

$N = P'(6,4) = \frac{10!}{6!.4!} = 210$

> alebo dávame štyri 1 na 10 miest $C(4,10) = 210$

Pr.

Hokejový zápas skončil $6:3$. Koľkými spôsobmi sa mohlo vyvíjať skóre:

$D \ldots 6$

$H \ldots 3$ $\quad [DDHDHHDDD]$

$N = P'(6,3) = \frac{9!}{6!..3!} = 84$

Pr.

Koľkými spôsobmi možno rozdeliť medzi tri deti $3n$ hračiek tak, aby každé dostalo n hračiek:

- postačí nám keď si uvedomíme, že nebudeme vyberať hračky, ale deti a každé musíme vybrať n-krát

$$N = P'(n,n,n) = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

- kombinácie s opakovaním

Pr.

V obchode predávajú tri druhy sirupov, jahodový, malinový a pomarančový. Koľkými spôsobmi možno kúpiť štyri fľaše sirupu:

J, M, P

$JJJJ$	$JJJM$	$JJMM$
$MMMM$	$JJJP$	$JJPP$
$PPPP$	$MMMP$	$JJMP$
	$MMMJ$	$MMPP$
	$PPPJ$	$MMJP$
	$PPPM$	$PPMJ$

- je ich pätnásť

> takéto vypisovanie je pri väčšom počte zdĺhavé

Def.

Kombináciou s opakovaním k-tej triedy z prvkov n druhov, kde $k, n \in N$, nazývame každú neusporiadanú k-ticu, utvorenú z n druhov

- počet všetkých kombinácií s opakovaním k-tej triedy z prvkov n druhov označujeme $C'(k,n)$

Veta

$$\forall\ k,n \in N : C'(k,n) = \binom{k+n-1}{k}$$

Dôkaz

$$C'(k,n) = P'(k,n-1) = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!.k!} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

> mám k prvkov a n druhov, keďže sú to neusporiadané k-tice, tak si ich môžeme preskupiť, aby boli prvky rovnakých druhov vedľa seba a potom ich rozdelíme oddeľovačmi a pre n druhov nám stačí $n-1$ oddeľovačov a tak máme $P'(k,n-1)$

1. 2. n-tý druh
xx…| xx… | … | xx…

Pr.

Koľkými spôsobmi možno rozdeliť deväť autíčok štyrom deťom:

$$N = C'(9,4) = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9} = \frac{12!}{9!..3!} = 220$$

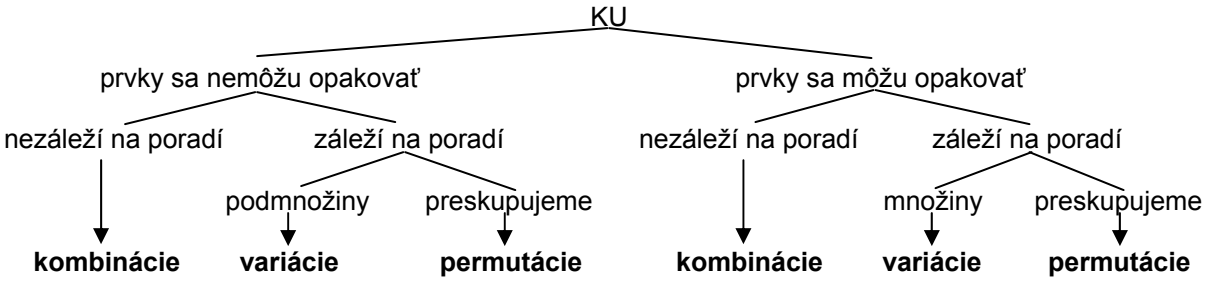
Pr.

Koľko existuje nezhodných kvádrov, ktorých dĺžky hrán sú prirodzené čísla z intervalu $\langle 1,15 \rangle$:

$$N = C'(3,15) = \binom{3+15-1}{3} = \binom{17}{3} = \frac{17!}{14!.3!} = 680$$

- pri riešení kombinatorickej úlohy (KU) postupujeme nasledovne:

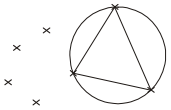
1. zistíme či sa môžu prvky opakovať
2. zistíme či záleží na poradí prvkov
3. či vytvárame podmnožiny (množiny pri opakovaní) alebo len preskupujeme danú množinu



- uveďme ešte niekoľko príkladov:

Pr.
Koľko „slov“ možno vytvoriť zo slova STOLIČKA zmenou poradia písmen:
- vidíme, že písmena sú rôzne: $N = P(8) = 8!40320$

Pr.
V rovine je daných sedem bodov. Žiadnymi tromi neprechádza priamka a žiadnymi štyrmi neprechádza kružnica. Koľko kružníc, ktoré prechádzajú tromi bodmi možno zostrojiť:



$$N = C(3,7) = \frac{7!}{4!.3!} = 35$$

Pr.
Koľkými spôsobmi si môžu tri osoby rozdeliť, bez krájania, sedem rovnakých hrušiek a päť rovnakých jabĺk:

$$N = C'(7,3).C'(5,3) = \binom{7+3-1}{7}.\binom{5+3-1}{5} = \binom{9}{7}.\binom{7}{5} =$$

$$= \frac{9!}{2!.7!}.\frac{7!}{2!.5!} = 36.21 = 756$$

Pr.
Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu päť figúrok tak, aby dve stáli na bielych tri na čiernych poliach:

$M = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$, bielych … 32, čiernych …32

- vyberieme si dve biele polia $C(2,32) = 496$, tri čierne $C(3,32) = 4960$ a figúrky medzi sebou vymieňame $P(5) = 120$

$N = P(5).C(2,32).C(3,32) = 120.496.4960 = 295219200$

- alebo vyberiem si dve figúrky $C(2,5)$, ktoré dám na biele polia a potom bude záležať na poradí vyberania polí $V(2,32)$ a $V(3,32)$

$N = C(2,5).V(2,32).V(3,32) = 10.992.29760 = 295219200$

Pr.
V kupé je desať miest. Traja cestujúci chcú sedieť v smere jazdy a jeden v protismere jazdy. Ostatným šiestim, medzi ktorými je aj Katka s mamičkou, je to jedno, s výnimkou, že Katka chce sedieť pri okna a súčasne pri mamičke. Koľkými spôsobmi sa môžu posadiť tak, aby bol každý spokojný:

- ak Katka sedí v protismere jazdy: $V(3,5).V(1,3).P(4)$
- ak Katka sedí v smere jazdy: $P(3).V(1,5).P(4)$

$N = V(3,5).V(1,3).P(4) + P(3).V(1,5).P(4) = 5040$

Pr.

Koľkými spôsobmi možno zo siedmich chlapcov a štyroch dievčat vybrať šesťčlenné družstvo tak, aby v ňom boli aspoň dve dievčatá:

$$N = C(4,7).C(2,4) + C(3,7).C(4,4) + C(2,7).C(4,4) = 371$$

Pr.

V depe je päť lôžkových, sedem jedálnych a dvadsať obyčajných vozňov. Koľko súprav piatich vagónov možno zostaviť:

$$N = V'(5,3) = 3^5 = 243$$

Pr.

Z vrecka, v ktorom je 73 žltých, 41 modrých, 19 zelených a 50 červených guliek, naberieme hrsť 10 guliek. Koľko existuje takých hrstí:

$$N = C'(10,4) = 286$$

Pr.

Koľkými spôsobmi možno z desiatich kozmonautov vybrať štvorčlennú posádku, ak je nevhodné, aby určitý dvaja leteli spolu:

$$M = \{k_1, k_2, \ldots, k_{10}\}$$

- vyberáme štyroch a nezáleží na poradí výberu: $C(4,10)$
- dvaja nemajú letieť spolu, tak uvažujme takto: vyberme týchto dvoch a ku nim treba vybrať už len dvoch: $C(2,8)$

> teda $N = C(4,10) - C(2,8) = 210 - 28 = 182$

Pr.

Koľko rôznych „slov“, v ktorých nebudú vedľa seba samohlásky, možno vytvoriť zámenou poradia písmen zo slova PROTOPLAZMA:

$$P, O, A \ldots 2$$

$$R, T, L, Z, M \ldots 1$$

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
$P \quad R \quad T \quad P \quad L \quad Z \quad M \quad \ldots \quad P'(2,1,1,1,1,1)$

- ďalej máme pre O a A $P'(2,2)$

> vyberáme štyri medzery z ôsmich $C(4,8)$

$$N = P'(2,2).P'(2,1,1,1,1,1).C(4,8) = 1058400$$

Pr.

Koľko je všetkých trojciferných čísel, ktoré neobsahujú nulu a osmičku:

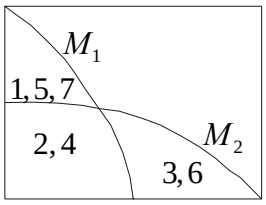
$$N = V'(3,8) = 8^3 = 512$$

- princíp inklúzie a exklúzie

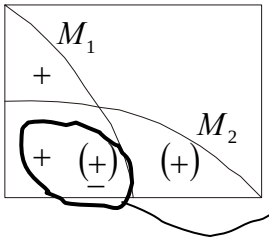
- inklúzia = vkladanie; exklúzia = vyberanie
- ide o to, že v kombinatorike pracujeme s množinami a tie sa dajú znázorňovať aj graficky (Venov diagram) > čiže vlastnosti množiny alebo rôzne množiny znázorníme graficky a hľadáme spoločné prvky (jednoduchšie povedané nájdeme prienik a tieto prvky raz „vyberieme“, keďže sú zarátané dvakrát)
- ukážeme si to na niekoľkých príkladoch:

Pr.

Na Venovom diagrame znázornite množiny $M_1 = \{1,2,4,5,7\}, M_2 = \{2,3,4,6\}$ a určite počet prvkov množiny $M_1 \cup M_2$:



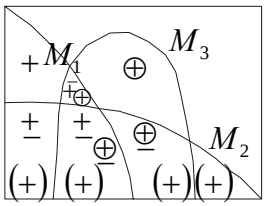
$$|M_1 \cup M_2| = 7 = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$$



- vložíme prvky množiny M_1 (označíme si ich $+$)
- vložíme prvky množiny M_2 (označíme si ich $(+)$)
- sú zarátané tie isté prvky dvakrát, tak ich raz vyberieme (čo označíme $-$)

> a teda:

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$$



- vložíme prvky množiny M_1 (označíme si ich $+$)
- vložíme prvky množiny M_2 (označíme si ich $(+)$)
- vložíme prvky množiny M_3 (označíme si ich $\oplus$)

> vyberieme prvky, ktoré sa opakujú (označíme si ich $-$)

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - \\ - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$$

- pre štyri množiny:

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| - |M_1 \cap M_2| - \\ - |M_1 \cap M_3| - |M_1 \cap M_4| - |M_2 \cap M_3| - -|M_2 \cap M_4| - \\ - |M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4| + \\ + |M_2 \cap M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + \\ - |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|$$

- pre päť množín už bude 31 členov, atď.

<u>Pr.</u>

Každý z 50 študentov si musí vybrať aspoň jeden z predmetov matematika a angličtina. Matematiku si vybralo 32 študentov a angličtinu si vybralo 27 študentov. Koľkí si vybrali oba predmety:

M … matematika $\quad |M| = 32$

A … angličtina $\quad |A| = 27$

$$|M \cap A| = x$$

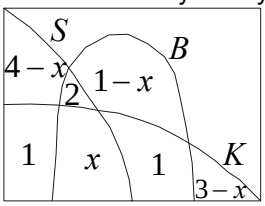
$$|M \cup A| = |M| + |A| - |M \cap A|$$

$$|M \cap A| = |M| + |A| - |M \cup A| = 32 + 27 - 50 = 9$$

<u>Pr.</u>

Pri testovaní televízorov bolo 10 chybných. V 7 bola chybná súčiastka, v 5 zlý kontakt a 4 mali zlú skriňu. Chybnú súčiastku aj kontakt, ale dobrú skriňu mal jeden; jeden mal chybný kontakt a skriňu, ale dobré súčiastky a dva mali chybnú súčiastku a skriňu, ale dobré kontakty:

a) koľko TV malo všetky tri chyby b) koľko TV malo iba zlú skriňu



S … chybná súčiastka … 7

K … chybný kontakt … 5

B … chybná skriňa … 4

$$4 - x + 1 + 2 + x + 1 - x + 1 + 3 - x = 10$$

$$12 - 2x = 10$$

$$x = 1$$

a) jeden TV b) žiadny TV

Neriešené úlohy

1. Koľko štvorciferných prirodzených čísel s rôznymi číslicami možno zostaviť z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, ak čísla majú byť:
a) párne b) nepárne c) deliteľné štyrmi

2. Ktorých šesťciferných čísel je viac: tých, ktoré obsahujú deviatku, alebo tých, ktoré ju neobsahujú?

3. Koľkými spôsobmi možno piatich žiakov posadiť do sedemmiestnej lavice, ak:
a) Jano ma sedieť na kraji b) Jano a Fero majú sedieť vedľa seba

4. Koľkými spôsobmi možno usporiadať množinu prirodzených čísel 1, 2, 3.... , n tak, aby:
a) čísla 1, 2, 3 boli na prvých troch miestach
b) čísla 1, 2, 3 nasledovali v tamto poradí za sebou
c) každé párne číslo bolo na párnom mieste

5. V triede je 15 chlapcov a 20 dievčat. Koľkými spôsobmi z nich možno zostaviť družstvo, v ktorom bude 5 chlapcov a 4 dievčatá?

6. V krabici je 30 výrobkov, z toho 6 nepodarkov. Koľkými spôsobmi možno vybrať 5 výrobkov tak, aby medzi nimi boli práve dva nepodarky?

7. V rovine je daných 12 bodov, z ktorých práve 5 leží na priamke, žiadne tri iné neležia na priamke. Koľko priamok je nimi určených?

8. Koľko existuje postupností obsahujúcich 5 núl a 8 jednotiek? Koľko je takých, v ktorých žiadne dve nuly nie sú vedľa seba? Koľko je takých, v ktorých žiadne dve jednotky nie sú vedľa seba?

9. Päť chlapcov a štyri dievčatá sa ma postaviť do zástupu tak, aby žiadne dve dievčatá nestali bezprostredne za sebou. Koľkými spôsobmi to je možné?

10. Koľko „slov" možno vytvoriť z písmen slova LOKOMOTÍVA iba zmenou ich poradia? Koľko z nich bude takých, že dve O nie sú vedľa seba? Koľko z nich bude takých, že dve samohlásky nie sú vedľa seba?

11. Hokejový zápas skončil 10:7. Koľkými spôsobmi sa mohlo vyvíjať skóre? Koľkými spôsobmi sa mohlo vyvíjať skóre, ak prvá tretina skončila 5:3?

12. Dopravný podnik sa rozhodol zrušiť 6 zastávok na trati, ktorá ma 18 zastávok spolu s východiskovou a konečnou. Koľkými spôsobmi možno zastávky vybrať" na zrušenie, ak sa nesmú zrušiť" žiadne dve susedne, ani východisková a konečna?

13. Riešte v N:

a) $\binom{x-1}{x-3}+\binom{x-2}{x-4}=9$ b) $\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-1}=\frac{x^3+1}{2}$

c) $\binom{4}{3}\binom{x+1}{x-1}-\binom{5}{3}\binom{x+1}{x}+\binom{3}{2}\binom{4}{2}=0$

14. Koľký člen binomického rozvoja výrazu $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{12}$ **neobsahuje** x **?**

15. Koľký člen binomického rozvoja výrazu $\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$ **obsahuje** x^8 **?**

16. Dokážte, že pre každé $n \in N$ **platí:** $81 \mid \left(10^n-9n-1\right)$

28. PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA

1. Základné pojmy pravdepodobnosti
- náhodný pokus
- udalosť
- opačná udalosť
- nezlučiteľné udalosti

2. Pravdepodobnosť
- intuitívna predstava pravdepodobnosti
- klasická definícia
- zovšeobecnená Laplaceova definícia
- axiomatická definícia
- vlastnosti pravdepodobnosti

3. Podmienená pravdepodobnosť
- definícia
- veta o úplnej pravdepodobnosti

4. Nezávislé udalosti

5. Náhodné veličiny

6. Bernoulliho schéma

7. Geometrická pravdepodobnosť

8. Štatistika
- vznik, úloha štatistiky
- opis štatistického súboru
- znázorňovanie štatistických údajov
- charakteristiky polohy
- charakteristiky variability
- štatistická závislosť znakov

……

- teória pravdepodobnosti vznikla v 15.-16. stor.
- zaoberali sa ňou Pascal, Bernoulli, Laplace, Huygens, Fermat, Galilei, ...

Def.

Náhodný pokus je taký pokus, ktorý pri zmenených podmienkach môže viesť k rôznym výsledkom.

> teória pravdepodobnosti skúma náhodné pokusy - vedú k rôznym výsledkom (hod kockou, hod mincou, …)

(existujú ešte aj determinované /určené, vymedzené/ pokusy, ale tie vedú vždy ku rovnakému výsledku a tými sa teória pravdepodobnosti nezaoberá)

- množinu všetkých výsledkov pokusu budeme označovať Ω (*omega*)

Def.

Udalosť je každá podmnožina množiny Ω.

>udalosť označujeme písmenami $A, B, C, \ldots$

> počet podmnožín je 2^n

- zoberme si pokus: náhodne hádžeme kockou
  - padne párne číslo … $A = \{2,4,6\}$ … $\{1,3,5\} = A'$ … nepadne párne číslo
  - padne prvočíslo … $B = \{2,3,5\}$
  - padne číslo väčšie ako 2 … $C = \{3,4,5,6\}$
  - padne číslo väčšie ako 7 … $D = \theta$ > **nemožná udalosť**
  - padne číslo väčšie alebo rovné 1 … $E = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$ > **istá udalosť**

Def.

Opačná udalosť k udalosti A je udalosť $A' = \Omega - A$.

Def.

Udalosti A, B sa nazývajú nezlučiteľné, ak $A \cap B = \theta$, v opačnom prípade sú zlučiteľné.

- pravdepodobnosť

- zoberme si najjednoduchší pokus - hod mincou > vykonajme ho päťkrát po 10 hodov:
  z = znak, h = hlava

  1. z, h, z, z, h, z, z, z, h, z … h …3, z …7
  2. z, z, h, h, h, z, z, h, h, h … h …6, z …4
  3. z, h, z, h, h, h, h, h, h, z … h …7, z …3
  4. z, z, z, h, h, z, z, h, z, z … h …3, z …7
  5. z, z, h, z, z, h, z, h, h, h … h …5, z…5

  > vidne, že výsledok pokusu je vždy iný, keď ho zosumarizujeme, tak zo 100 hodov padla 24-krát hlava a 26-krát znak
  > nemôžme presne povedať čo padne častejšie

- intuícia nám hovorí, že pravdepodobnosť môžeme chápať ako **mieru istoty, že nejaká udalosť nastane**

n	10	10	50	150	450	10000	80640
m	2	8	20	75	222	4985	40344
$\frac{m}{n}$	0,2	0,8	0,4	0,5	0,4933	0,4985	0,5003

n - počet pokusov
m - nastala udalosť A

> ak je počet opakovaní náhodného pokusu malý, tak sa relatívna početnosť náhodného pokusu môže meniť (ako to bolo aj pri našom hode mincou)
> ak počet opakovaní pokusu rastie, tak sa relatívna početnosť približuje k istému číslu, ktoré považujeme za pravdepodobnosť udalosti A

$n \to \infty \ldots \frac{m}{n} \to P(A)$

> čo môžeme zapísať aj takto : $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n}$

- klasickú definíciu vyslovil Bernoulli, platí iba pre také náhodné pokusy, pri ktorých sú všetky výsledky rovnako možné:

Def.

Ak náhodný pokus má n rovnako možných výsledkov a udalosť A obsahuje m, z týchto výsledkov, tak pravdepodobnosť nastania udalosti A je číslo $P(A) = \frac{m}{n}$.

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že v športke ako prvé vytiahnu prvočíslo:

A … ako prvé vytiahnu prvočíslo

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 49\} \qquad n = |\Omega| = 49$

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\} \qquad m = |A| = 15$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{49} \doteq 0{,}31$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že pri hode kockou padne číslo väčšie ako 4:

A … padne číslo väčšie ako 4

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad n = |\Omega| = 6$

$A = \{5, 6\} \qquad m = |A| = 2$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že náhodné trojciferné číslo bude mať všetky číslice rôzne:

A … všetky číslice rôzne … $V(3,10) - V(2,10)$

$\Omega = \{100, 101, \ldots, 999\} \quad n = |\Omega| = 900$

$m = V(3,10) - V(2,10) = 630$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{630}{900} = 0{,}7$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že ak dvaja hráči postupne hádžu kockou padne prvému väčšie číslo ako druhému:

A … prvý hodí väčšie ako druhý

$\Omega = \{[1,1], [1,2], \ldots, [6,6]\} \qquad n = |\Omega| = V'(2,6) = 6^2 = 36$

$A = \{[6,5]; [6,4]; [6,3]; [6,2]; [6,1]; [5,4]; [5,3]; \ldots; [2,1]\} \quad m = |A| = 15$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že ak z 32 kariet vyberieme 3 všetky budú červené:

A … tri červené

$n = C(3,32) = 4960$

$m = C(3,8) = 56$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{56}{4960} \doteq 0{,}0113$

Pr.

V klobúku je 5 bielych a 5 čiernych guliek. Náhodne vyberieme 3. Aká je pravdepodobnosť, že 1 bude biela a 2 čierne ak guľku po vytiahnutí:

a) vrátime b) nevrátime

a) $n = V'(3,10) = 1000$

- ak vytiahneme 1. bielu, 2. a 3. čiernu je to 5^3
- ak vytiahneme 2. bielu, 1. a 3. čiernu je to 5^3
- ak vytiahneme 3. bielu, 1. a 1. čiernu je to 5^3

> $m = 375$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$

b) $n = C(3,10) = 120$

$m = C(2,5).C(1,5) = 50$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$

Pr.

Do výťahu, ktorý premáva cez 12 poschodí, nastúpilo 5 osôb. Aká je pravdepodobnosť, že každý vystúpi inde:

A … z 5 každý vystúpi inde

$n = V'(5,12) = 12^5 = 248832$

$m = V(5,12) = 95040$

$P(A) = \frac{m}{n} = 0{,}3819\overline{4}$

- zovšeobecnená Laplaceova definícia

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvomi kockami padne súčet 5 alebo 6:

A … padne súčet 5 alebo 6

- ak budeme uvažovať ako doteraz, tak dostávame:

$\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$ … sú možné súčty

$n = |\Omega| = 11$

$A = \{5, 6\}$ $\quad m = |A| = 2 \quad P(A) = \frac{2}{11}$

> uvažujme nasledovne: pri hode dvomi kockami dostávame usporiadané dvojice:

$\Omega = \{[1,1]; [1,2]; \ldots; [6,6]\} \qquad n = |\Omega| = V'(2,6) = 36$

> súčet 5 alebo 6 môžeme dosiahnuť viacerými dvojicami:

$A = \{[1,4]; [2,3]; [3,2]; [4,1]; [1,5]; [2,4]; [3,3]; [4,2]; [5,1]\}$

$m = 9$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{36}$

súčet:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pravdepodobnosť:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Def.

Nech je daný náhodný pokus, ktorého množina všetkých výsledkov pokusu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Nech každému ω_i je priradené nezáporné číslo p_i tak, že $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ a nech je udalosť $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \ldots, \omega_{im}\}$. Potom pravdepodobnosť udalosti A je číslo $P(A) = p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{im}$.

Pr.

Je daný náhodný pokus $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ a $p_1 = 0{,}2; p_2 = 0{,}3; p_3 = 0{,}4; p_4 = 0{,}1$.

Vypočítajte pravdepodobnosť udalosti:

a) $A = \{\omega_1\}$

$P(A) = p_1 = 0{,}2$

b) $B = \{\omega_1, \omega_3\}$

$P(B) = p_1 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$

c) B'

$B' = \{\omega_2, \omega_4\}$

$P(B') = \omega_2 + \omega_4 = 03 + 0{,}1 = 0{,}4$

Pr.

Majme takú nehomogénnu kocku, že pravdepodobnosti padnutia čísel $1,2,3$ sú $p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}25;\ p_3 = 0{,}2$. Pravdepodobnosti padnutia ostatných čísel sú rovnaké. Aká je pravdepodobnosť, že padne nepárne číslo:

$$p_4 = p_5 = p_6$$
$$p_4 + p_5 + p_6 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3)$$
$$3p_4 = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$$
$$p_4 = 0{,}15 = p_5 = p_6$$

A … padne nepárne číslo

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A = \{1,3,5\} \qquad P(A) = p_1 + p_3 + p_5 = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}45$$

Pr.

Majme takú nehomogénnu kocku, že pravdepodobnosť padnutia istého čísla je priamo úmerná tomu číslu. Aká je pravdepodobnosť, že padne párne číslo:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$$
$$21p = 1$$
$$p = \tfrac{1}{21} \ldots p_1 = \tfrac{1}{21}, p_2 = \tfrac{2}{21}, p_3 = \tfrac{3}{21}, p_4 = \tfrac{4}{21}, p_5 = \tfrac{5}{21}, p_6 = \tfrac{6}{21}$$

A … padne párne číslo

$$A = \{2,4,6\} \qquad P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \tfrac{2}{21} + \tfrac{4}{21} + \tfrac{6}{21} = \tfrac{12}{21}$$

Pr.

Majme takú nehomogénnu kocku, že pravdepodobnosť padnutia istého čísla je nepriamo úmerná tomu číslu. Aká je pravdepodobnosť, že padne číslo menšie ako štyri:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$p + \tfrac{p}{2} + \tfrac{p}{3} + \tfrac{p}{4} + \tfrac{p}{5} + \tfrac{p}{6} = 1$$
$$\tfrac{147p}{60} = 1$$
$$p = \tfrac{60}{147} \ldots p_1 = \tfrac{60}{147}, p_2 = \tfrac{30}{147}, p_3 = \tfrac{20}{147}, p_4 = \tfrac{15}{147}, p_5 = \tfrac{12}{147}, p_6 = \tfrac{10}{147}$$

A … padne číslo menšie ako štyri

$$A = \{1,2,3\} \qquad P(A) = p_1 + p_2 + p_3 = \tfrac{60}{147} + \tfrac{30}{147} + \tfrac{20}{147} = \tfrac{110}{147} \doteq 0{,}748$$

Pr.

Automat na cestovné lístky sa pokazil. V polovici prípadov po vhodení mince nevypadne nič a v $\frac{1}{10}$ prípadov vypadne minca aj lístok. V ostatných prípadoch s rovnakou pravdepodobnosťou vypadne len lístok alebo len minca. Aká je pravdepodobnosť, že po vhodení mince dostaneme lístok:

$$\Omega = \{N, LM, L, M\} \qquad p_N = \tfrac{1}{2}, p_{LM} = \tfrac{1}{10}$$
$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2} = 1$$
$$\tfrac{6}{10} + x = 1$$
$$x = \tfrac{4}{10} \ldots p_L = \tfrac{2}{10}, p_M = \tfrac{2}{10}$$

A … dostaneme lístok

$$A = \{L, LM\}$$
$$P(A) = p_L + p_{LM} = \tfrac{2}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{3}{10}$$

- <u>axiomatická definícia pravdepodobnosti</u>

<u>Def.</u>

Pravdepodobnosť je predpis, ktorý každej udalosti A priradí reálne číslo $P(A)$ tak, že platí:

1. $\forall A: P(A) \geq 0$
2. $\forall A, B: A \cap B = \theta \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\Omega) = 1$

- <u>vlastnosti pravdepodobnosti</u>

<u>Veta</u>

$\forall A: P(A') = 1 - P(A)$

Dôkaz

A, A'

- keďže platí: $A \cap A' = \theta$ a $A \cup A' = \Omega$, tak podľa definície máme:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$
$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$
$$1 = P(A) + P(A')$$
$$P(A') = 1 - P(A)$$

<u>Veta</u>

$P(\theta) = 0$

Dôkaz

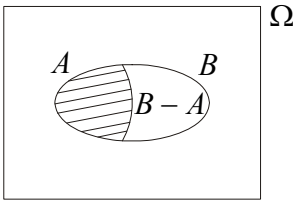
- máme množinu Ω, jej podmnožiny sú: $\theta, A, B, \ldots, \Omega$
- je zrejmé, že $\theta' = \Omega$ a teda podľa predchádzajúcej vety:

$$P(\theta) = 1 - P(\theta') = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

<u>Veta</u>

$\forall A, B: A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dôkaz



$$A \cap (B - A) = \theta$$
$$B = A \cup (B - A)$$
$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + \underbrace{P(B - A)}_{P(B) - P(A) \geq 0}$$
$$P(B) \geq P(A)$$

<u>Veta</u>

$\forall A: 0 \leq P(A) \leq 1$

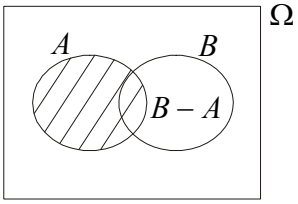
Dôkaz

$$P(\theta) = 0; P(\Omega) = 1 \ldots P(\theta) \leq P(A) \leq P(\Omega) \ldots 0 \leq P(A) \leq 1$$

<u>Veta</u>

$\forall A, B: P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dôkaz



$$B = (B - A) \cup (A \cap B)$$
$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$$
$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- teda pri zjednotení udalostí $A \cup B$, máme pre pravdepodobnosť $P(A \cup B)$ zdanlivo dve možnosti:

1. $A \cap B = \theta \ldots P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2. $A \cap B \neq \theta \ldots P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

> ale pozorný čitateľ si ľahko uvedomí, že máme iba jednu a to:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

> nakoľko $A \cap B = \theta \ldots P(A \cap B) = P(\theta) = 0$

Pr.

V lotérii je 1000 žrebov, z ktorých 20 vyhráva. Aká je pravdepodobnosť, že človek, ktorý si kúpil 2 žreby:

a) na oba vyhrá

A … oba vyhrávajú

$n = C(2,1000) = 499500$

$m = C(2,20) = 190$ $\qquad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{190}{499500} = 0,00\overline{038}$

b) práve na jeden vyhrá

B … jeden vyhráva

$n = C(2,1000) = 499500$

$m = C(1,20).C(1,980) = 20.980 = 19600$ $\qquad P(B) = \frac{m}{n} = \frac{19600}{499500} = 0,0\overline{392}$

c) nevyhrá

C … nevyhrá

$n = C(2,1000) = 499500$

$m = C(2,980) = 479710$ $\qquad P(C) = \frac{m}{n} = \frac{479710}{499500} = 0,96\overline{038}$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že pri hode šiestimi kockami padne aspoň jedna 6:

- keďže je použitý kvantifikátor aspoň, tak musíme skúmať možnosti padnutia jednej, dvoch, …, šiestich 6; čo je zdĺhavé a preto si zoberieme opačnú udalosť:

A … padne aspoň jedna 6

$n = V'(6,6) = 6^6 = 46656$

A' … nepadne 6

$m' = V'(6,5) = 5^6 = 15625$

$P(A') = \frac{m'}{n} = \frac{5^6}{6^6} = \left(\frac{5}{6}\right)^6$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \doteq 0,665$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že pri hode šiestimi kockami padnú práve dve 6:

A … padnú práve dve 6

$n = V'(6,6) = 6^6 = 46656$

$m = C(2,6).V'(4,5) = 9375$

> na dvoch kockách šestky a na štyroch nie sú šestky

$P(A) = \frac{m}{n} \doteq 0,2$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybrané dvojciferné číslo bude:

a) párne

A … párne

$n = 90, m = 45$ $\qquad P(A) = \frac{45}{90} = 0,5$

b) párne alebo násobok 7

B … párne alebo násobok 7

$n = 90$

X … párne

Y … násobok 7

$B = X \cup Y \qquad P(B) = P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$

$m_X = 45 \qquad P(X) = \frac{45}{90}$

$m_Y = |\{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}| = 12 \qquad P(Y) = \frac{13}{90}$

$m_{X \cap Y} = 7 \qquad P(X \cap Y) = \frac{7}{90}$

$P(B) = \frac{45}{90} + \frac{13}{90} - \frac{7}{90} = \frac{51}{90} = 0{,}5\overline{6}$

c) párne alebo väčšie ako 80

C … párne alebo väčšie ako 80

$n = 90$

X … párne

Y … väčšie ako 80

$C = X \cup Y \qquad P(C) = P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$

$m_X = 45 \qquad P(X) = \frac{45}{90}$

$m_Y = 19 \qquad P(Y) = \frac{19}{90}$

$m_{X \cap Y} = 9 \qquad P(X \cap Y) = \frac{9}{90}$

$P(C) = \frac{45}{90} + \frac{19}{90} - \frac{9}{90} = \frac{55}{90} = 0{,}6\overline{1}$

d) násobok 8 alebo končiace 4

D … násobok 8 alebo končiace 4

$n = 90$

X … násobok 8

Y … končiace 4

$D = X \cup Y \qquad P(D) = P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$

$m_X = |\{16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}| = 11 \qquad P(X) = \frac{11}{90}$

$m_Y = |\{14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94\}| = 9 \qquad P(Y) = \frac{9}{90}$

$m_{X \cap Y} = 2 \qquad P(X \cap Y) = \frac{2}{90}$

$P(D) = \frac{11}{90} + \frac{9}{90} - \frac{2}{90} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

<u>Pr.</u>

V krabici je desať súčiastok, z ktorých sú tri chybné. Aká je pravdepodobnosť, že medzi piatimi náhodne vybranými budú:

a) aspoň dve chybné

	spolu	chybné	dobré
súčiastky	10	3	7
vyberieme	5	2	3
	5	3	2

A … aspoň dve chybné

A_2 … práve dve chybné

A_3 … práve tri chybné

$A = A_2 \cup A_3 \ldots P(A) = P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3)$

$n = C(5,10) = 252$

$m_2 = C(3,7).C(2,3) = 105 \qquad P(A_2) = \frac{105}{252}$

$m_3 = C(2,7).C(3,3) = 21 \qquad P(A_3) = \frac{21}{252}$

$P(A) = \frac{105}{252} + \frac{21}{252} = \frac{126}{252} = 0{,}5$

b) najviac jedna chybná

	spolu	chybné	dobré	
súčiastky	10	3	7	B … aspoň dve chybné
vyberieme	5	0	5	B_0 … práve nula chybných
	5	1	4	B_1 … práve jedna chybné

$$B = B_0 \cup B_1 \ldots P(B) = P(B_0 \cup B_1) = P(B_0) + P(B_1)$$

$$n = C(5,10) = 252$$

$$m_0 = C(5,7) = 21 \qquad P(B_0) = \tfrac{21}{252}$$

$$m_1 = C(4,7).C(1,3) = 105 \qquad P(B_1) = \tfrac{105}{252}$$

$$P(B) = \tfrac{21}{252} + \tfrac{105}{252} = \tfrac{126}{252} = 0{,}5$$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že zo skupiny sedem študentov majú aspoň dvaja narodeniny v ten istý deň:

$$n = V'(7,365) = 365^7$$

A … aspoň dvaja v ten istý deň

A' … žiadni dvaja v ten istý deň

$$m' = V(7,365) \qquad P(A') = \tfrac{m'}{n} \qquad P(A) = 1 - P(A') \doteq 1 - 0{,}94 = 0{,}06$$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že v športke zo šiestich čísel uhádneme štyri:

$$n = C(6,49) = 13983816$$

$$m = C(4,6).C(2,43) = 13545 \qquad P(A) = \tfrac{m}{n} \doteq 0{,}000968$$

Pr.

Čo je pravdepodobnejšie, aby po trikrát po štyroch hodoch padol znak, alebo päťkrát po ôsmich hodoch:

A … trikrát zo štyroch hodov padne znak

$$n_A = V'(4,2) = 16$$

$$m_A = C(3,4) = 4 \qquad P(A) = 0{,}25 = \tfrac{64}{256}$$

B … päťkrát z ôsmich hodov padne znak

$$n_B = V'(8,2) = 256$$

$$m_B = C(3,8) = 56 \qquad P(A) = \tfrac{56}{256}$$

$$P(A) > P(B)$$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že z pomiešaných kariet vytiahneme päť rovnakej farby:

A … päť rovnakej farby

$$n = C(5,32)$$

$$m = 4.C(5,8) \qquad P(A) = \tfrac{m}{n} = \tfrac{224}{201376} \doteq 0{,}0011$$

Pr.

Na šachovnicu náhodne postavíme bielu a čiernu vežu. Aká je pravdepodobnosť, že sa neohrozujú:

A … neohrozujú sa

$$n = V(2,64)$$

$m = 64.49$ (pre prvú máme 64 miest a pre druhú 49=64-15, čo sú políčka v riadku a stĺpci, kde sme dali prvú vežu)

$$P(A) = \tfrac{m}{n} = 0{,}\overline{7}$$

Pr.

V klobúku je osem bielych, sedem čiernych a päť modrých guliek. Vyberieme náhodne naraz tri guľky. Aká je pravdepodobnosť, že:

a) všetky majú rovnakú farbu

A … všetky majú rovnakú farbu

$n = C(3,20) = 1140$

$m = C(3,8) + C(3,7) + C(3,5) = 101 \qquad P(A) = \frac{101}{1140} \doteq 0{,}886$

b) každá má inú farbu

B … každá má inú farbu

$n = C(3,20) = 1140$

$m = 8.7.5 = 280 \qquad P(B) = \frac{280}{1140} \doteq 0{,}2456$

c) dve sú biele a tretia je čierna alebo modrá

C … dve sú biele a tretia je čierna alebo modrá

$n = C(3,20) = 1140$

$m = C(2,8).7 + C(2,8).5 = 336 \qquad P(C) = \frac{336}{1140} \doteq 0{,}2947$

Pr.

V klobúku je b bielych a c čiernych guliek. Určite pravdepodobnosť, že druhá vytiahnutá guľka je biela, ak sme prvú guľku:

a) vrátili

A … 1. sme vrátili

$n = V'(2, b+c) = (b+c)^2$

$[biela\ alebo\ čierna, biela] \qquad m = (b+c).b \qquad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{b.(b+c)}{(b+c)^2} = \frac{b}{b+c}$

b) nevrátili

B … 1. sme nevrátili

$n = V(2, b+c) = (b+c)(b+c-1)$

$[biela, biela]; [čierna, biela]$

$m = b.(b-1) + c.b = b.(b+c-1) \qquad P(B) = \frac{m}{n} = \frac{b.(b+c-1)}{(b+c).(b+c-1)} = \frac{b}{b+c}$

Pr.

Čo je pravdepodobnejšie, že v rodine s dvomi deťmi sú chlapec a dievča, alebo v rodine so štyrmi deťmi sú dvaja chlapci a dve dievčatá:

A …jeden chlapec a jedno dievča

$n_A = V'(2,2) = 2^2 = 4$

$[ch, d]; [ch, cd]; [d, d]; [d, ch] \qquad m_A = 2 \qquad P(A) = 0{,}5$

B … dvaja chlapci zo štyroch

$n_B = V'(4,2) = 2^4 = 16$

$m_B = C(2,4) = 6 \qquad P(B) = 0{,}375$

$P(A) > P(B)$

Pr.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že narodeniny dvanástich priateľov sú:

a) vo všetkých mesiacoch roka

A … vo všetkých mesiacoch

$n = V'(12,12) = 12^{12}$

$m = P(12) = 12! \qquad P(A) = \frac{m}{n} \doteq 0{,}00005$

- <u>podmienená pravdepodobnosť</u>

- je to pravdepodobnosť udalosti A, za podmienky, že nastala iná udalosť B

<u>Def.</u>

Podmienenou pravdepodobnosťou udalosti A, za podmienky B, kde $P(B) > 0$, nazývame číslo $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

<u>Pr.</u>

Hádžeme dvakrát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že padne súčet 8 a aká je pravdepodobnosť, že padne súčet 8, ak prvé bolo párne číslo:

a) A … súčet 8

$$n = V'(2,6) = 36$$
$$A = \{[2,6];[3,5];[4,4];[5,3];[6,2]\}$$
$$m = |A| = 5 \qquad P(A) = \frac{5}{36}$$

b) A … súčet 8
B … prvé je párne

$$B = \{[2,1];[2,2];\ldots;[2,6];[4,1];\ldots;[6,6]\}$$
$$n = |B| = 18$$
$$m = |A \cap B| = 3$$
$$P(A/B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

$$P(A/B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

<u>Pr.</u>

V telefónnej ústredni je 120 drôtov, z nich je 75 modrých a z nich je zapojených 54, všetkých zapojených drôtov je 80. Aká je pravdepodobnosť, že:

a) náhodne vybraný drôt je zapojený

A … náhodne vybraný drôt je zapojený

$$n = 120, m = 80 \qquad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$$

b) náhodne vybraný modrý drôt je zapojený

Z … náhodne vybraný drôt je zapojený
M … náhodne vybraný drôt je modrý

$$n = |M| = 75 \qquad P(M) = \frac{75}{120}$$
$$m = |Z \cap M| = 54 \qquad P(Z \cap M) = \frac{54}{120}$$
$$P(Z/M) = \frac{P(Z \cap M)}{P(M)} = \frac{54}{75} = 0{,}72$$

c) náhodne vybraný zapojený drôt je modrý

M … náhodne vybraný drôt je modrý
Z … náhodne vybraný drôt je zapojený

$$n = |Z| = 80 \qquad P(Z) = \frac{80}{120}$$
$$m = |M \cap Z| = 54 \qquad P(M \cap Z) = \frac{54}{120}$$
$$P(Z/M) = \frac{P(M \cap Z)}{P(Z)} = \frac{54}{80} = 0{,}675$$

Pr.

Dvaja hráči hádžu kockou. Zvíťazí ten, kto hodí väčšie číslo. Aká je pravdepodobnosť, že zvíťazí druhý hráč. Aká je pravdepodobnosť, že zvíťazí druhý hráč, ak prvý hodil 5:

a) A … druhý vyhrá

$$n = V'(2,6) = 36$$

$$A = \left\{ \begin{matrix} [1,2];[1,3];[1,4];[1,5];[1,6];[2,3];[2,4];[2,5];[2,6];[3,4];[3,5]; \\ [3,6];[4,5];[4,6];[5,6] \end{matrix} \right\}$$

$$m = 15 \qquad P(A) = \tfrac{m}{n} = \tfrac{15}{36} = \tfrac{5}{12}$$

b) A … druhý vyhrá

B … prvý hodil 5

$$P(A/B) = \tfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \tfrac{1}{6}$$

Pr.

Z 32 kariet sú 4 esá. Náhodne vyberieme dve karty, pričom prvú nevrátime. Aká je pravdepodobnosť, že:

a) druhá bude eso, ak prvá je eso

E_1 … prvá je eso

E_2 … druhá je eso

$[E,K]$ $\qquad$ $[E,E]$

$4.31 = 124 = n = P(E_1)$ $\qquad$ $4.3 = 12 = m = P(E_2 \cap E_1)$

$$P(E_2/E_1) = \tfrac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \tfrac{12}{124} = \tfrac{3}{31}$$

b) druhá bude eso

$[K_1, K_2]$ $\qquad$ $[E,E];[K,E]$

$32.31 = 992 = n$ $\qquad$ $4.3 + 28.4 = 124 = m$

$$P(E_2/E_1) = \tfrac{m}{n} = \tfrac{124}{992} = \tfrac{1}{8}$$

Pr.

Pre náhodný pokus platí: $P(B/A) = 0{,}216; P(A) = 0{,}9; P(B) = 0{,}45$. Určite $P(A/B)$:

$$P(B/A) = \tfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A)$$

$$P(A/B) = \tfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \tfrac{P(B/A).P(A)}{P(B)} = \tfrac{0{,}216\ .\ 0{,}9}{0{,}45} = 0{,}432$$

Pr.

Pre náhodný pokus platí $A \subset B$. Určite $P(B/A)$ a $P(A/B)$:

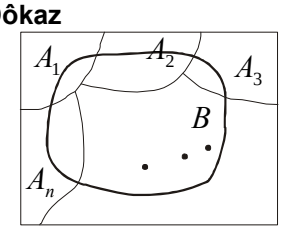
$$P(A) \le P(B) \qquad P(B/A) = \tfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \tfrac{P(A)}{P(A)} = 1 \qquad P(A/B) = \tfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \tfrac{P(A)}{P(B)}$$

Veta (o úplnej pravdepodobnosti)

Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú po dvoch nezlučiteľné udalosti, také že $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ a $P(A_i) > 0$. Nech je ďalej udalosť B, potom platí:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n)$$

Dôkaz



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

$$P(B/A_i) = \tfrac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} \rightarrow P(A_i \cap B) = P(B/A_i).P(A_i)$$

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n)$$

Pr.

Máme štyri klobúky. V prvom sú tri biele a dve čierne, v druhom sú dve biele a dve čierne, v treťom je jedna biela a štyri čierne a vo štvrtom je päť bielych a jedna čierna guľka.
Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná guľka je biela:

B … vytiahneme bielu

A_1 … vyberáme z prvého klobúka $P(A_1)=\frac{1}{4}$ $P(B/A_1)=\frac{3}{5}$

A_2 … vyberáme z druhého klobúka $P(A_2)=\frac{1}{4}$ $P(B/A_2)=\frac{1}{2}$

A_3 … vyberáme z tretieho klobúka $P(A_3)=\frac{1}{4}$ $P(B/A_3)=\frac{1}{5}$

A_4 … vyberáme zo štvrtého klobúka $P(A_4)=\frac{1}{4}$ $P(B/A_4)=\frac{5}{6}$

$$P(B)=P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)+P(A_3).P(B/A_3)+$$
$$+P(A_4).P(B/A_4)=\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{5}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{6}=\tfrac{8}{15}$$

- <u>nezávislé udalosti</u>

- dve udalosti A,B považujeme za nezávislé, ak nastanie jednej z nich neovplyvní pravdepodobnosť nastania druhej

- ináč povedané: dve udalosti A,B považujeme za nezávislé, ak pravdepodobnosť prvej nezávisí od toho či druhá nastala alebo nenastala

> ukážme si to na príklade:

Pr.

a) hádžeme dvomi kockami

A … na prvej padne číslo menšie ako 4

B … na druhej padne číslo väčšie ako 4

$\Omega=\{[1,1];[1,2];\ldots;[6,6]\}$

$n=|\Omega|=V'(2,6)$

$m_A=18$ $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

$m_B=12$ $P(A)=\frac{m_B}{n}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

- teraz uvažujme udalosť: $A\cap B$ … na prvej padne číslo menšie ako 4 a na druhej padne číslo väčšie ako 4

$m_{A\cap B}=|\{[1,5];[1,6];[2,5];[2,6];[3,5];[3,6]\}|=6$

$P(A\cap B)=\frac{m_{A\cap B}}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

b) hádžeme jednou kockou

A … padne párne číslo

B … padne prvočíslo

$n=6$

$m_A=3$ $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$m_B=3$ $P(A)=\frac{m_B}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

- teraz uvažujme udalosť:

$A\cap B$ … padne párne prvočíslo

$m_{A\cap B}=1$

$P(A\cap B)=\frac{m_{A\cap B}}{n}=\frac{1}{6}$ $P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$

Def.

Udalosti A, B sa nazývajú nezávislé, ak platí $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, v opačnom prípade sú závislé.

Dôkaz

$$P(A/B) = P(A)$$
$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

> dá sa zovšeobecniť pre n udalostí (napr. $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$; ...)

Veta

Nezlučiteľné udalosti sú závislé.

Dôkaz

A, B sú nezlučiteľné, tak platí $A \cap B = \theta$; potom $P(A \cap B) = 0$

> pravdepodobnosti $P(A)$ a $P(B)$ sú nezáporné a rôzne od nuly a teda:

$P(A \cap B) = 0 \neq P(A).P(B)$ ... udalosti A, B sú závislé

- ak sú nezávislé udalosti A, B, tak nezávislé sú aj udalosti A, B'; A', B a A', B'

Pr.

Dvaja strelci strieľajú na terč a zasahujú ho s pravdepodobnosťou 0,9 resp. 0,8. Aká je pravdepodobnosť, že:

a) obaja trafia

A ... prvý trafí ... $P(A) = 0{,}9$

B ... druhý trafí ... $P(B) = 0{,}8$

X ... obaja trafia > strieľajú nezávisle od seba

$X = A \cap B$ $P(X) = P(A).P(B) = 0{,}9.0{,}8 = 0{,}72$

b) aspoň jeden trafí

Y ... aspoň jeden trafí

$Y = A \cup B$ $P(Y) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}98$

Pr.

Dve rádiostanice prijímajú signály nezávisle od seba. Pravdepodobnosť príjmu signálu prvou stanicou je p_1 a druhou stanicou je p_2. Aká je pravdepodobnosť, že istý signál príjme aspoň jedna zo staníc:

A ... prvá príjme ... $P(A) = p_1$

B ... druhá príjme ... $P(B) = p_2$

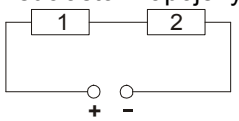
X ... aspoň jedna príjme

$X = A \cup B$ $P(X) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$

Pr.

Súčiastka má spoľahlivosť 0,8. Aká je spoľahlivosť systéme:

a) dvoch súčiastok zapojených sériovo



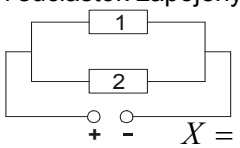
A ... prvá funguje

B ... druhá funguje

X ... obvod pracuje správne

$X = A \cap B$ $P(X) = P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}64$

b) dvoch súčiastok zapojených paralelne



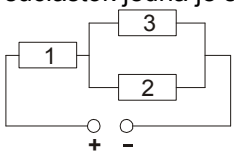
A ... prvá funguje

B ... druhá funguje

X ... obvod pracuje správne

$X = A \cup B$ $P(X) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}96$

c) troch súčiastok jedna je spojená sériovo s dvomi, ktoré sú zapojené paralelne



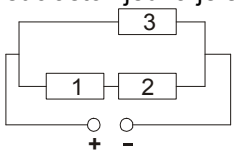
A … prvá funguje
B … druhá funguje
C … tretia funguje
X … obvod pracuje správne

$$X = A \cap (B \cup C)$$

$$P(X) = P(A \cap (B \cup C)) = P(A).[P(B) + P(C) - P(B \cap C)] =$$

$$= 0{,}8.(0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}64) = 0{,}8.0{,}96 = 0{,}768$$

d) troch súčiastok jedna je spojená paralelne s dvomi, ktoré sú zapojené sériovo



A … prvá funguje
B … druhá funguje
C … tretia funguje
X … obvod pracuje správne

$$X = (A \cap B) \cup C$$

$$P(X) = P((A \cap B) \cup C) = P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap B) \cap C) =$$

$$= 0{,}8.0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}8.0{,}8.0{,}8 = 0{,}928$$

Pr.

Strelec strieľa na terč a zasahuje ho s pravdepodobnosťou 0,8. Strieľa dovtedy, kým netrafí. Aká je pravdepodobnosť, že trafí najneskôr na tretí pokus:

A … trafí … $P(A) = 0{,}8$

X_i … trafí na i-ty pokus

X … trafí najneskôr na tretí pokus

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

$$P(X) = P(X_1) + P(X_2) + P(X_3)$$

$$X_1 = A_1 \ldots P(X_1) = P(A_1) = 0{,}8$$

$$X_2 = A_1' \cap A_2 \ldots P(X_2) = P\left(A_1' \cap A_2\right) =$$

$$= P\left(A_1'\right).P(A_2) = 0{,}2.0{,}8 = 0{,}16$$

$$X_3 = A_1' \cap A_2' \cap A_3 \ldots P(X_3) = P\left(A_1' \cap A_2' \cap A_3\right) =$$

$$= P\left(A_1'\right).P\left(A_2'\right).P(A_3) = 0{,}2.0{,}2.0{,}8 = 0{,}032$$

$$P(X) = 0{,}8 + 0{,}16 + 0{,}032 = 0{,}992$$

Pr.

Páni X a Y strieľajú proti sebe, v súboji na tri výstrely do prvého zásahu. $P(X) = 0{,}6$ a $P(Y) = 0{,}8$. Pán X začína, lebo Y ho urazil. Aká je pravdepodobnosť, že X vyhrá:

X … X trafí … $P(X) = 0{,}6$

Y … Y trafí … $P(Y) = 0{,}8$

A_1 … X vyhrá v prvom kole

A_2 … X vyhrá v druhom kole

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$P(A_1) = P(X) = 0{,}6$$

$$P(A_2) = P\left(X_1' \cap Y_1' \cap X_2\right) =$$

$$= P\left(X_1'\right).P\left(Y_1'\right).P(X_2) =$$

$$= 0{,}4.0{,}2.0{,}6 = 0{,}048$$

A_3 … X vyhrá v treťom kole

$$P(A_3) = P\left(X_1' \cap Y_1' \cap X_2' \cap Y_2' \cap X_3\right) =$$

$$= 0{,}4.0{,}2.0{,}4.0{,}2.0{,}6 = 0{,}00384$$

A … X vyhrá $\quad P(A) = 0{,}65184$

Pr.

V sto vreckách je po 1000 dukátov a z toho je vždy jeden falošný. Z každého vrecka vyberieme náhodne jeden dukát. Aká je pravdepodobnosť, že vyberieme falošný:

A_1 … vyberieme falošný z prvého vrecka … $P(A_1) = \frac{1}{1000}$

A_2 … vyberieme falošný z druhého vrecka … $P(A_2) = \frac{1}{1000}$

$\vdots$

A_{100} … vyberieme falošný zo stého vrecka … $P(A_{100}) = \frac{1}{1000}$

X … vyberieme aspoň jeden falošný

$X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}$

X' … nevyberieme ani jeden falošný

$X' = A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_{100}'$

$P(X') = P\left(A_1'\right).P\left(A_2'\right).\cdots.P\left(A_{100}'\right) = \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}$

$P(X) = 1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}$

Pr.

Máme n kľúčov, medzi nimi dva správne. Aká je pravdepodobnosť, že na i-ty pokus otvoríme:

A_i … otvoríme na i-ty pokus

$1, 2, \ldots, n$

$\overset{1.}{[n}, \overset{2.}{n-1}, \overset{3.}{n-2}, \ldots, \overset{i.}{n-i+1]}$ $\qquad$ $\overset{1.}{[n-2}, \overset{2.}{n-3}, \overset{3.}{n-4}, \ldots, \overset{(i-1).}{n-i}, \overset{i.}{2]}$

$n = n.(n-1).(n-2).\cdots.(n-i+1)$ $\qquad$ $m = (n-2).(n-3).\cdots.(n-i).2$

$P(A_i) = \frac{m}{n} = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$

Pr.

Čo je pravdepodobnejšie pri hode štyrmi kockami, že padne aspoň jedna 6, alebo že 3 nepadne ani na jednej:

A … padne aspoň jedna 6 $\qquad P(A) = 1 - P(A')$

B … nepadne žiadna 3 $\qquad P(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$

A' … nepadne žiadna 6 $\qquad P(A') = \left(\frac{5}{6}\right)^4$

$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \qquad P(A) > P(B)$

Pr.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že ak vytiahneme kartu z 52 kariet, bude to eso alebo srdcová karta:

A … karta bude eso … $P(A) = \frac{1}{4}$

B … karta bude srdcová … $P(B) = \frac{1}{13} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

X … karta bude eso alebo srdcová

$X = A \cup B$

$P(X) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$

Pr.

Uvažujme o náhodných udalostiach pri hode dvoma kockami:

A … aspoň na jednej kocke padne 6

B … súčet dvoch čísel, ktoré padli, je deliteľný tromi

C … na oboch padlo rovnaké číslo

Ktoré z troch dvojíc týchto udalostí sú nezávislé:

$$n = V'(2,6) = 36$$

$$m_A = |\{[1,6];[2,6];[3,6];[4,6];[5,6];[6,1];[6,2];[6,3];[6,4];[6,5];[6,6]\}|$$

$$m_A = 11 \qquad P(A) = \tfrac{11}{36}$$

$$m_B = |\{[1,2];[2,1];[1,5];[2,4];[3,3];[4,2];[5,1];[3,6];[4,5];[5,4];[6,3];[6,6]\}|$$

$$m_B = 12 \qquad P(B) = \tfrac{12}{36}$$

$$m_C = |\{[1,1];[2,2];[3,3];[4,4];[5,5];[6,6]\}|$$

$$m_C = 6 \qquad P(C) = \tfrac{6}{36}$$

X … aspoň na jednej kocke padne 6 a súčet dvoch čísel je deliteľný tromi

$X = A \cap B$

$$m_X = |\{[3,6];[6,3];[6,6]\}| = 3 \qquad P(X) = \tfrac{3}{36}$$

$P(A).P(B) = \frac{11}{36}.\frac{12}{36} = \frac{11}{108} > \frac{9}{108} = \frac{3}{36} = P(X) = P(A \cap B)$ … závislé

Y … aspoň na jednej kocke padne 6 a na oboch padlo rovnaké číslo

$Y = A \cap C$

$$m_Y = |\{[6,6]\}| = 1 \qquad P(Y) = \tfrac{1}{36}$$

$P(A).P(C) = \frac{11}{36}.\frac{6}{36} = \frac{11}{216} > \frac{6}{216} = \frac{1}{36} = P(Y) = P(A \cap C)$ … závislé

Z … súčet dvoch čísel je deliteľný tromi a na oboch padlo rovnaké číslo

$Z = B \cap C$

$$m_Z = |\{[3,3];[6,6]\}| = 2 \qquad P(Z) = \tfrac{2}{36}$$

$P(B).P(C) = \frac{12}{36}.\frac{6}{36} = \frac{1}{18} = \frac{2}{36} = P(Z) = P(B \cap C)$ … nezávislé

- <u>náhodné veličiny</u>

<u>Def.</u>

Náhodná veličina, prislúchajúca náhodnému pokusu s množinou všetkých možných výsledkov $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ je zobrazenie $f : \Omega \to R; \omega_i \mapsto f(\omega_i)$.

<u>Def.</u>

Stredná hodnota náhodnej veličiny $f : \Omega \to R; \omega_i \mapsto f(\omega_i)$ je reálne číslo

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} p_i . f(\omega_i).$$

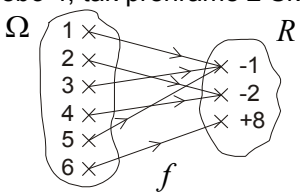
> p_i je pravdepodobnosť nastania ω_i

> teda platí: $E(f) = p_1 . f(\omega_1) + p_2 . f(\omega_2) + \cdots + p_n . f(\omega_n)$

> náhodné veličiny sa najlepšie zapisujú do tabuľky, ukážeme si to na príklade:

Pr.

Protihráčovi ponúkneme takúto hru. Ak kockou hodíme nepárne číslo, prehráme 1 Sk; ak hodíme 2 alebo 4, tak prehráme 2 Sk a ak hodíme 6, tak vyhráme 8 Sk. Je táto hra pre nás výhodná:



ω_i	1	2	3	4	5	6
$f(\omega_i)$	-1	-2	-1	-2	-1	8
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- máme n hier a teda priemer je:

$$\frac{\frac{n}{6}.(-1)+\frac{n}{6}.(-2)+\frac{n}{6}.(-1)+\frac{n}{6}.(-2)+\frac{n}{6}.(-1)+\frac{n}{6}.8}{n}=$$

$$=\frac{1}{6}.(-1)+\frac{1}{6}.(-2)+\frac{1}{6}.(-1)+\frac{1}{6}.(-2)+\frac{1}{6}.(-1)+\frac{1}{6}.8=$$

$$=E(f)=\frac{1}{6}$$

> je to pre nás výhodné, keďže v šestine prípadov vyhráme 8 Sk a v piatich šestinách prehráme 7 Sk, to máme +1 Sk

Pr.

Hráme nasledujúcu ruletu: vložíme do hry 8 Sk. Na bielej vyhráme 4 Sk, na čiernej 6 Sk a na modrej 12 Sk. Pravdepodobnosti padnutia farieb sú $P(b)=\frac{1}{2}; P(č)=\frac{1}{3}; P(m)=\frac{1}{6}$, je táto hra výhodná:

ω_i	b	$č$	m
$f(\omega_i)$	4	6	12
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$E(f)=\frac{1}{2}.4+\frac{1}{3}.6+\frac{1}{6}.12=6$$

- hra je nevýhodná vložíme 8 a priemerne vyhráme 6 Sk

- <u>rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny</u>

- majme náhodnú veličinu určenú tabuľkou:

ω_i	1	2	3	4	5	6
$f(\omega_i)$	-2	-2	-2	1	1	5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(f)=\frac{1}{6}.(-2)+\frac{1}{6}.(-2)+\frac{1}{6}.(-2)+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}.5=\frac{1}{6}$$

> ak ju upravíme nasledovne:

f_i	-2	1	5
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- dostaneme **tabuľku rozdelenia pravdepodobnosti** danej náhodnej veličiny

> a bude platiť:

$$E(f)=\frac{1}{2}.(-2)+\frac{1}{3}.1+\frac{1}{6}.5=\frac{1}{6}$$

<u>Def.</u>

Rozdelením pravdepodobnosti náhodnej veličiny f je sústava pravdepodobností $p_1, p_2, \ldots, p_n$, priradením hodnotám náhodnej veličiny f.

f_i	f_1	f_2	$\cdots$	f_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$E(f)=p_1.f_1+p_2.f_2+\cdots+p_n.f_n$$

- <u>Bernoulliho schéma</u>

<u>Def.</u>

Bernolliho schéma je náhodný pokus, ktorý spočíva v nezávislom opakovaní toho istého pokusu.

> napr.: päťkrát hodíme mincou, sedemkrát hodíme kockou, desaťkrát strieľame na terč, …

<u>Pr.</u>

Hádžeme sedemkrát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že práve trikrát padne 6:

A_i … padne 6 pri i-tom hode … $P(A_i) = \frac{1}{6}$

- tvoríme usporiadané sedmice (a - padla 6; n - nepadla 6)

$[a, a, a, n, n, n, n]$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4' \cap A_5' \cap A_6' \cap A_7'$ $\qquad \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^4$

$[a, n, a, n, a, n, n]$

$A_1 \cap A_2' \cap A_3 \cap A_4' \cap A_5 \cap A_6' \cap A_7'$ $\qquad \frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^4$

$\vdots$

> takýchto sedmíc je $C(3,7) = \binom{7}{3}$

X … práve trikrát padne 6 … $P(X) = \binom{7}{3}.\left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^4$

- pokus opakujeme n-krát, udalosť A má pravdepodobnosť p

X … udalosť A nastane práve k-krát … $P(X) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$

<u>Veta</u>

Nech A je udalosť s pravdepodobnosťou p. Potom pravdepodobnosť toho, že pri n-násobnom nezávislom opakovaní pokusu nastane udalosť A práve k-krát, kde $k \le n$ je:

$$P = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$$

<u>Pr.</u>

Strelec strieľa na terč a zasahuje ho s pravdepodobnosťou 0,8. Aká je pravdepodobnosť, že z piatich výstrelov trafí:

a) práve trikrát

A … trafí … $P(A) = 0{,}8$

X_3 … trafí práve trikrát

$$P(X_3) = \binom{5}{3}.0{,}8^3.0{,}2^2 = 10.0{,}512.0{,}04 = 0{,}2048$$

b) najviac trikrát

B … trafí najviac trikrát

B_0 … netrafí

B_1 … trafí práve jedenkrát

B_2 … trafí práve dvakrát

B_3 … trafí práve trikrát

$$B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$$
$$P(B) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$
$$P(B_0) = \binom{5}{0}.0{,}8^0.0{,}2^5 = 1.1.0{,}00032 = 0{,}00032$$
$$P(B_1) = \binom{5}{1}.0{,}8^1.0{,}2^4 = 5.0{,}8.0{,}0016 = 0{,}0064$$
$$P(B_2) = \binom{5}{2}.0{,}8^2.0{,}2^3 = 10.0{,}64.0{,}008 = 0{,}0512$$
$$P(B_3) = \binom{5}{3}.0{,}8^3.0{,}2^2 = 10.0{,}512.0{,}04 = 0{,}2048$$
$$P(B) = 0{,}26272$$

Pr.

Zistite, či je pravdepodobnejšie vyhrať s rovnocenným súperom vyhrať tri zo štyroch alebo päť z ôsmich hier:

A … vyhráme … $P(A) = 0{,}5$

X … vyhráme 3 zo 4

$$P(X) = \binom{4}{3}.0{,}5^3.0{,}5 = 4.0{,}5^4 = 0{,}25$$

Y … vyhráme 5 z 8

$$P(Y) = \binom{8}{5}.0{,}5^5.0{,}5^3 = 56.0{,}5^8 = 0{,}21875$$

> pravdepodobnejšie je, že vyhráme tri zo štyroch

Pr.

Študent dostal test s desiatimi otázkami, na každú je päť odpovedí, t toho jedna správna. Aká je pravdepodobnosť, že odpovie správne aspoň na päť otázok, ak je nepripravený:

A … uhádne … $P(A) = \frac{1}{5}$

X … aspoň päť uhádne

X_i … uhádne i otázok

$$X = X_5 \cup X_6 \cup X_7 \cup X_8 \cup X_9 \cup X_{10}$$
$$P(X) = P(X_5) + P(X_6) + P(X_7) + P(X_8) + P(X_9) + P(X_{10})$$
$$P(X_5) = \binom{10}{5}.\left(\tfrac{1}{5}\right)^5.\left(\tfrac{4}{5}\right)^5 \doteq 0{,}026424$$
$$P(X_6) = \binom{10}{6}.\left(\tfrac{1}{5}\right)^6.\left(\tfrac{4}{5}\right)^4 \doteq 0{,}0055$$
$$P(X_7) = \binom{10}{7}.\left(\tfrac{1}{5}\right)^7.\left(\tfrac{4}{5}\right)^3 \doteq 0{,}000629$$
$$P(X_8) = \binom{10}{8}.\left(\tfrac{1}{5}\right)^8.\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 \doteq 0{,}0000737$$
$$P(X_9) = \binom{10}{9}.\left(\tfrac{1}{5}\right)^9.\left(\tfrac{4}{5}\right)^1 \doteq 0{,}00000409$$
$$P(X_{10}) = \binom{10}{10}.\left(\tfrac{1}{5}\right)^{10}.\left(\tfrac{4}{5}\right)^0 \doteq 0{,}000000102$$
$$P(X) \doteq 0{,}0326$$

Pr.

Aká je pravdepodobnosť, že keď desaťkrát hodíme kockou, tak padne aspoň deväťkrát číslo menšie ako 3:

A … padne číslo menšie ako 3 … $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

X … padne aspoň deväťkrát číslo menšie ako 3

X_i … padne i-krát číslo menšie ako 3

$X = X_9 \cup X_{10}$

$P(X) = P(X_9) + P(X_{10})$

$P(X_9) = \binom{10}{9}.\left(\frac{1}{3}\right)^9.\left(\frac{2}{3}\right)^1 \doteq 0{,}000339$

$P(X_{10}) = \binom{10}{10}.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.\left(\frac{2}{3}\right)^0 \doteq 0{,}000016935$

$P(X) \doteq 0{,}000356$

Pr.

Z klobúka, v ktorom je deväť bielych a jedna čierna guľka, vyberieme náhodne guľku a vrátime ju späť. Koľkokrát treba tento pokus vykonať, aby pravdepodobnosť, že aspoň raz vytiahneme čiernu guľku, bola viac ako 0,9:

A … vytiahneme čiernu … $P(A)=\frac{1}{10}$

X … vytiahneme aspoň raz čiernu … $P(X) > 0{,}9$

X_i … i-krát vytiahneme čiernu

$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ - toto je prakticky nevypočítateľné, teda:

X' … nevytiahneme čiernu

$P(X') = \binom{n}{0}.\left(\frac{1}{10}\right)^0.\left(\frac{9}{10}\right)^n = \left(\frac{9}{10}\right)^n$

$P(X) = 1 - P(X') = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n = 1 - 0{,}9^n > 0{,}9$

$-0{,}9^n > -0{,}1$

$0{,}9^n < 0{,}1$

$n = 22$

$0{,}9^{22} \doteq 0{,}098477 < 0{,}1$

> pokus treba vykonať 22-krát

Pr.

Porovnajte pravdepodobnosti, že pri hode:

a) šiestimi kockami padne aspoň jedna 6
b) dvanástimi kockami padnú aspoň dve 6
c) osemnástimi kockami padnú aspoň tri 6

A … padne zo šiestich aspoň jedna 6

A' … nepadne 6

$n = 6, m' = 5 \quad P(A') = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \quad P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \doteq 0{,}665$

B … padnú z dvanástich aspoň dve 6

B' … padne najviac jedna 6 … $B' = X_0 \cup X_1$ … $P(B') = P(X_0) + P(X_1)$

X_0 … nepadne žiadna 6 … $P(X_0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{12}$

X_1 … padne práve jedna 6 … $P(X_1) = \binom{12}{1}.\left(\frac{1}{6}\right)^1.\left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 2.\left(\frac{5}{6}\right)^{11}$

$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 2.\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \doteq 0{,}6187$

C … padnú z osemnástich aspoň tri 6

C' … padnú najviac dve 6 … $C' = X_0 \cup X_1 \cup X_2$

$$P(C') = P(X_0) + P(X_1) + P(X_2)$$

X_0 … nepadne žiadna 6 … $P(X_0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{18}$

X_1 … padne práve jedna 6 … $P(X_1) = \binom{18}{1}.\left(\frac{1}{6}\right)^1.\left(\frac{5}{6}\right)^{17} = 3.\left(\frac{5}{6}\right)^{17}$

X_2 … padnú práve dve 6 … $P(X_2) = \binom{18}{2}.\left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)^{16}$

$$P(C) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{18} - 3.\left(\frac{5}{6}\right)^{17} - \binom{18}{2}.\left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \doteq 0{,}597$$

$P(A) > P(B) > P(C)$

Pr.

V každom z p vriec je d dukátov, z toho je f falošných. Z každého vreca náhodne vyberieme jeden. Aká je pravdepodobnosť, že medzi vybranými je x falošných:

A … vyberieme falošný … $P(A) = \frac{f}{d}$

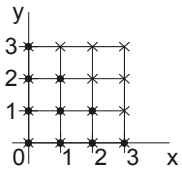
B … práve x falošných

$$P(B) = \binom{p}{x}.\left(\frac{f}{d}\right)^x.\left(1 - \frac{f}{d}\right)^{p-x}$$

- <u>geometrická pravdepodobnosť</u>

Pr.

V súradnicovej sústave je daný štvorec so stranou 3 cm (podľa obrázku). Aká je pravdepodobnosť, že spomedzi všetkých mrežových bodov štvorca vyberieme taký, ktorého súčet súradníc je najviac tri:

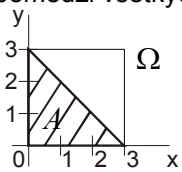


A … $x + y \le 3$

$n = 16, m = 10$ $\qquad P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

Pr.

V súradnicovej sústave je daný štvorec so stranou 3 cm (podľa obrázku). Aká je pravdepodobnosť, že spomedzi všetkých bodov štvorca vyberieme taký, ktorého súčet súradníc je najviac tri:



A … $x + y \le 3$

$n = \infty, m = \infty$ $\qquad \cancel{P(A) = \frac{\infty}{\infty}}$ > čo je nemožné

(nekonečne veľa bodov)

> to nás privádza ku pojmu geometrickej pravdepodobnosti $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1}{2}$

<u>Def.</u>

Pravdepodobnosť udalosti A, že náhodne zvolený bod geometrického útvaru Ω patrí do geometrického útvaru $A; A \subset \Omega$ je číslo $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$, kde m je geometrická miera (dĺžka, obsah, objem).

Pr.

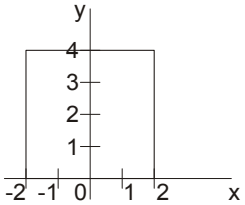
Medzi miestami X, Y vzdialenými 3 km je prerušené telefónne vedenie. Aká je pravdepodobnosť, že porucha (P) je najviac 500 m od X alebo od Y:

$$A \ldots |XP| \leq 0{,}5 \vee |YP| \leq 0{,}5$$

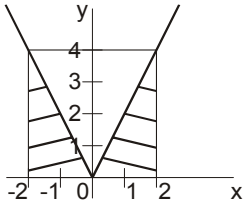
$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{1}{3}$$

Pr.

Zo štvorca so stranou a (podľa obrázka), náhodne vyberieme bod. Aká je pravdepodobnosť, že pre jeho súradnice platí: a) $y \leq 2|x|$ b) $y \leq x^2$

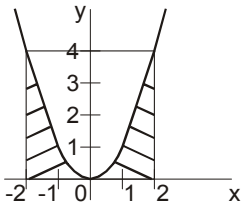


a) $A \ldots y \leq 2|x|$



$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

b) $B \ldots y \leq x^2$



$$S(B) = 2.\int_0^2 x^2\,dx = 2.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

$$P(B) = \frac{S(B)}{S(\Omega)} = \frac{1}{3}$$

Pr.

V klobúku je päť bielych guliek. Koľko treba pridať čiernych, aby pravdepodobnosť, že pri vytiahnutí dvoch, bez vrátenia, budú obe čierne bola aspoň 0,5:

$A \ldots$ vytiahneme obe čierne … $P(A) \geq \frac{1}{2}$

$5b, k\check{c}$

$$n = C(2, k+5) = \frac{(k+5)!}{(k+3)!.2!} = \frac{(k+5)(k+4)}{2}$$

$$m = C(2, k) = \frac{k!}{(k-2)!.2!} = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{k(k-1)}{(k+5)(k+4)} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{k(k-1)}{(k+5)(k+4)} \geq \frac{1}{2}$$

$$2k^2 - 2k \geq k^2 + 9k + 20$$

$$k^2 - 11k - 20 \geq 0$$

$$k^2 - 11k - 20 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 201 \qquad k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad k_1 \doteq 12{,}59; k_2 \doteq -1{,}59$$

$$k \geq 13$$

- treba pridať aspoň 13 čiernych guliek

- <u>štatistika</u>

- existujú dve štatistiky: 1. opisná
  2. matematická

- vznikla z úradného zisťovania a politickej aritmetiky
  > veda o **zisťovaní stavu** (status = stav)

- ako veda vznikla v 19. storočí > sčítanie ľudí

- dnes štatistiku chápeme ako vedu, ktorá skúma zákonitosti hromadných javov, ktoré nastávajú pri veľkom počte objektov

- napr.: 1. zo 100000 žiaroviek treba zistiť priemernú dobu svietivosti
  > je zrejmé, že takéto skúmanie je zdĺhavé a nákladné, ale štatistika má metódy, ktorými sa to dá zistiť
  2. chceme zistiť, koľko obyvateľov má modré oči
  > preskúmať všetkých by bolo nákladné, ale štatistika má metódy ako vybrať vzorku ľudí, ktorá sa preskúma a poskytne údaje o všetkých obyvateľoch

- základná **úloha štatistiky** je: Je daná množina objektov, je nemožné alebo drahé preskúmať všetky objekty. Úlohou je vypracovať metódy ako vybrať a preskúmať vzorku objektov, aby sme získali výsledky platné pre celú množinu.

- <u>opis štatistického súboru</u>

<u>Def.</u>
Štatistický súbor je konečná neprázdna množina.

<u>Def.</u>
Počet prvkov štatistického súboru sa nazýva rozsah súboru.

- zvyčajne je to veľká konečná množina

<u>Def.</u>
Prvky štatistického súboru sa nazývajú štatistické jednotky.

- štatistický súbor skúmame z hľadiska istého znaku

- sú dva **druhy znakov**: 1. **kvantitatívne** - farba očí, farba vlasov, …
  2. **kvantitatívne** (možno ich merať) - výška, hmotnosť, počet detí, …

<u>Def.</u>
Zisťovanie hodnoty istého znaku v štatistickom súbore sa nazýva štatistické skúmanie.

- výsledky štatistického skúmania sa zapisujú do **prvotnej tabuľky**
  > napr.: skúmame výšku žiakov v triede

štatistická jednotka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
výška	185	175	175	170	190	185	180	170	180	185	180	170	170	180

- pri spracovaní výsledkov štatistického zisťovania sa namiesto prvotnej tabuľky používa **tabuľka rozdelenia početnosti**

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	- hodnoty znaku
n_i	n_1	n_2	n_3	$\cdots$	- absolútna početnosť x_i

> ďalej môžeme určiť podielom $\frac{n_i}{n}$ relatívnu početnosť hodnoty x_i
(n je rozsah súboru)

> v našom prípade to bude:

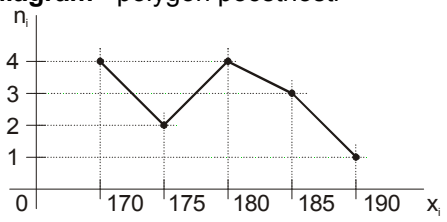
x_i	170	175	180	185	190
n_i	4	2	4	3	1
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$

- <u>znázorňovanie štatistických údajov</u>

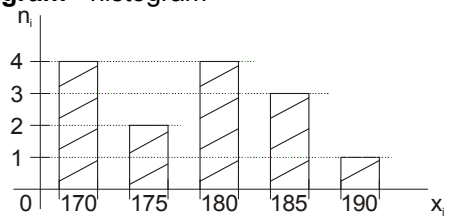
- výsledky štatistického skúmania sa často znázorňujú graficky

- najčastejšie sa používajú:

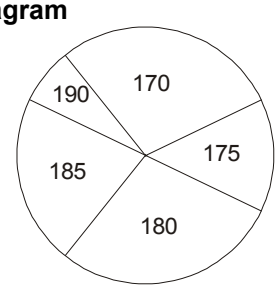
1. **spojnicový diagram** - polygón početnosti



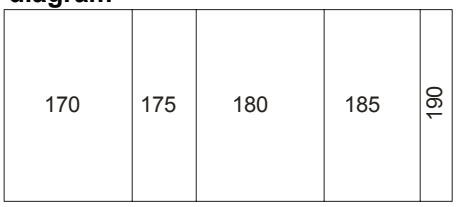
2. **stĺpcový diagram** - histogram



3. **kruhový diagram**



4. **obdĺžnikový diagram**



- <u>štatistické charakteristiky</u>

<u>Def.</u>
Štatistické charakteristiky sú čísla, ktoré charakterizujú štatistický súbor z istého hľadiska.

- najčastejšie sa používajú:

1. **charakteristiky polohy** (charakterizujú súbor z hľadiska veľkosti hodnôt znaku)
2. **charakteristiky variability** (charakterizujú súbor z hľadiska premenlivosti hodnôt znaku)

- <u>charakteristiky polohy</u>

- sú to:

1. **modus**
2. **medián**
3. **aritmetický priemer**
4. **geometrický priemer**
5. **harmonický priemer**

<u>Def. 1</u>

Modus znaku x je tá hodnota znaku x, ktorá má najväčšiu absolútnu početnosť.

- označujeme ho $\mathrm{Mod}(x) = \hat{x}$

> v našom prípade (výška žiakov) to budú: $\hat{x} = 170, \hat{x} = 180$

<u>Def. 2</u>

Medián znaku x je prostredná hodnota spomedzi hodnôt znaku x, usporiadaných podľa veľkosti.

- označujeme ho $\mathrm{Med}(x) = \tilde{x}$

> v našom prípade (výška žiakov) to bude:
170,170,170,170,175,175,<u>180</u>,<u>180</u>,180,180,185,185,185,190

$$\tilde{x} = \frac{180+180}{2} = 180$$

<u>Def. 3</u>

Aritmetický priemer čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je číslo $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

<u>Def.</u>

Vážený aritmetický priemer čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s váhami $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je číslo

$\bar{x} = \frac{v_1 . x_1 + v_2 . x_2 + \cdots + v_n . x_n}{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}$.

<u>Pr.</u>

Zmiešali sme 7 kg kávy po 250 Sk a 3 kg kávy po 300 Sk. Aká by mala byť výsledná cena:

- keby počítame len aritmetický priemer, tak dostaneme $c = \frac{250+300}{2} = 275$

> čo by bolo nepresné, keďže máme rozdielne hmotnosti káv

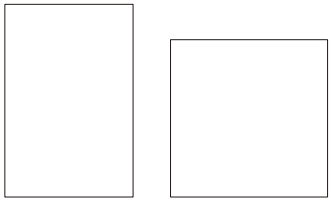
> teda musíme použiť vážený aritmetický priemer:

$$c = \frac{7.250+3.300}{10} = 265$$

<u>Def. 4</u>

Geometrický priemer čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ je číslo $\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . \cdots . x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$

- ak máme obdĺžnik so stranami a, b a chceme mať štvorec s rovnakým obsahom

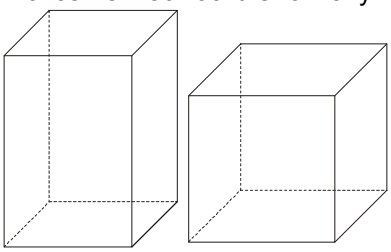


$S_o = S_š$

$ab = \bar{x}^2$

$\sqrt{ab} = \bar{x}$

-ak máme kváder so stranami a, b, c a chceme mať kocku s rovnakým objemom



$V_{KV} = S_{KO}$

$abc = \bar{x}^3$

$\sqrt[3]{abc} = \bar{x}$

Def. 5

Harmonický priemer čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, rôznych od nuly, je číslo $\bar{x}_H = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$

$x, y > 0$

$\bar{x}_A = \frac{x+y}{2}$ $\qquad \bar{x}_G = \sqrt{xy}$ $\qquad \bar{x}_H = \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Veta

$\forall\, x, y \in R^+ : \bar{x}_A \geq \bar{x}_G \geq \bar{x}_H$

$\forall\, x, y \in R^+ : \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Dôkaz

1. $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ … AG nerovnosť

$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$ … platí druhá mocnina je vždy kladná

$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

2. $\sqrt{xy} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ … GH nerovnosť

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ … platí (AG nerovnosť)

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$x + y \geq \frac{2\sqrt{xy}^2}{\sqrt{xy}}$

$(x+y)\sqrt{xy} \geq 2xy$

$\sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$

$\sqrt{xy} \geq \dfrac{2}{\frac{x+y}{xy}}$

$\sqrt{xy} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Veta

$\forall\, x, y, z \in R^+ : \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \geq \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

Veta

$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^+ : \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \geq \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$

Pr.

Dokážte, že platí:

a) $\forall x \in R^+ : x + \frac{1}{x} \geq 2$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$
$$y = \frac{1}{x}$$
$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x.\frac{1}{x}}$$
$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{1}$$
$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

b) $\forall x, y \in R^+ : xy = 1 \Rightarrow x + y \geq 2$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{1}$$
$$x + y \geq 2\sqrt{1}$$
$$x + y \geq 2$$

c) $\forall x, y \in R^+ : (x + y).\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$
$$x + y \geq \frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$
$$(x + y).\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$$

- <u>charakteristiky variability (premenlivosti)</u>

- hovoria ako sú hodnoty znaku rozmiestnené okolo charakteristiky polohy

- sú to:
  1. **variačné rozpätie**
  2. **smerodajná odchýlka**
  3. **stredná odchýlka**

<u>Def. 1</u>

Variačné rozpätie čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je číslo $R = x_{\max} - x_{\min}$ (rozdiel najväčšieho a najmenšieho rozpätia znaku), kde $x_{\max} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; x_{\min} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

<u>Def. 2</u>

Smerodajná odchýlka čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je číslo $\sigma(x) = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$.

<u>Def.</u>

Disperzia (rozptyl) čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je číslo $D = \sigma^2(x) = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$.

<u>Def. 3</u>

Stredná odchýlka čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je číslo $\delta(x) = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\cdots+|x_n-\bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{n}$.

Pr.

Vypočítajte aritmetický priemer, modus, medián, smerodajnú odchýlku, disperziu a strednú odchýlku znaku. Ktorý päťkrát nadobúda hodnotu 2, osemkrát hodnotu 7, jedenkrát hodnotu 10 a trikrát hodnotu 12:

2, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 10, 12, 12, 12

$$\hat{x} = 7$$

$$\tilde{x} = 7$$

$$\bar{x} = \frac{5.2+8.7+10+3.12}{17} \doteq 6{,}59$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{5.(2-6{,}59)^2+8.(7-6{,}59)^2+(10-6{,}59)^2+3.(12-6{,}59)^2}{17}} \doteq 3{,}48$$

$$D = 12{,}12$$

$$\delta(x) = \frac{5.|2-6{,}59|+8.|7-6{,}59|+|10-6{,}59|+3.|12-6{,}59|}{17} = 2{,}698$$

Veta

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.\bar{x}^2}{n}$$

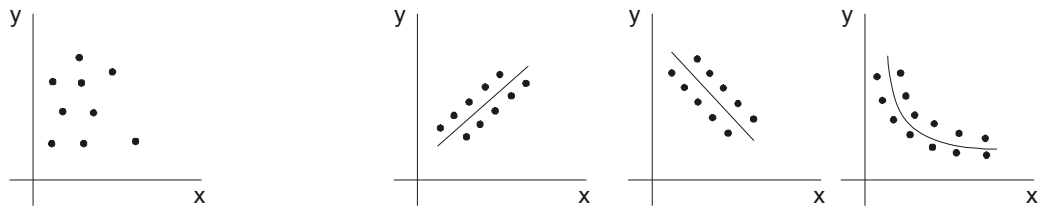
Dôkaz

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\left(x_1^2-2x_1\bar{x}+\bar{x}^2\right)+\left(x_2^2-2x_2\bar{x}+\bar{x}^2\right)+\cdots+\left(x_n^2-2x_n\bar{x}+\bar{x}^2\right)}{n} =$$

$$= \frac{\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)-2\bar{x}\overbrace{(x_1+x_2+\cdots+x_n)}^{n\bar{x}}+n.\bar{x}^2}{n} = \frac{\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)-2n.\bar{x}^2+n.\bar{x}^2}{n} = \frac{\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)-n.\bar{x}^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.\bar{x}^2}{n}$$

- <u>štatistická závislosť znakov</u>



- znaky x, y sú nezávislé - znaky x, y sú závislé

Def.

Mierou stupňa závislosti dvoch znakov x, y je koeficient korelácie r.

$$r = \frac{k}{\sigma(x).\sigma(y)}$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}.\bar{y}$$

Neriešené úlohy

1. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode piatimi kockami:
a) padne práve jedna šestka b) padne aspoň jedna šestka c) nepadne šestka

2. Spomedzi 32 kariet vyberieme tri. Aká je pravdepodobnosť, že:
a) všetky tri budú červené b) všetky tri budú rovnakej farby

3. Z 32 kariet vyberieme päť. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú práve tri zelené?

4. Spomedzi všetkých trojciferných čísel náhodne vyberieme jedno. Aká je pravdepodobnosť, že:
a) má rôzne číslice b) obsahuje číslicu 9 c) neobsahuje číslicu 9

5. V krabici je desať výrobkov, z nich tri nepodarky. Aká je pravdepodobnosť, že keď náhodne vyberieme päť výrobkov, budú medzi nimi:
a) práve dva nepodarky b) najviac dva nepodarky c) aspoň dva nepodarky

6. V krabici je n výrobkov, z ktorých je m dobrých. Aká je pravdepodobnosť, že ak náhodne vyberieme k výrobkov (k < n), bude z nich práve l dobrých (l < m)?

7. V urne je 6 bielych a 5 červených gúľ. Náhodne vyberieme naraz 3 gule. Aká je pravdepodobnosť, že:
a) všetky sú biele b) jedna je biela a dve sú červené

8. V lotérii je 1 000 žrebov, z ktorých 20 vyhráva. Aká je pravdepodobnosť, že keď si kúpime dva žreby:
a) na oba vyhráme b) práve na jeden vyhráme c) nevyhráme

9. Máme takú nehomogénnu kocku, že pravdepodobnosť padnutia istého čísla je priamo úmerná tomu číslu. Aká je pravdepodobnosť, že padne nepárne číslo?

10. Dve nezávislé udalosti A, B nastávajú s pravdepodobnosťami $P(A) = 0{,}8; P(B) = 0{,}9$ **. Aká je pravdepodobnosť, že:**
a) nenastane A b) nastane aspoň jedna z udalostí A, B
c) nastane práve jedna z udalostí A, B d) nenastane žiadna z udalostí A, B

11. Dvaja strelci strieľajú na terč a zasahujú ho s pravdepodobnosťou 0,8 a 0,9. Aká je pravdepodobnosť, že:
a) obaja trafia b) aspoň jeden trafí c) práve jeden trafí

12. Strelec strieľa na terč a zasahuje ho s pravdepodobnosťou 0,8. Aká je pravdepodobnosť, že zo 6 výstrelov trafí:
a) práve trikrát b) najviac dvakrát, c) aspoň trikrát

13. Je pravdepodobnejšie vyhrať s rovnocenným súperom 3 hry zo 4 alebo 5 hier z 8?

14. Test obsahuje desať otázok, ku každej sú štyri možné odpovede, práve jedna je správna. Na úspešné absolvovanie skúšky treba správne odpovedať aspoň na sedem otázok. Aká je pravdepodobnosť, že úplne nepripravený uchádzač urobí skúšku?

29. TEÓRIA GRAFOV

1. Základné pojmy
- pojem grafu, vrcholy, hrany
- obyčajný graf
- stupeň vrcholu a jeho vlastnosti
- kompletný graf

2. Súvislosť grafov
- sled
- súvislý graf
- komponent
- kružnica, strom, kostra grafu

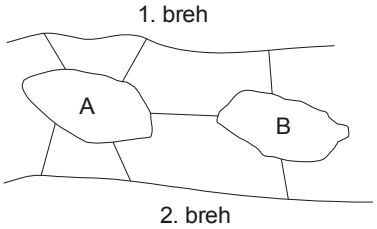
3. Eulerovské a hamiltonovské grafy

4. Rovinné grafy
- pojem rovinného grafu, mapa
- Kuratowského veta
- Eulerova veta

5. Aplikácie teórie grafov
- problém minimálnej kostry
- úloha o maximálnom toku
- problém poštára
- problém obchodného cestujúceho
- sieťová analýza, metóda kritickej cesty

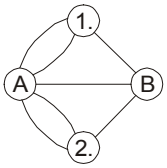
……

- 1736 - problém siedmych mostov mesta Královec (Königsberg, Východné Prusko /teraz Kaliningrad patriaci Rusku/)



- treba prejsť po všetkých mostoch, ale po každom práva raz

- Euler zistil, že to nie je možné



> nedá sa nakresliť jedným ťahom

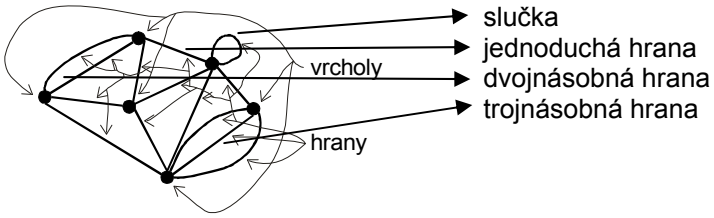
- 1840 - problém štyroch farieb - či sa dajú vyfarbiť štyrmi farbami oblasti, aby nemali susedné rovnakú farbu

> vyriešili ho v 1976 Appel a Hacken (dá sa)

- ďalej bol problém troch domov a troch studní - či môžu chodiť traja ľudia do troch studní, tak aby sa nestretli - nedá sa (Kirchhoff 1847, Cayley 1857)

- v dvadsiatom storočí sa teórii grafov venoval König

- <u>základné pojmy</u>



<u>Opis</u> (nemožno ho definovať)

Graf G je objekt, tvorený dvoma množinami:

1. množinou V - prvky sú vrcholy (označujeme ich veľkými písmenami)
   > ich počet označíme v
2. množinou H - prvky sú hrany (označujeme ich malými písmenami)
   > ich počet označíme h

<u>Def.</u>

Graf je konečný ak má konečný počet vrcholov a konečný počet hrán.

<u>Veta</u>

Sú tri druhy hrán:

1. jednoduché (jediná hrana, ktorá spája dva vrcholy)
2. násobné (viac ako jedna hrana spája dva vrcholy)
3. slučka (spája vrchol sám so sebou)

<u>Def.</u>

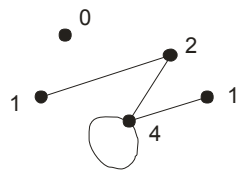
Graf je obyčajný ak neobsahuje ani slučky, ani násobné hrany.

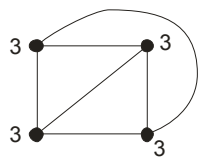
- <u>stupeň vrcholu</u>

<u>Def.</u>

Stupeň vrcholu je počet hrán, ktoré sú s vrcholom incidentné, pričom slučku rátame dvakrát.

- označujeme ho $st(A)$





<u>Def.</u>

Vrchol stupňa nula sa nazýva izolovaný vrchol.

<u>Def.</u>

Graf je pravidelný ak všetky jeho vrcholy majú rovnaký stupeň.

<u>Veta</u>

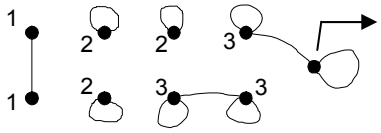
V každom grafe sa súčet stupňov vrcholov rovná dvojnásobku počtu hrán.

$$\boxed{\sum st(A_i) = 2h}$$

Dôkaz

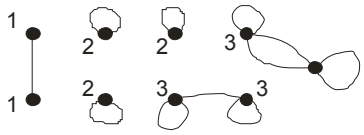
1. $h = 0 \ldots \sum st(A_i) = 0 = 2.0 = 2h$ … platí
2. nech graf s h hranami má $\sum st(A_i) = 2h$ pridajme jednu hranu máme $h+1$, zrejme sa suma stupňov vrcholov zvýši o 2 $\sum st(A_i) = 2h + 2 = 2(h+1)$ … platí

- skúsme zostrojiť graf, ktorého stupne vrcholov sú: $1,1,2,2,2,3,3,3,4$



aby sme v tomto vrchole dostali stupeň 4, musíme pridať ešte jednu hranu, ale ako, keď sa nám buď zväčší stupeň o dva alebo sa nám zväčší stupeň iného vrcholu, ale tie už máme tak ako majú byť > **nedá sa zostrojiť**

- ale graf $1,1,2,2,2,3,3,4,4$ už zostrojiť vieme:



> to nás privádza k nasledovnej vete:

Veta

Ak n je prirodzené číslo a ak $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sú také prirodzené čísla, že platí $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ je párne číslo, tak existuje graf s n vrcholmi stupňov $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Dôkaz

Nech $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$, potom z čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n$ je nepárnych čísel párny počet.

Graf zostrojíme tak, že:

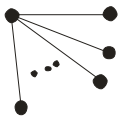
1. ak má vrchol párny stupeň, tak v ňom robíme slučky
2. ak má nepárny, tak robíme v ňom slučky a spojíme ho jednou hranou s iným vrcholom nepárneho stupňa

Veta

V obyčajnom grafe je stupeň každého vrcholu menší ako počet vrcholov.

Dôkaz

- vidno, že toto tvrdenie je pravdivé, keďže obyčajný graf neobsahuje násobné hrany a slučky
- nech graf má n vrcholov, každý vrchol môžeme spojiť najviac s $n-1$ vrcholmi a teda platí: $st(A_i) \le n-1$ a odtiaľ hneď vidno, že platí: $st(A_i) < n$



Veta

V obyčajnom grafe nemôžu byť stupne vrcholov rôzne čísla.

Dôkaz

- majme obyčajný graf G s n vrcholmi, pre jeho stupne máme tieto možnosti:

$0,1,2,\ldots,n-1$ - je ich n, ale možnosti 0 a $n-1$ sa navzájom vylučujú a teda máme $n-1$ možností pre n vrcholov > dva majú rovnaký stupeň

Def.

Kompletný graf je obyčajný graf, v ktorom sú každé dva vrcholy spojené hranou

- zoberme si graf $4,3,2,2,2,1$ a odstráňme štyri hrany:

$$\underline{4},3,2,2,2,1$$

$$2,1,1,1,1$$

- nový graf sa dá zostrojiť, tak že sa musí dať zostrojiť aj ten pôvodný

Veta

Sú dané celé čísla $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n > 0; 0 < s_1 < n$. Graf s n vrcholmi typu $s_1, s_2, \ldots, s_n$ existuje práve vtedy, keď existuje graf s $n-1$ vrcholmi typu $s_2 - 1, s_3 - 1, \ldots, s_{s_1} - 1, s_{s_1+1}, \ldots, s_n$.

Pr.

Rozhodnite, či existuje graf typu $7,5,5,4,4,3,3,3,3,2,1$:

$$\underline{7}|5,5,4,4,3,3,3,|\ 3,2,1$$
$$4,4,3,\ 3,2,2,2,\ 3,2,1$$
$$\underline{4}|4,3,3,3,|\ 2,2,2,2,1$$
$$\underline{3}|2,2,2,|2,2,2,2,1$$
$$1,\ 1,\ 1,\ 2,2,2,2,1$$
$$2,2,2,2,1,1,1,1$$

> existuje

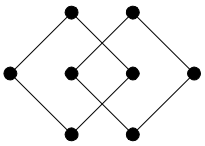
Pr.

V triede je 25 žiakov, je možné, aby mal každý práve 5 priateľov:

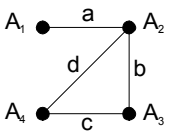
- bude to obyčajný graf, teda súčet stupňov vrcholov musí byť párny

$\sum st(A_i) = 5.25 = 125 \neq 2k$ > nie je to možné

- súvislosť grafov



nesúvislý



súvislý $A_1 a A_2 b A_3 c A_4$ - sled

- z jedného vrcholu do druhého sa môžeme dostať iba po hrane

Def.

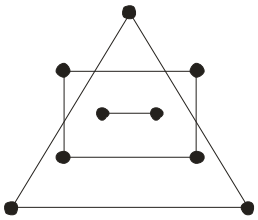
Sled z vrcholu A_0 do vrcholu A_n je postupnosť $A_0 h_1 A_1 h_2 A_2 \ldots A_{n-1} h_n A_n$, kde $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sú vrcholy a $h_0, h_1, \ldots, h_n$ sú hrany, pričom hrana h_i je incidentná s vrcholmi A_{i-1}, A_i.

Def.

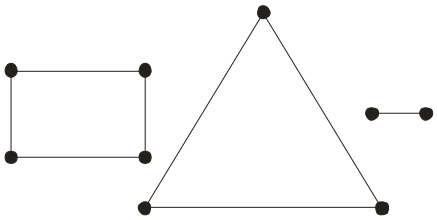
Graf sa nazýva súvislý ak medzi každými jeho dvoma vrcholmi existuje sled, ináč je nesúvislý.

- sú tri druhy sledov:

1. **cesta** - je to sled, v ktorom sa žiadny vrchol nevyskytuje dvakrát
2. **ťah** - je to sled, v ktorom sa žiadna hrana nevyskytuje dvakrát
3. **sled** - nie je ani cesta, ani ťah



nesúvislý



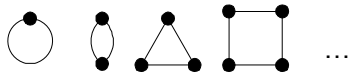
každá časť je súvislá

Def.

Maximálna súvislá časť nesúvislého grafu sa nazýva komponent.

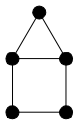
Def.

Kružnica je súvislý graf, ktorého všetky vrcholy majú stupeň 2.



…

- uvažujme takýto graf:

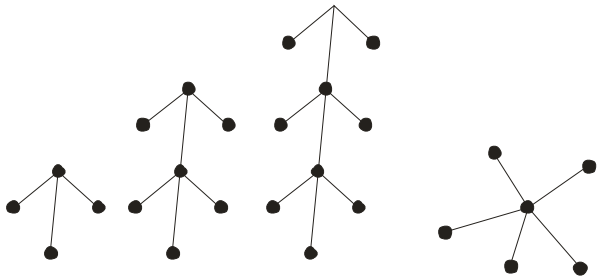


- je zrejmé, že nie je kružnica, ale obsahuje časti, ktoré kružnicou sú

- v kružnici sa počet vrcholov rovná počtu hrán

Def.

Súvislý graf neobsahujúci kružnicu sa nazýva strom.



strom les hviezda (je to typ strom)

Veta

Každý strom aspoň s dvoma vrcholmi má aspoň dva vrcholy prvého stupňa.

Dôkaz

- tvrdenie zrejme platí, ak by neboli dva vrcholy stupňa 1, tak by graf obsahoval kružnicu, čo nie je možné

had

Veta

Ak má strom v vrcholov, tak má $v-1$ hrán.

Dôkaz

$\forall v \in N : h(v) = v - 1$

1. $v = 1 \ldots h(1) = 0 = 1 - 1$ platí
2. $\forall v \in N : h(v) = v - 1 \Rightarrow h(v+1) = v$

- aj toto zrejme platí, lebo ak chceme pridať stromu vrchol tak, aby zostal stromom, môžeme pridať iba vrchol stupňa 1

- <u>kostra grafu</u>

Veta

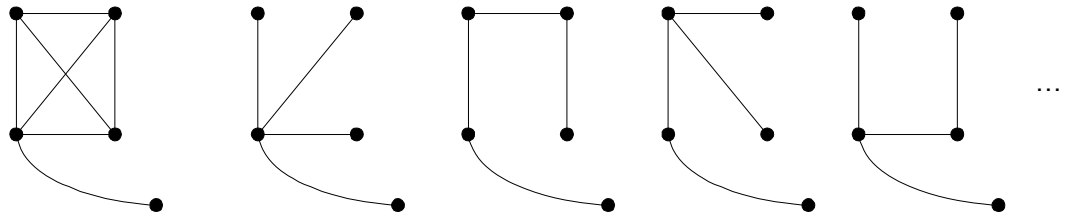
Odstránenie hrany neporuší súvislosť grafu práve vtedy, keď hrana leží na kružnici.

Dôkaz

1. ak odstránenie hrany neporuší súvislosť, tak leží na kružnici
   - ak sa neporuší súvislosť, tak musí byť ďalšia cesta, teda hrana leží na kružnici
2. ak hrana leží na kružnici, tak jej odstránenie neporuší súvislosť
   - hrana je na kružnici a teda existuje aj ďalšia cesta, to znamená, že sa neporuší súvislosť

Def.

Kostra grafu je strom, ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu, ale len niektoré hrany.



graf kostry grafu

> každý graf má viacej kostier (ani v tomto prípade nemáme nakreslené všetky, pozorný čitateľ si ich dokáže nekresliť sám)

Veta

Každý súvislý graf má kostru.

Dôkaz

- nech graf G je súvislý, potom máme dve možnosti:

G

- je strom → KOSTRA
- nie je strom (teda má kružnicu a môžeme odstrániť hranu)
  - je strom → KOSTRA
  - nie je strom (teda má kružnicu a môžeme odstrániť hranu)
    ⋮
    > takto pokračujeme ďalej, pokým graf nemá kružnicu a bude strom, ale teda je aj kostrou

Veta

Ak graf G je súvislý graf s v vrcholmi, tak pre jeho počet hrán platí $h \geq v-1$.

Dôkaz

- graf G je súvislý a teda má kostru, tá je stom a pre strom s v vrcholmi platí, že ak má strom v vrcholov, tak má $v-1$ hrán

  > a dostávame $h \geq v-1$

Pr.

Volejbalová sieť má 110 x 12 ôk. Koľkokrát môžeme do nej zastrihnúť, aby sa nerozpadla:

- sieť môžeme považovať za súvislý graf, a teda má kostru:

vrcholov je … $v = 111.13 = 1443$

hrán je … $h = 12.111 + 13.110 = 2762$

počet hrán, ktoré musia zostať je … $h_z \geq v-1$

$h_z = 1442$

> odstrániť môžeme $h - h_z = 2762 - 1442 = 1320$ hrán

- Eulerovské grafy

Def,

Ťah obsahujúci všetky hrany grafu sa nazýva eulerovský ťah:

1. **otvorený** eulerovský ťah
   - skončí v inom vrchole ako začal
2. **uzavretý** eulerovský ťah
   - skončí v tom istom vrchole, kde začal

Def.

Graf, ktorý obsahuje uzavretý eulerovský ťah sa nazýva Eulerovský graf.

Veta

Súvislý graf možno nakresliť jedným ťahom práve vtedy, keď obsahuje práve dva alebo žiadny vrchol nepárneho stupňa.

Dôkaz

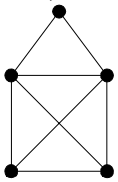
1. ak sa dá nakresliť jedným ťahom, tak má dva alebo žiadny vrchol nepárneho stupňa
   - dá sa nakresliť jedným ťahom:
   a) otvorený - tam kde začneme a skončíme je vrchol nepárneho stupňa … dva vrcholy nepárneho stupňa
   b) uzavretý - končíme v tom istom vrchole ako začneme … žiadny vrchol nepárneho stupňa
2. ak má dva alebo žiadny vrchol nepárneho stupňa, tak sa dá nakresliť jedným ťahom
   - má dva vrcholy nepárneho stupňa - otvorený eulerovský ťah
   - nemá vrchol nepárneho stupňa – uzavretý eulerovský ťah

- ľahká pomôcka pri zisťovaní toho, ako nakresliť graf jedným ťahom je:
  - začneme vo vrchol a ideme po hrane (ak má dva nepárneho stupňa, začneme v jednom z nich)
  - prídeme do ďalšieho vrcholu, ktorý leží na tej kružnici po ktorej sme do neho prišli, ale aj na inej a tak prejdeme na ňu (jednoduchšie povedané: ak narazím na novú kružnicu, tak idem po nej)
  - ak sa dostaneme ku takej kružnici, na ktorej sme už boli, tak ju dokončíme a pokračujeme na ďalšej
    > ukážeme si to na pár príkladoch

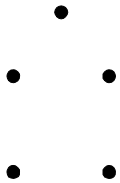
Pr.

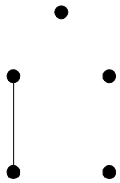
Rozhodnite, či sa dá graf nakresliť jedným ťahom, ak áno ako:

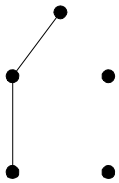
a)

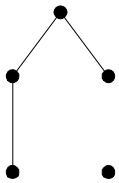


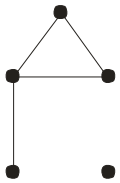
- má dva vrcholy nepárneho stupňa a teda sa dá nakresliť otvoreným eulerovským ťahom

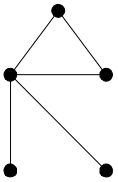
1.


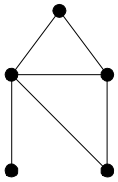
2.


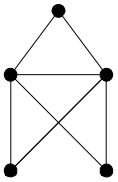
3.


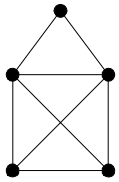
4.


5.


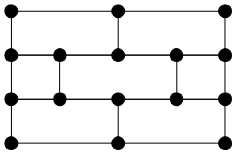
6.


7.


8.


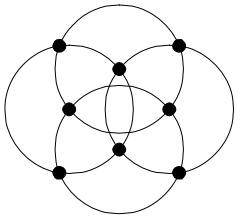
9.


b)



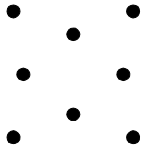
- nedá sa nakresliť jedným ťahom, má dvanásť vrcholov nepárneho stupňa

c)

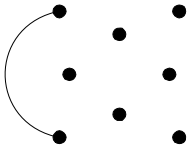


- dá sa nakresliť jedným uzavretým eulerovským ťahom

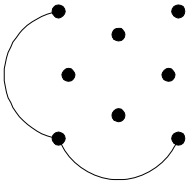
1.



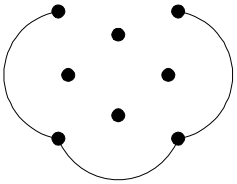
2.



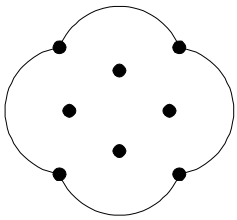
3.



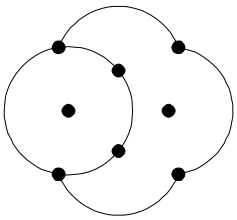
4.



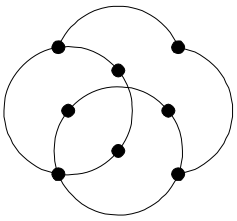
5.



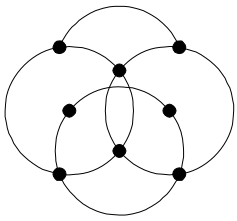
6.



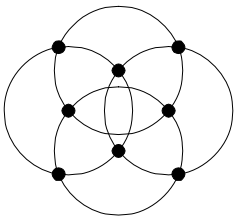
7.



8.



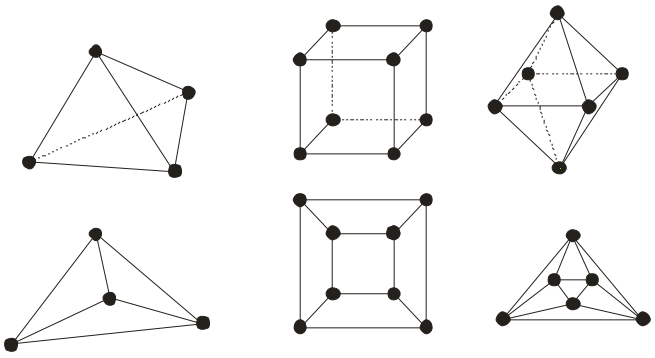
9.



- <u>Hamiltonovské grafy</u>

<u>Def.</u>

Schlegelov diagram je stredový priemet mnohostena na jednu stenu, pričom stred premietania je mimo mnohostena.

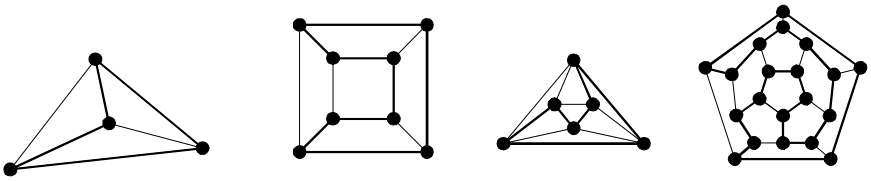


<u>Def.</u>

Hamiltonovská kružnica grafu G je kružnica obsahujúca všetky vrcholy grafu G.

<u>Def.</u>

Graf, ktorý obsahuje hamiltonovskú kružnicu sa nazýva Hamiltonovský graf.

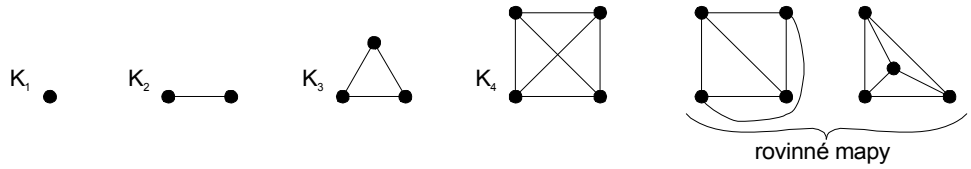


- <u>rovinné grafy</u>

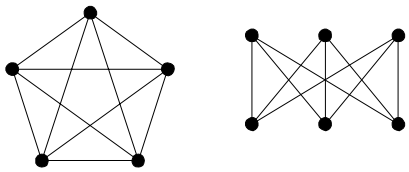
<u>Def.</u>

Graf sa nazýva rovinný, ak ho možno prekresliť tak, že jeho hrany sa nepretínajú. Ak je tak nakreslený, vznikne rovinná mapa.

- graf označený K_x sa nazýva kompletný graf x-tého stupňa
-



> graf K_5 rovinný nie je a tak isto aj $K_{3,3}$



<u>Veta</u> (Kuratowského) /1930/

Graf nie je rovinný práve vtedy, keď obsahuje $K_{3,3}$ alebo K_5, alebo graf, ktorý z nich vznikol doplnením ďalších vrcholov na hrany.

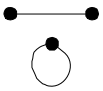
- <u>Eulerova veta</u>

<u>Veta</u>

Nech G je súvislá rovinná mapa, ktorá má v vrcholov, h hrán a s oblastí. Potom platí:

$$v + s = h + 2$$

Dôkaz

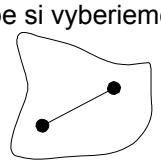
1. $h = 1$ … 

$v = 2, s = 1 \ldots 2 + 1 = 1 + 2$

$v = 1, s = 2 \ldots 1 + 2 = 1 + 2$ platí

2. majme v vrcholov, h hrán a s oblastí, predpokladáme, že naše tvrdenie platí pre menší počet

- v mape si vyberieme jednu hranu:



a) leží na kružnici

- máme mapu s v vrcholmi, $h-1$ hranami a $s-1$ oblasťami

> podľa predpokladu platí:

$$v + (s-1) = (h-1) + 2$$

$$v + s = h + 2$$

b) neleží na kružnici

- dostane dve mapy G_1 … v_1, h_1, s_1 a G_2 … v_2, h_2, s_2

> platí: $v_1 + v_2 = v; h_1 + h_2 = h - 1; s_1 + s_2 = s + 1$

$$v_1 + s_1 = h_1 + 2 \qquad v_2 + s_2 = h_2 + 2$$

$$(v_1 + v_2) + (s_1 + s_2) = (h_1 + h_2) + 4$$

$$v + s + 1 = h - 1 + 4$$

$$v + s = h + 2$$

Pr.

Koľko oblastí má rovinná mapa s v vrcholmi, ak každý má stupeň 4:

$$st(A_i) = 4; i = 1, 2, \ldots, v$$

$$\sum_{i=1}^{v} st(A_i) = 4v = 2h$$

> teda platí $h = 2v$

$$v + s = h + 2$$

$$v + s = 2v + 2$$

$$s = v + 2$$

Pr.

Nech rovinný graf má v vrcholov, každú oblasť ohraničenú práve tromi hranami. Dokážte, že platí:

a) $h = 3v - 6$

$$st(s_i) = 3; i = 1, 2, \ldots, s$$

$$\sum_{i=1}^{s} st(s_i) = 3s = 2h$$

$$v + s = h + 2$$

$$3v + 3s = 3h + 6$$

$$3v + 2h = 3h + 6$$

$$h = 3v - 6$$

b) $s = 2v - 4$

$$v + s = h + 2$$

$$2v + 2s = 2h + 4$$

$$s = 2v - 4$$

Pr.

Aký maximálny počet vrcholov môže mať konvexný mnohosten, ktorého všetky steny sú rovnostranné trojuholníky a stupeň vrcholov je menší ako šesť:

$$\sum_{i=1}^{s} st(s_i) = 3s = 2h \qquad 2h = \sum_{i=1}^{v} st(A_i) \le 5v$$

$$v + s = h + 2$$

$$3v + 3s = 3h + 6$$

$$3v + 2h = 3h + 6$$

$$3v = h + 6$$

$$6v = 2h + 12$$

$$6v \le 5v + 12$$

$$v \le 12 \qquad v = 12, h = 30, s = 20$$

> pravidelný dvadsaťsten

Pr.

Steny konvexného mnohostena sú iba päťuholníky a šesťuholníky. Z každého vrcholu vychádzajú práve tri hrany. Koľko stien môže byť paťuholníkových:

$$\sum_{i=1}^{v} st(A_i) = 3v = 2h \qquad v, h, s = p + š \quad \sum_{i=1}^{s} st(s_i) = 5p + 6š = 2h$$

$$v + s = h + 2$$

$$3v + 3s = 3h + 6$$

$$3s = h + 6$$

$$6s = 2h + 12$$

$$6s = 5p + 6š + 12 \qquad 6s = 5p + 6(s - p) + 12 \qquad p = 12$$

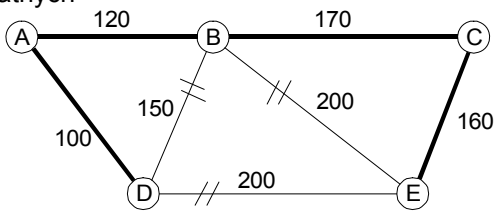
> môže ich byť až 12 a bude to pravidelný dvanásťsten (nebude mať šesťuholníkové steny)

- <u>aplikácie teórie grafov</u>

1. **Problém minimálnej kostry**

- máme ohodnotený graf (je to graf, v ktorom sú hranám priradené čísla, hodnoty, môžu byť časové, finančné, …) a máme v ňou nájsť kostru, tak aby náklady boli najmenšie

- napr.: je daných n miest, ktoré treba pospájať cestami, sú známe náklady na vybudovanie ciest a máme vybudovať najlacnejšiu cestnú sieť, ktorá umožní dostať sa z každého mesta do ostatných



- kontrolujeme hrany od najväčšieho ohodnotenia ak ležia na kružnici, tak ich škrtneme a na koniec dostaneme kostru grafu

2. **Úloha o maximálnom toku**

- je daná sieť na prepravu tovaru, každej hrane je priradené číslo udávajúce množstvo tovaru prepravené za daný čas (priepustnosť hrany) a otázkou je: aké najväčšie množstvo tovaru možno prepraviť medzi dvoma miestami
  > na riešenie takejto úlohy existuje zložitý algoritmus

3. **Problém poštára**

- poštár má prejsť všetky ulice svojho obvodu a vrátiť sa na poštu tak, aby jeho cesta bola najkratšia
  > ak je graf eulerovský, pôjde po každej hrane práve raz a keď nie je musí po niektorých prejsť viac krát

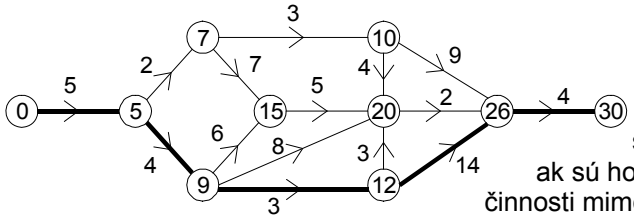
4. **Problém obchodného cestujúceho**

- obchodný cestujúci má vyjsť z miesta A, navštíviť n miest aspoň raz a vrátiť sa do A; ako má cestovať, aby boli jeho náklady čo najmenšie
  > neexistujú algoritmy

5. **Sieťová analýza**

- súbor metód, ktoré sa používajú pri plánovaní zložitých projektov
- celý projekt sa znázorní na **orientovanom ohodnotenom grafe** (je zadaný smer pohybu po hrane a ohodnotenie hrany), vrcholy predstavujú zmeny činností (ukončenie jednej a začiatok druhej), hrany predstavujú jednotlivé činnosti a každej sa priradí očakávaná doba trvania činnosti > **sieťový graf**
- úlohou je určiť, za aký najkratší čas možno projekt dokončiť

A. **Metóda kritickej cesty** (CPM - z anglického critical path method)
- určíme si cestu od začiatku po koniec, ktorá bude trvať najdlhšie
  > do každého vrcholu si zapíšeme maximum ciest, ktoré sa v ňom zbiehajú (t.j. sčítame hodnoty hrán, po ktorých sa dostávame do vrcholu)
  > potom si spätne vyznačíme hrany, ktoré dávajú dané maximum a dostávame kritickú cestu



> ak sa oneskoria činnosti na kritickej ceste, tak sa oneskorí aj celý projekt, ale to neznamená, že nám stačí sledovať iba kritickú cestu, ak sú hodnoty málo odlišné, oneskorenie činnosti mimo kritickej cesty môže zapríčiniť zmenu celej kritickej cesty

B. **Metóda Pert** - používa sa pri vedeckých projektoch

Neriešené úlohy

1. Vo futbalovom turnaji hrá 11 družstiev. Je možné, aby v istej chvíli malo 6 družstiev odohrané 3 zápasy, 3 družstvá 3 zápasy a 2 družstvá 2 zápasy?

2. Nájdite všetky obyčajné nesúvislé grafy, ktoré majú práve 7 vrcholov a práve 15 hrán.

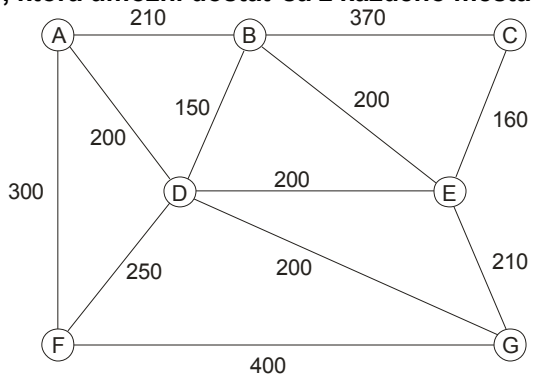
3. Dokážte, že neexistuje mnohosten, ktorý má práve 7 hrán.

4. Nech rovinný graf má každý vrchol stupňa aspoň 3, každú oblasť ohraničenú aspoň tromi hranami. Dokážte, že potom platí:

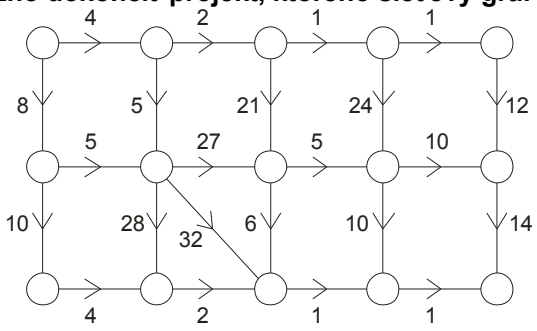
a) $2h \geq 3v$ b) $2h \geq 3s$ c) $h \leq 3v - 6$

5. Aký maximálny počet vrcholov môže mat' konvexný mnohosten, ktorého všetky steny sú trojuholníky a stupeň každého vrcholu je menší ako 6?

6. Náklady na vybudovanie ciest medzi mestami istého štátu sú na ohodnotenom grafe. Aká je najlacnejšia cestná sieť, ktorá umožní dostať sa z každého mesta do každého?



7. Za aký najkratší čas možno dokončiť projekt, ktorého sieťový graf je na obrázku?



30. ZÁKLADY NUMERICKEJ MATEMATIKY

1. Základné pojmy
- čo je numerická matematika

2. Riešenie rovníc s jednou neznámou
- ohraničenie, separácia a upresnenie koreňov
- metóda polenia intervalov
- metóda tetív
- metóda dotyčníc

3. Výpočet hodnôt funkcii
- výpočet hodnôt mnohočlenov, Hornerova schéma
- aproximácia funkcii mnohočlenmi
- interpolačná aproximácia, Lagrangeov interpolačný mnohočlen
- Taylorov mnohočlen, Maclaurinov mnohočlen

……

- časť matematiky, ktorá sa zaoberá numerickými výpočtami

- jej hlavnou úlohou je hľadať algoritmy na riešenie úloh približnými metódami
  > týmito metódami dokážeme vypočítať úlohu s vopred danou presnosťou

/táto kapitola čitateľovi len približuje problematiku numerickej matematiky, preto pre osvojenie si poznatkov, ako postupovať všeobecne pri riešení úloh odporúčam si prečítať: Kapitolu 2, paragraf 5 zo skripta ALGEBRA 2, Daniel Palumbíny a Oleg Palumbíny, FPV UKF, Nitra 2002/

- <u>riešenie rovníc s jednou neznámou</u>

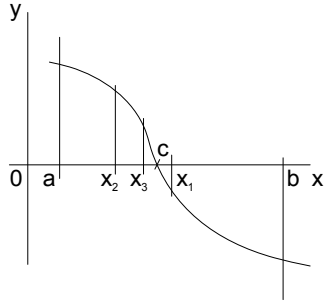
- postupujeme nasledovne:
  1. **ohraničíme korene** - určíme interval $\langle u,v\rangle$, v ktorom sa všetky korene nachádzajú
  2. **separujeme korene** - interval $\langle u,v\rangle$ rozdelíme na také intervaly, aby sa v každom nachádzal práve jeden koreň
  3. **upresníme (aproximujeme) korene** - pre každý koreň nájdeme postupnosť, ktorá konverguje ku koreňu c

     $x_1, x_2, x_3, \ldots \to c$

     > približnou hodnotou koreňa je každý člen tejto postupnosti

- <u>metóda polenia intervalu</u>

- predpoklady použitia:
  - máme rovnicu $f(x)=0$ na intervale $\langle a,b\rangle$, funkcia f musí byť spojitá na danom intervale a $f(a)$ musí mať opačné znamienko ako $f(b)$



$x_1, x_2, x_3, \ldots \to c$

$\langle a,b\rangle \ldots x_1 = \frac{a+b}{2}$ … teraz máme pre druhý interval dve možnosti $\langle a, x_1\rangle$ a $\langle x_1, b\rangle$

> ale musí platiť, že $f(x_1)$ musí mať opačné znamienko ako $f(a)$ alebo $f(b)$

> presnosť je $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$

$\langle a, x_1 \rangle \ldots x_2 = \frac{a+x_1}{2}$ … teraz máme pre tretí interval dve možnosti $\langle a, x_2 \rangle$ a $\langle x_2, x_1 \rangle$

> ale musí platiť, že $f(x_2)$ musí mať opačné znamienko ako $f(a)$ alebo $f(x_1)$

> presnosť je $\varepsilon = \frac{|a-x_1|}{2} = \frac{|a-b|}{4}$

$\langle x_2, x_1 \rangle \ldots x_3 = \frac{x_2+x_1}{2}$ … teraz máme pre štvrtý interval dve možnosti $\langle x_2, x_3 \rangle$ a $\langle x_3, x_1 \rangle$

> ale musí platiť, že $f(x_3)$ musí mať opačné znamienko ako $f(x_2)$ alebo $f(x_1)$

> presnosť je $\varepsilon = \frac{|x_2-x_1|}{2} = \frac{|a-b|}{8}$

$c \in \langle x_3, x_1 \rangle$ takto pokračujeme ďalej, až kým nedosiahneme výsledok s vopred danou presnosťou

> v i-tom kroku je presnosť $\frac{|a-b|}{2^i}$

<u>Pr.</u>

Riešte rovnicu $x^2 = 2$ metódou polenia intervalov s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$:

$f(1) = -1 < 0$

$f(2) = 2 > 0$ - začiatočný interval bude $\langle 1, 2 \rangle$

- pre prehľadnosť riešenia si ho zapisujeme do tabuľky

l'	p	x_i	ε	$f(x_i)$
1	2	$x_1 = 1{,}5$	0,5	$f(1{,}5) > 0$
1	1,5	$x_2 = 1{,}25$	0,25	$f(1{,}25) < 0$
1,25	1,5	$x_3 = 1{,}375$	0,125	$f(1{,}375) < 0$
1,375	1,5	$x_4 = 1{,}4375$	0,0625	$f(1{,}4375) > 0$
1,375	1,4375	$x_5 = 1{,}40625$	0,03125	$f(1{,}40625) < 0$
1,40625	1,4375	$x_6 = 1{,}421875$	0,015625	$f(1{,}421875) > 0$
1,40625	1,421875	$x_7 = 1{,}4140625$	0,0078125	

> presnosť pri $x_7 = 1{,}4140625$ je $\varepsilon = 0{,}0078125 < 10^{-2}$

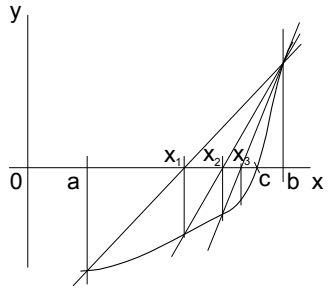
> takže môžeme prehlásiť, že riešenie rovnice $x^2 = 2$ je $x_7 = 1{,}4140625$ s presnosťou $\varepsilon < 10^{-2}$

- <u>metóda tetív (sečníc)</u>

- predpoklady použitia:

- máme rovnicu $f(x)=0$ na intervale $\langle a,b\rangle$, funkcia f musí byť spojitá na danom intervale a $f(a)$ musí mať opačné znamienko ako $f(b)$

$x_1, x_2, x_3, \ldots \to c$



- spojíme $f(a)$ s $f(b)$, takto vzniknutá tetiva nám pretne os x v bode x_1

  > rovnica tetivy bude: $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x - a$

  > $y = 0 \ldots x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$

- zase musí platiť, že $f(x_1)$ musí mať opačné znamienko ako $f(a)$ alebo $f(b)$

  > teda spojíme $f(b)$ s $f(x_1)$ a dostaneme x_2

  $x_2 = x_1 - \frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)} f(x_1)$

- tak isto $f(x_2)$ musí mať opačné znamienko ako $f(x_1)$ alebo $f(b)$

  > takže spojíme $f(b)$ s $f(x_2)$ a budeme mať x_3

  $x_3 = x_2 - \frac{b-x_2}{f(b)-f(x_2)} f(x_2)$

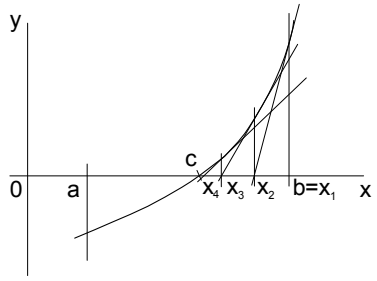
- takto pokračujeme ďalej

- <u>metóda dotyčníc (Newtonova metóda)</u>

- predpoklady použitia:

- máme rovnicu $f(x)=0$ na intervale $\langle a,b\rangle$, funkcia f musí byť spojitá na danom intervale, $f(a)$ musí mať opačné znamienko ako $f(b)$ a existujú $f'(x), f''(x)$

$x_1, x_2, x_3, \ldots \to c$



- dotyčnice začíname robiť v bode, kde sa znamienko funkcie f rovná znamienku druhej derivácie f''

- v našom prípade je to $x_1 = b$

  > rovnica dotyčnice v bode $[x_1, f(x_1)]$ bude:

  $t: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

  - priesečník s osou x dostaneme, ak $y = 0$

  $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$

  $-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1$

  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

- spravíme ďalšiu dotyčnicu $t_2: y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$ a dostaneme priesečník $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ a takto pokračujeme ďalej

- máme rekurentný vzorec: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ a výpočet zastavíme ak $|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$

Pr.

Riešte rovnicu $x^2 = 2$ Newtonovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

$$\langle 1, 2 \rangle$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 1 - \frac{-1}{2} = 1{,}5$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2} = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = 1{,}41\overline{6} \qquad x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 2}{2x_3} = 1{,}41\overline{6} - \frac{0{,}0069\overline{4}}{2{,}8\overline{3}} \doteq 1{,}41421568$$

$$|x_3 - x_4| = 0{,}00245 \qquad x_5 = x_4 - \frac{x_4^2 - 2}{2x_4} = 1{,}41421356$$

$$|x_3 - x_4| = 0{,}0000021239 < 0{,}001$$

> riešením je $x_5 = 1{,}41421356$

Pr.

Nájdite jeden koreň rovnice $x^3 - 3x - 1 = 0$ a presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$f(1) = -3 < 0$$

$$f(2) = 1 > 0 \qquad c \in \langle 1, 2 \rangle$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 1}{3x_n^2 - 3}$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2 - \frac{1}{9} = 1{,}\overline{8}$$

$$x_3 \doteq 1{,}87945 \qquad x_4 \doteq 1{,}87938$$

> máme riešene s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$

Pr.

Nájdite algoritmus na výpočet $\sqrt{a}; a \in R^+$:

$$x^2 - a = 0 \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$ Herónov vzorec

Pr.

Nájdite algoritmus na výpočet $\sqrt[3]{a}; a \in R^+$:

$$x^3 - a = 0 \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

- <u>výpočet hodnôt funkcií</u>

- na výpočet hodnoty funkcie alebo polynómu sa použije **Hornerova schéma** (je to jednoduchý algoritmus, pomocou ktorého jednosucho vypočítame funkčnú hodnotu a využijeme ju aj neskôr pri Taylorovom mnohočlene)

- odvodenie použijeme zo skripta *ALGEBRA 2, Daniel Palumbíny a Oleg Palumbíny, FPV UKF, Nitra 2002, Kapitola 1, paragraf 4*

- majme $f(x)$ v tvare $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

> ďalej majme bod c, v ňom je funkčná hodnota $f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$

> počítajme $f(x) - f(c) = a_n(x^n - c^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - c^{n-1}) + \cdots + a_1(x - c) = (x - c).g(x)$

> teda platí $f(x) = (x - c).g(x) + f(c)$

- polynóm $g(x)$ je o stupeň nižší ako $f(x)$, teda je tvaru:

$$g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$$

> dosadíme za $g(x)$ do $f(x) = (x-c).g(x) + f(c)$:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x-c).(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0) + f(c)$$

> po úprave dostávame:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - cb_{n-2})x^{n-2} + \\ + \cdots + (b_0 - cb_1)x + f(c) - cb_0$$

> porovnaním koeficientov dostávame:

$b_{n-1} = a_n$

$b_{n-2} - cb_{n-1} = a_{n-1}$ a odtiaľ máme $b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$

$b_{n-3} - cb_{n-2} = a_{n-2}$ a odtiaľ máme $b_{n-2} = a_{n-2} + cb_{n-2}$

$\vdots$

$b_0 - cb_1 = a_1$ a odtiaľ máme $b_0 = a_1 + cb_1$

$f(c) - cb_0 = a_0$ a odtiaľ máme $f(c) = a_0 + cb_0$

> z tých nerovností vytvoríme Hornerovu schému:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
c		cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\cdots$	cb_1	cb_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$f(c)$

> do prvého riadku sa napíšu koeficienty polynómu (aj nulové)
> do druhého riadku na začiatok napíšeme hodnotu c
> potom postupujeme nasledovne:

1. $a_n = b_{n-1}$, teda na prvé miesto 3. riadku napíšeme a_n
2. postupne budeme násobiť hodnoty v treťom riadku hodnotou c, zapíšeme si takto vzniknutú hodnotu do druhého riadku, ale o jedno miesto ďalej, ako je hodnota, ktorú sme násobili, a spočítame ju s hodnotou, ktorá je nad ňou (teda v prvom riadku) a dostaneme nasledujúci prvok v treťom riadku
3. na konci dostaneme hodnotu $f(c)$

<u>Pr.</u>

Vypočítajte hodnotu funkcie $f(x)$ v bode x_0:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1; x_0 = 4$

	1	2	−3	−4	1
4		4	24	84	320
	1	6	21	80	321

> teda môžem napísať:

$$f(x) = (x-4)(x^3 + 6x^2 + 21x + 80) + 321$$

b) $f(x) = x^5 + 4x^3 - 5x + 1; x_0 = 3$

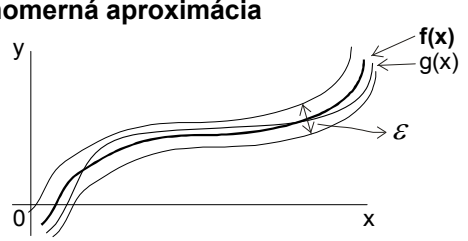
	1	0	4	0	−5	1
3		3	9	39	117	336
	1	3	13	39	112	337

$$f(x) = (x-3)(x^4 + 3x^3 + 13x^2 + 39x + 112) + 337$$

- <u>aproximácia funkcií polynómami</u>

- aproximácia funkcie $f(x)$ je jej nahradenie polynomickou funkciou $g(x)$, ktorá sa od nej málo odlišuje

1. **rovnomerná aproximácia**



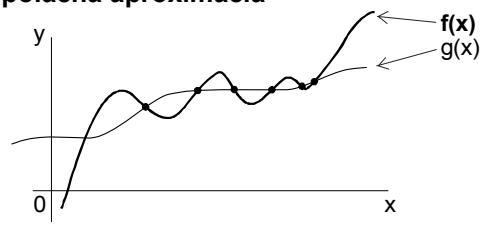
<u>Def.</u>

Rovnomernou aproximáciou funkcie $f(x)$ na intervale (a,b), s presnosťou $\varepsilon > 0$, rozumieme jej nahradenie polynomickou funkciou $g(x)$ tak, že platí: $\forall\ x \in (a,b): |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

<u>Veta</u> (Weierstrassova)

Ak funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale (a,b), tak pre každé $\varepsilon > 0$ ju možno rovnomerne aproximovať polynómom.

2. **interpolačná aproximácia**



<u>Def.</u>

Interpolačnou aproximáciou funkcie $f(x)$ na intervale (a,b) rozumieme jej nahradenie polynomickou funkciou $g(x)$ tak, že v istom počte bodov sa zhodujú.

- existuje polynóm stupňa najviac $n-1$, ktorý funkciu $f(x)$, stupňa n, aproximuje

> **Lagrangeov interpolačný polynóm**

$$f: \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \end{array}$$

> máme body funkcie, ktoré majú zostať

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

> funkcia je n-tého stupňa

> Lagrangeov interpolačný polynóm vyzerá nasledovne:

$$l(x) = f(x_1).\frac{(x-x_2)(x-x_3).\cdots.(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3).\cdots.(x_1-x_n)} + f(x_2).\frac{(x-x_1)(x-x_3).\cdots.(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3).\cdots.(x_2-x_n)} +$$
$$+ \cdots + f(x_n).\frac{(x-x_1)(x-x_2).\cdots.(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2).\cdots.(x_n-x_{n-1})} = l_1(x) + l_2(x) + \cdots + l_n(x)$$

> je zrejmé, že je stupňa $n-1$

Pr.

Nájdite Lagrangeov interpolačný mnohočlen a funkciu, ak sa zhodujú v bodoch:

$f:$	1	2	4
	1	5	2

$f:$	x_1	x_2	x_3
	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

$$l(x) = l_1(x) + l_2(x) + l_3(x)$$

$$l_1(x) = f(x_1).\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3}$$

$$l_2(x) = f(x_2).\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = 5.\frac{(x-1)(x-4)}{-2}$$

$$l_3(x) = f(x_3).\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = 2.\frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

$$l(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{3} + 5.\frac{(x-1)(x-4)}{-2} + 2.\frac{(x-1)(x-2)}{6} = \frac{2(x-2)(x-4)}{6} - \frac{15(x-1)(x-4)}{6} +$$

$$+ \frac{2(x-1)(x-2)}{6} = \frac{2(x^2-6x+8)}{6} - \frac{15(x^2-5x+4)}{6} + \frac{2(x^2-3x+2)}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2x^2 - 12x + 16 - 15x^2 + 75x - 60 + 2x^2 - 6x + 4\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-11x^2 + 57x - 40\right)$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$1 = a + b + c \quad \wedge \quad 5 = 4a + 2b + c \quad \wedge \quad 2 = 16a + 4b + c$$

$$c = 1 - a - b \qquad 4 = 3a + b \qquad 1 = 15a + 3b$$

$$b = 4 - 3a \qquad 1 = 15a + 12 - 9a$$

$$-11 = 6a$$

$$a = -\frac{11}{6}; b = \frac{19}{2}; c = -\frac{20}{2}$$

$f(x) = -\frac{11}{6}x^2 + \frac{19}{2}x - \frac{40}{6}$ > vidíme, že je zhodný s Lagrangeovím polynómom, teda s zhodujú vo všetkých bodoch

3. **Taylorov polynóm (Taylorov rozvoj)**

- ako je spomenuté vyššie, na jeho vytvorenie nám postačí aj Hornerova schéma, ale ukážeme si aj postup pomocou derivácií

- odvodenie použijeme zo skripta *ALGEBRA 2, Daniel Palumbíny a Oleg Palumbíny, FPV UKF, Nitra 2002, Kapitola 1, paragraf 6*

- máme polynóm (funkciu) vyjadrený v neurčitej x v tvare

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

> a chceme ho vyjadriť v neurčitej $x - c$ v nasledovnom tvare:

$$f(x) = b_n(x-c)^n + b_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + b_1(x-c) + b_0$$

> úlohou je určiť koeficienty $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$

$$x = c \ldots f(c) = b_n(c-c)^n + b_{n-1}(c-c)^{n-1} + \cdots + b_1(c-c) + b_0$$

$$f(c) = b_0 = 0!.b_0 \qquad b_0 = \frac{f(c)}{0!}$$

> vykonajme deriváciu:

$$f'(x) = nb_n(x-c)^{n-1} + (n-1)b_{n-1}(x-c)^{n-2} + \cdots + 2b_2(x-c) + b_1$$

- odsadíme $x = c$ a dostaneme:

$$f'(c) = b_1 = 1!.b_1 \qquad b_1 = \frac{f'(c)}{1!}$$

> po ďalšom derivovaní a dosadení $x = c$ dostaneme:

$$f''(c) = 2b_2 = 2!.b_2 \qquad b_2 = \frac{f''(c)}{2!}$$

> po k krokoch máme:

$$f^{(k)}(c) = k.(k-1)(k-2).\cdots.2b_k = k!.b_k \qquad b_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

> a posledné dva koeficienty budú nasledovné:

$$b_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} \qquad b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

> koeficienty dosadíme a dostaneme Taylorov rozvoj:

$$f(x) = \frac{f(c)}{0!} + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

<u>Pr.</u>

/Príklad 6.1 a Príklad 6.2, ALGEBRA 2, Daniel Palumbíny a Oleg Palumbíny, FPV UKF, Nitra 2002, Kapitola 1, paragraf 6/

Rozviňte do Taylorovho rozvoja polynóm $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ podľa mocnín $x - 2$:

- sú dve možnosti riešenia:

1. pomocou derivácie

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 \qquad b_0 = \frac{f(2)}{0!} = \frac{13}{1} = 13$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 \qquad b_1 = \frac{f'(2)}{1!} = \frac{40}{1} = 40$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 6 \qquad b_2 = \frac{f''(2)}{2!} = \frac{66}{2} = 33$$

$$f'''(x) = 24x + 12 \qquad b_3 = \frac{f'''(2)}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

$$f^{(4)}(x) = 24 \qquad b_4 = \frac{f^{(4)}(2)}{4!} = \frac{24}{24} = 1$$

> teda Taylorov rozvoj je:

$$f(x) = 13 + 40(x-2) + 33(x-2)^2 + 10(x-2)^3 + (x-2)^4$$

2. pomocou Hornerovej schémy

	1	2	−3	−4	1
2		2	8	10	12
	1	4	5	6	13
2		2	12	34	
	1	6	17	40	
2		2	16		
	1	8	33		
2		2			
	1	10			
2					
	1				

- nemusíme ďalej deliť, hneď máme koeficienty Taylorovho rozvoja

- je to rýchlejší postup

$$f(x) = 13 + 40(x-2) + 33(x-2)^2 + 10(x-2)^3 + (x-2)^4$$

4.**Maclaurinov mnohočlen**

- je to špeciálny prípad Taylorovho mnohočlenu pre $c = 0$

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

- napr.:

a) $f(x) = \sin x$

$$f(0) = \sin 0 = 0$$
$$f'(0) = \cos 0 = 1$$
$$f''(0) = -\sin 0 = 0$$
$$f'''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$$
$$\vdots$$
$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}$$

b) $f(x) = \cos x$

$$f(0) = \cos 0 = 1$$
$$f'(0) = -\sin 0 = 0$$
$$f''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f'''(0) = \sin 0 = 0$$
$$f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$$
$$\vdots$$
$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{0}{7!}x^7 + \cdots$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}$$

c) $f(x) = e^x$

$$f(0) = e^0 = 1$$
$$f'(0) = e^0 = 1$$
$$f''(0) = e^0 = 1$$
$$\vdots$$
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots}$$

$$\boxed{\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} + \cdots}$$

Neriešené úlohy

1. Riešte rovnicu $x + \ln x = 0$ **metódou dotyčníc s presnosťou** $\varepsilon = 10^{-3}$**.**

2. Metódou dotyčníc určite $\sqrt{3}$ **s presnosťou** $\varepsilon = 10^{-3}$**.**

3. Nájdite Lagrangeov interpolačný mnohočlen určený podmienkami:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	-1	2	-4	-1

4. Vypočítajte Maclaurinov mnohočlen 6. stupňa funkcie $y = \cos x$ **a vypočítajte pomocou neho** $\cos 1$**.**

D1. MNOŽINY

1. Základné pojmy
- čo je to množina
- určovanie množín

2. Vzťahy medzi množinami
- rovnosť množín
- podmnožiny

3. Znázorňovanie množín
- Venov diagram

4. Operácie s množinami
- zjednotenie
- prienik
- rozdiel
- doplnok

.....

- vznikli v roku 1873 (Bolzano, Taliansko) - Canntor

- pojem množina sa v matematike nedefinuje

- **množina** = súhrn objektov (prvky množiny)

> množiny označujeme $A, B, C, \ldots$

> prvky označujeme $a, b, c, \ldots$

θ - prázdna množina (neobsahuje žiadny prvok)

> množina obsahujúca aspoň jeden prvok sa nazýva neprázdna $A \neq \theta$

- skutočnosť, že nejaký prvok x patrí do množiny A zapisujeme $x \in A$ a ak nepatrí $x \notin A$

- <u>určovanie množín</u>

1. **vymenovaním prvkov** - používa sa zvyčajne pri malom počte prvkov $A = \{1, 2, 10, 20\}$

2. **charakteristickou vlastnosťou** - používa sa pri väčšom počte prvkov

> A je množina prvkov väčších ako 10 a menších ako 1000 … $A = \{n \in N; 10 < n < 1000\}$

3. **výsledok operácií s inými množinami** - máme množiny A, B a množina C vznikne ich prienikom $C = A \cap B$

- <u>vzťahy medzi množinami</u>

- dve množiny A a B sa **rovnajú** práve vtedy, keď každý prvok množiny A je aj prvkom množiny B a naopak

> skutočnosť, že sa rovnajú, označíme $A = B$

- množina A je podmnožinou množiny B, ak každý prvok množiny A je aj prvkom množiny B

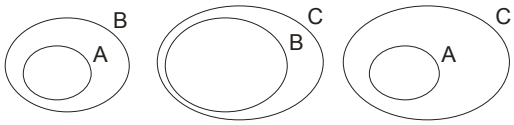
> skutočnosť, že množina A je podmnožinou B označujeme $A \subset B$

> ďalej platí:

$$\theta \subset \theta$$
$$\theta \subset A$$
$$A \subset A$$

- ak $A \subset B$ a súčasne $B \subset A$, tak $A = B$

- ak $A \subset B$ a súčasne $B \subset C$, tak $A \subset C$

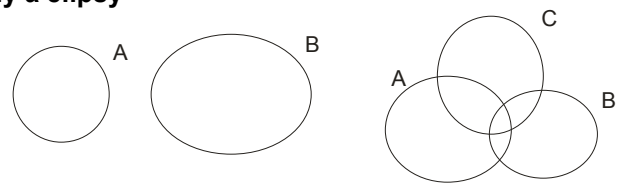


- ak má množina n prvkov, tak má 2^n podmnožín

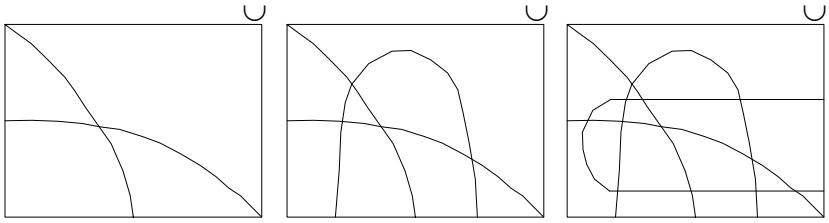
- <u>znázorňovanie množín</u>

- množiny môžeme znázorňovať:

1. **kruhy a elipsy**



2. **Venov diagram** - John Ven
- priehradková schéma štandardného tvaru



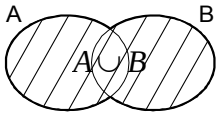
- pre dve množiny - pre tri množiny - pre štyri množiny

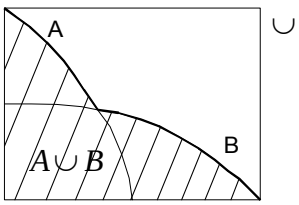
- <u>operácie s množinami</u>

1. **zjednotenie**

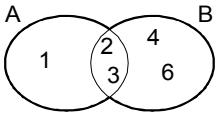
- zjednotenie množín A a B je množina, ktorej prvky sú prvkami aspoň jednej z množín A alebo B

> značíme ho $A \cup B$



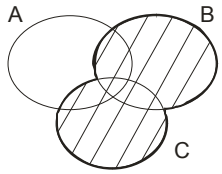


$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 3, 4, 6\}$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

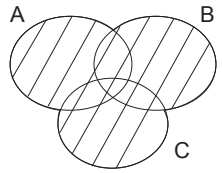


- pre zjednotenie platí:
  - a) $A \cup A = A$
  - b) $A \cup B = B \cup A$ … komutatívnosť
  - c) $A \cup \theta = A$
  - d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ … asociatívnosť

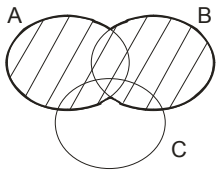
Ľ
- najskôr zjednotíme $B \cup C$



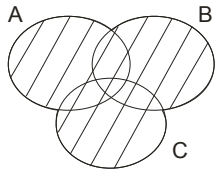
- teraz vzniknutú množinu zjednotíme s A



P
- najskôr zjednotíme $A \cup B$



- teraz vzniknutú množinu zjednotíme s C



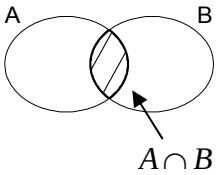
> máme rovnaké množiny

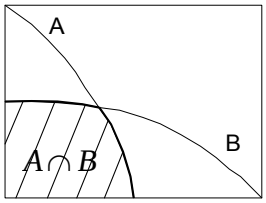
  - e) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
  - f) $A \subset (A \cup B); B \subset (A \cup B); (A \cap B) \subset (A \cup B)$

2. **prienik**

- prienik množín A a B je množina, ktorej prvky sú prvkami aj množiny A aj množiny B

> značíme ho $A \cap B$

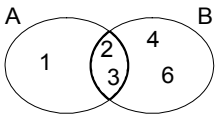




$A = \{1, 2, 3\}$

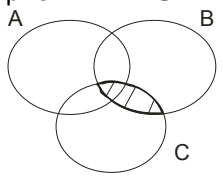
$B = \{2, 3, 4, 6\}$

$A \cup B = \{2, 3\}$

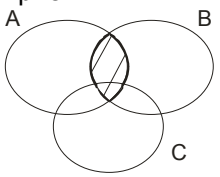


- pre prienik platí:
  - a) $A \cap A = A$
  - b) $A \cap B = B \cap A$ … komutatívnosť
  - c) $A \cap \theta = \theta$
  - d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ … asociatívnosť

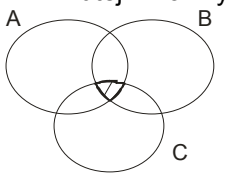
Ľ
- najskôr spravíme prienik $B \cap C$



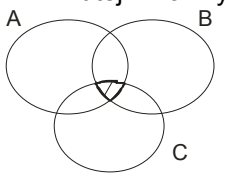
P
- najskôr spravíme prienik $A \cap B$



- teraz spravíme prienik vzniknutej množiny s A



- teraz spravíme prienik vzniknutej množiny s C



> máme rovnaké množiny

e) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

f) ak $A \cap B = \theta$, tak množiny A, B nazývame disjunktné

> ďalej platia distributívne zákony:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

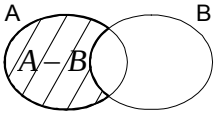
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

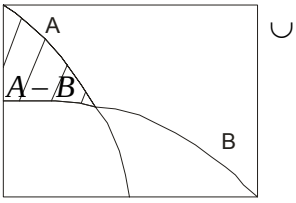
> dá sa ukázať, že to platí pomocou obrázku ako pri asociatívnosti (pozorný čitateľ si ho dokáže spraviť sám)

3. **rozdiel**

- rozdiel množín A a B je množina, ktorej prvky sú prvky patriace do množiny A a nepatriace do množiny B

> značíme ho $A - B$

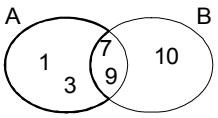




$A = \{1, 3, 7, 9\}$

$B = \{7, 9, 10\}$

$A - B = \{1, 3\}$



- pre rozdiel platí:

a) $(A - B) \subset A$

b) ak $A \cap B = \theta$ alebo $B = \theta$, tak $A - B = A$

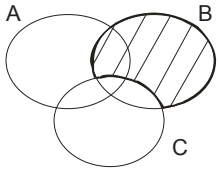
c) $A - \theta = A$

d) ak $A = B$ alebo $A \subset B$, tak $A - B = \theta$

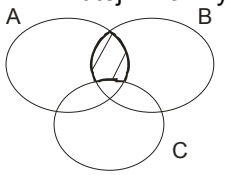
d) $A \cap (B - C) = (A - C) \cap (B - C)$

Ľ

- najskôr spravíme rozdiel $B - C$

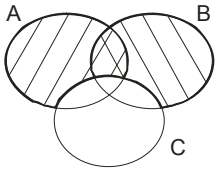


- teraz spravíme prienik vzniknutej množiny s A

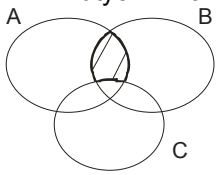


P

- najskôr spravíme rozdiely $A - C; B - C$



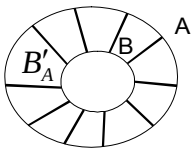
- teraz spravíme prienik vzniknutých množín

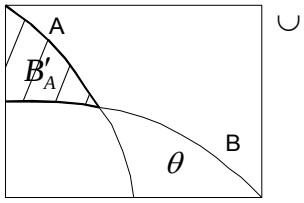


> máme rovnaké množiny

4. **doplnok**

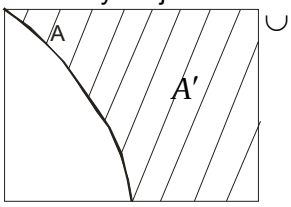
- doplnok množiny B ku množine A, ak $B \subset A$, je $A - B$
  > značíme ho B'_A





- pre každé dve množiny $A, B; B \subset A$ platí:
  a) $B \cap B'_A = \theta$
  b) $B \cup B'_A = A$
  c) $\left(B'_A\right)_A{}' = B$
  d) $A - B = A \cap B'_A$

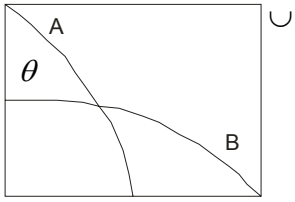
- doplnok množiny A je množina A', do ktorej nepatria prvky množiny A



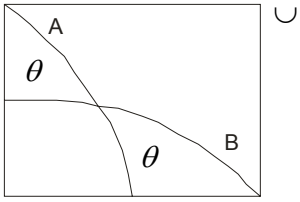
Pr.

Na Venovom diagrame pre dve množiny znázornite skutočnosti, že:

a) $A \subset B$



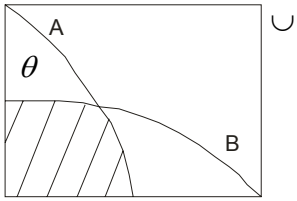
b) $A = B$



Pr.

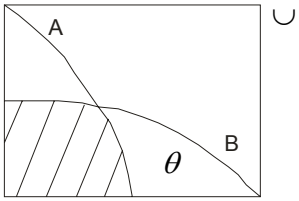
Čo platí o množinách A, B ak:

a) $A \cap B = A$



$A \subset B$

b) $A \cup B = A$

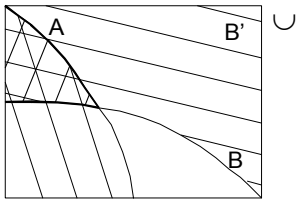


$B \subset A$

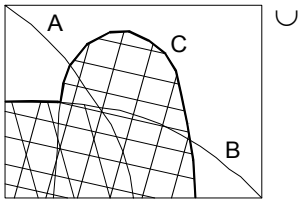
Pr.

Znázornite na Venovom diagrame:

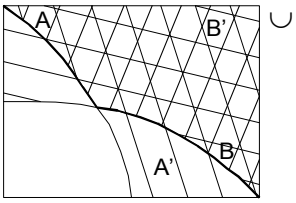
a) $A \cap B'$



b) $(A \cap B) \cup C$



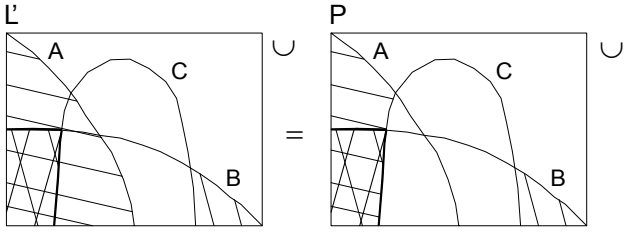
c) $A' \cap B'$



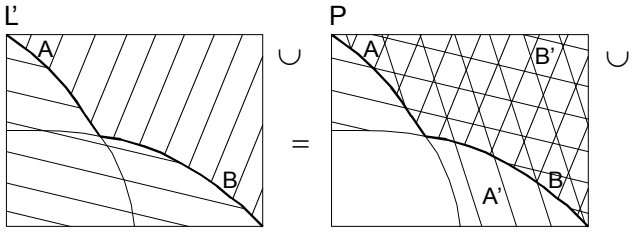
Pr.

Pomocou Venovho diagramu dokážte:

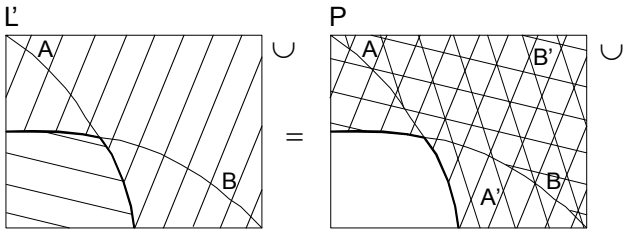
a) $A \cap (B - C) = (A - C) \cap (B - C)$



b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$



c) $(A \cap B)' = A' \cup B'$



Neriešené úlohy

1. Čo platí o množinách A, B ak vieme, že:

a) $A - B = A$ b) $A - B = \theta$ c) $A - B = A \cap B$

2. Znázornite na Venovom diagrame:

a) $A' \cup B$ b) $(A' \cup B) \cup C$

3. Pomocou Venovho diagramu dokážte:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

c) $A - B = A \cap B'$ d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

D2. KONŠTANTY A PREMENNÉ

1. Základné pojmy
- konštanta
- premenná

……

- spočiatku sa matematické vzťahy a definície zapisovali iba slovne, čo bolo nepohodlné a vyjadriť napríklad polynóm piateho stupňa slovami je dosť zdĺhavé
  > preto vzniklo značenie aké poznáme dnes

  > napr.: $o = 2\pi r$
  - π je konštanta
  - r je nezávislá premenná a o je závislá premenná (závisí od hodnoty r)

Def.
Konštanta je písmeno, ktorým označujeme jeden objekt.

Def.
Premenná je písmeno, ktorým označujeme ľubovoľný objekt z istej množiny, ktorá sa nazýva obor premennej.

Pr.
Vyjadrite pomocou konštánt a premenných:
a) dvojnásobok súčtu dvoch ľubovoľných prirodzených čísel … $2(a+b); a,b \in N$
b) súčet dvojnásobkov dvoch ľubovoľných celých čísel … $2a+2b; a,b \in Z$
c) rozdiel druhej mocniny súčtu dvoch ľubovoľných racionálnych čísel a druhej mocniny ich rozdielu … $(a+b)^2-(a-b)^2; a,b \in Q$
d) rozdiel druhých mocnín dvoch ľubovoľných reálnych čísel je vynásobený druhou mocninou ich rozdielu … $(a^2-b^2).(a-b)^2; a,b \in R$
e) súčet druhých mocnín a súčiny dvoch ľubovoľných kladných racionálnych čísel … $a^2+b^2+ab; a,b \in Q^+$
f) druhá mocnina súčtu druhých odmocnín dvoch ľubovoľných kladných reálnych čísel je zmenšená o ich súčet … $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-(a+b); a,b \in R^+$

Pr.
Pomocou premennej $n \in N$ zapíšte:
a) súčet trojnásobku ľubovoľného prirodzeného čísla a čísla sedem … $3n+7$
b) trojnásobok súčtu ľubovoľného prirodzeného čísla a čísla sedem … $3(n+7)$
c) súčet druhej mocniny ľubovoľného prirodzeného čísla a päťnásobku toho čísla … n^2+5n
d) ľubovoľné prirodzené číslo, ktoré po delení piatimi dá zvyšok dva … $5n+2$
e) ľubovoľné prirodzené číslo, ktoré po delení siedmimi dá zvyšok tri … $7n+3$
f) ľubovoľné prirodzené číslo, ktoré po delení šiestimi dá zvyšok päť … $6n+5$
g) ľubovoľné párne číslo … $2n$
h) ľubovoľné nepárne číslo … $2n-1$

D3. VÝRAZY A ICH ÚPRAVY

1. Základné pojmy
- výraz
- rovnosť výrazov

2. Úpravy výrazov
- často používané vzorce pri úprave výrazov
- rozloženie na súčin
- zjednodušenie

……

- výrazy **nesmú obsahovať** znaky charakterizujúce vzťahy ($>, <, =, \leq, \geq, \neq, |\not|$)

- výrazy sú: $a+b$ $\quad \frac{\sin x - y}{\cos x}$ $\quad (a+b)^2$

3 $\quad \left(\frac{x^2+4xy}{5z} - \frac{x+y}{z}\right)\frac{z}{x}$ $\quad \ldots$

Def.

Výraz je každý zápis, správne utvorený podľa dohôd p zápisoch čísel, premenných, výsledkov operácií a hodnôt funkcií, z ktorého po dosadení za premenné vznik ne číslo, **hodnota výrazu**.

$$a(x) = 2x+1 \ldots a(1) = 2.1+1 = 3$$
$$b(x,y) = x^2 + y^2 \ldots b(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5$$

Veta

Dva výrazy s rovnakými premennými sa rovnajú v množine m práve vtedy, keď:

a) do oboch môžeme za premenné dosadiť všetky prvky množiny m

b) pre rovnaké hodnoty premenných nadobúdajú výrazy rovnaké hodnoty

$a(x) = x-3 \quad b(x) = \frac{2x-6}{2} \quad a(x) = b(x)$

$a(x,y) = x^2 - y^2 \quad b(x,y) = (x-y)(x+y) \quad a(x) = b(x)$

$a(x) = \frac{x^2}{x} \quad b(x) = x \ \ldots \ a(0)$ je nedefinované ale $b(0) = 0$, teda $a(x) \neq b(x)$

- úpravy výrazov

- pri úprave výrazov najčastejšie používame vzorce:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
8. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
9. $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$
10. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Def.

Upraviť výraz znamená nahradiť ho iným výrazom, ktorý sa mu v uvažovanej množine rovná a má požadované vlastnosti.

- druhy úprav výrazov sú: a) **rozloženie výrazu na súčin**
  b) **zjednodušenie výrazu**

Pr.

Rozložte na súčin:

a) $a(x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$

b) $b(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2-1) = 2x(x-1)(x+1)$

c) $c(x) = 4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$

d) $d(x) = 8x^3 + 27 = (2)^3 + 3^3 = (2x+3)(4x^2 - 6x + 9)$

e) $e(x) = 4x^2 - 5 = (2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5})$

f) $f(x) = -7x^2 + 3 = -(7x^2 - 3) = -(\sqrt{7}x - \sqrt{3})(\sqrt{7}x + \sqrt{3})$

g) $g(x) = x^7 - x^3 = x^3.(x^4 - 1) = x^3.(x^2-1)(x^2+1) = x^3.(x-1)(x+1)(x^2+1)$

h) $h(x) = 27x^9 + 64x^6 = x^6.(27x^3 + 64) = x^6.[(3x)^3 + 4^3] = x^6.(3x+4)(9x^2 - 12x + 16)$

i) $i(x) = x^3 - 8x^2 - x + 8 = x^3 - x - 8x^2 + 8 = x(x^2-1) - 8(x^2-1) = (x-8)(x-1)(x+1)$

Pr.

Rozložte na súčin:

a) $6xy + 3yz - y^2 = y(6x + 3z - y)$

b) $5x^5 - 80x = 5x(x^4 - 16) = 5x(x^2-4)(x^2+4) = 5x(x-2)(x+2)(x^2+4)$

c) $(a-b).c^2 + (b-a).c^4 = (a-b).c^2 - (a-b).c^4 = (a-b).(1-c^2).c^2 =$
$= (a-b).(1-c).(1+c).c^2$

d) $k^2 - rs + r^2 - ks + 2kr = (k+r)^2 - rs - ks = (k+r)^2 - s(k+r) = (k+r)(k+r-s)$

e) $(v^2+1)^2 - (v^2 - 2v - 1)^2 = (v^2 + 1 - v^2 + 2v + 1)(v^2 + 1 + v^2 - 2v - 1) =$
$= (2v+2)(2v^2 - 2v) = 2(v+1)2v(v-1) = 4v(v-1)(v+1)$

f) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2 =$
$= (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) = [(a-b)^2 - c^2][(a+b)^2 - c^2] =$
$= (a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)$

g) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = (x+y+z-x)\left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2\right] -$
$-(y^3 + z^3) = (y+z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x^2 + xy + xz + x^2) -$
$-(y+z)(y^2 - yz + z^2) = (y+z)(3x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3xz + 2yz - y^2 + yz - z^2) =$
$= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3xz + 3yz) = (y+z)(3x(x+y) + 3z(x+y)) =$
$= (y+z)((3x+3z)(x+y)) = 3(x+y)(x+z)(y+z)$

h) $(m^2 - n^2)^3 - m^2 + n^2 = (m^2 - n^2)^3 - (m^2 - n^2) = (m^2 - n^2)\left[(m^2 - n^2)^2 - 1\right] =$
$= (m^2 - n^2)(m^2 - n^2 - 1)(m^2 - n^2 + 1)$

i) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 =$
$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$

Pr.

Rozložte na súčin:

a) $x^4+1=x^4+1+2x^2-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-2x^2=\left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right)$

b) $16x^4+81=16x^4+81+72x^2-72x^2=\left(4x^2+9\right)^2-72x^2=$
$=\left(4x^2+9-\sqrt{72}x\right)\left(4x^2+9+\sqrt{72}x\right)$

c) $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+x^2y^2+y^4+x^2y^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-\left(xy\right)^2=$
$=\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$

Veta

Zjednodušiť výraz znamená nahradiť ho iným výrazom, ktorý sa mu v uvažovanej množine rovná a na výpočet jeho hodnoty treba vykonať menej operácií.

$$a(x,y)=(x+y)^2-(x-y)^2=x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2=4xy$$

$b(x)=\frac{x^2+x}{x}=x+1;x\neq 0$ … tu musíme určiť aj podmienku, keďže 0 vyhovuje upravenému výrazu, ale nie pôvodnému

Pr.

Zjednodušte:

a) $a(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}=x+y;x\neq y$ … podmienky musíme určiť z výrazu spred krátenia

b) $b(x)=\frac{4x^2-4}{x^2+2x+1}=\frac{4(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\frac{4(x-1)}{x+1};x\neq -1$

c) $c(x,y)=\frac{\frac{1}{x^2-y^2}}{\frac{1}{x+y}}=\frac{1}{(x-y)(x+y)}\frac{x+y}{1}=\frac{1}{x-y};x\neq \pm y$

d) $d(x)=\frac{x^2-8x+16}{3x-12}=\frac{(x-4)^2}{3(x-4)}=\frac{x-4}{3};x\neq 4$

e) $e(a,b,c,d)=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{(a-d)^2-(c+b)^2}=\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{(a-d-c-b)(a-d+c+b)}=\frac{a+b-c+d}{a-b-c-d};$
$(a-d-c-b)\neq 0\wedge(a-d+c+b)\neq 0$

f) $f(a,b)=\frac{96a^3b^7-24a^5b^5}{24a^5b^6-12a^6b^5}=\frac{24a^3b^5\left(4b^2-a^2\right)}{12a^5b^5(2b-a)}=\frac{2(2b-a)(2b+a)}{a^2(2b-a)}=\frac{2(2b+a)}{a^2};b\neq\frac{a}{2}\wedge a\neq 0\wedge b\neq 0$

g) $g(x,y)=\frac{x^2y^2-y^4}{x^2y^2-x^4}=\frac{y^2\left(x^2-y^2\right)}{-x^2\left(x^2-y^2\right)}=-\frac{y^2}{x^2};x\neq 0\wedge x\neq\pm y$

Pr.

Zjednodušte:

a) $\frac{x^2-7x+12}{x-4}=\frac{(x-3)(x-4)}{x-4}=x-3;x\neq 4$

b) $\frac{3x-2}{6x^2+5x-6}=\frac{3x-2}{(2x+3)(3x-2)}=\frac{1}{2x+3};x\neq-\frac{3}{2}\wedge x\neq\frac{2}{3}$

c) $\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}\right):\frac{xy}{x^2-y^2}=\left(\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{x^2-y^2}\right):\frac{xy}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{x^2-y^2}.\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{xy}=$
$=\frac{-4xy}{xy}=-4;x\neq 0\wedge y\neq 0\wedge x\neq\pm y$

d) $\frac{\frac{m}{n^2}+\frac{n}{m^2}}{\frac{m^2-mn+n^2}{2m^2n^2}}=\frac{\frac{m^3+n^3}{m^2n^2}}{\frac{m^2-mn+n^2}{2m^2n^2}}=\frac{m^3+n^3}{m^2n^2}.\frac{2m^2n^2}{m^2-mn+n^2}=\frac{2\left(m^3+n^3\right)}{m^2-mn+n^2}=\frac{2(m+n)\left(m^2-mn+n^2\right)}{m^2-mn+n^2}=2(m+n);$
$m\neq 0\wedge n\neq 0$

e) $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}-\frac{4xy}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2-4xy}{x^2-y^2}=\frac{2x^2-4xy+2y^2}{x^2-y^2}=\frac{2\left(x^2-2xy+y^2\right)}{x^2-y^2}=\frac{2(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{2(x-y)}{x+y};x\neq\pm y$

Pr.

Zjednodušte:

a) $\dfrac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1-x+1+x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{1-x-1-x} = \frac{2}{1-x}\cdot\frac{1-x}{-2x} = -\frac{1}{x}; x \neq 0 \wedge x \neq 1$

b) $\left(2+\frac{a}{1-a}\right)\cdot\frac{a^3-1}{a^2-4} = \frac{2-a}{1-a}\cdot\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a-2}{a-1}\cdot\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2+a+1}{a+2}; a \neq 1 \wedge a \neq \pm 2$

c) $\left(x+1+\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \dfrac{\frac{x^2+x+1}{x}}{\frac{x^2+x+1}{x^2}} = \frac{x^2+x+1}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+x+1} = x; x \neq 0$

d) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)\left(x^2-1\right) = \frac{x+1-x+1-x^2+1}{x^2-1}\left(x^2-1\right) = 3-x^2; x \neq \pm 1$

e) $\frac{2x^2+8x+8}{x-2}\cdot\frac{x^3-8}{4x+8} = \frac{2(x^2+4x+4)}{x-2}\cdot\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{4(x+2)} = \frac{2(x+2)^2}{x-2}\cdot\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{4(x+2)} = \frac{(x+2)(x^2+2x+4)}{2}; x \neq \pm 2$

f) $\dfrac{1-\frac{x-3}{x+3}}{\frac{1}{3+x}+\frac{x}{9-x^2}} = \dfrac{\frac{x+3-x+3}{x+3}}{\frac{3-x+x}{(3-x)(3+x)}} = \frac{6}{x+3}\cdot\frac{(3-x)(3+x)}{3} = 2(3-x); x \neq \pm 3$

g) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}:\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \dfrac{\frac{a^2-ab+b^2}{ab}}{\frac{a+b}{ab}}:\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2-ab+b^2}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2};$

$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b$

Neriešené úlohy

1. Rozložte na súčin:

a) $a(x) = x^3+3x^2-4x-12$ b) $b(x,y) = (x-2)^2 - x^2y^2$

c) $c(x) = x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ d) $d(x,y,z) = x^2-xz+2xy+y^2-yz$

2. Rozložte na súčin:

a) $7x^2+x-7-x^3$ b) $(2x-3)^2-(3x-4)^2$

c) $b^4-2b^2+1-(b-1)^2$ d) $(c+1)^2-(c+1)^3$

3. Zjednodušte:

a) $\frac{a^4b-81b}{2a^4-36a^2+162}$ b) $\frac{3x-2}{6x^2+5x-6}$ c) $\frac{x^2-3x+2}{2x^3-5x^2+x+2}$ d) $\frac{6a^3+13a^2-4a-6}{3a^2+8a+6}$

4. Zjednodušte:

a) $\left(x^2-y^2\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ b) $\left(a-\frac{x^2}{a}\right):\left(x-\frac{a^2}{x}\right)$

c) $\left(x^2-4xy+4y^2\right):\frac{x^2-2xy}{x^2+2xy}$ d) $\dfrac{\frac{m-n}{m+n}-\frac{m+n}{m-n}}{\frac{m-n}{m+n}+\frac{m+n}{m-n}}$

5. Zjednodušte:

a) $\dfrac{\frac{1+x}{1-x}}{\frac{1-x}{1+x}}$ b) $\dfrac{\frac{2x}{1-x^2}-x}{1+\frac{2x}{1-x^2}}$ c) $\left(a^3-b^3\right):\left(a+\frac{b^2}{a+b}\right)$ d) $\left(\frac{x^3}{y^3}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$

6. Zjednodušte:

a) $\frac{2a-2}{a^2-4a+4}\cdot\frac{(2-a)^3}{4a^2-4a}$ b) $\dfrac{\frac{x^3}{y^2}+\frac{x^2}{y}}{\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}}$ c) $\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\left(x-\frac{1-2x^2}{1-x}+1\right)$ d) $\left[\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}:\frac{x-y}{x+y}\right]:\frac{x+y}{x}$

D4. MHOČLENY (POLYNÓMY) A OPERÁCIE S NIMI

1. Základné pojmy
- jednočlen, dvojčlen
- mnohočlen

2. operácie s mnohočlenmi
- sčítanie mnohočlenov
- odčítanie mnohočlenov
- násobenie mnohočlenov
- delenie mnohočlena jednočlenom
- delenie mnohočlena mnohočlenom

……

Def.
Jednočlen je súčin čísla a mocnín premenných s nezápornými mocniteľmi.

- jednočleny sú napr.:

$$3x^2y \qquad -8xy^5 \qquad \cdots$$

Def.
Stupeň jednočlena je súčet exponentov premenných.

> napr.: $a(x,y) = 2^4x^2y^7 \ldots st(a(x,y)) = 9$

$b(x) = 4 = 4.x^0 \ldots st(b(x)) = 0$

$\vdots$

Def.
Dvojčlen (binóm) je súčet dvoch jednočlenov.

> napr.: $a(x) = 3x^3 + 7x$

$b(x,y) = 6x^3y + 4xy^2$

$\vdots$

Def.
Mnohočlen (polynóm) je súčet jednočlenov.

Def.
Stupeň mnohočlena je najväčší zo stupňov jeho členov.

Def.
Mnohočlen n-tého stupňa s jednou neznámou $x \in R$ je každý výraz tvaru
$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$; $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R; a_n \neq 0$.

> a_0 … absolútny člen, a_1x … lineárny člen, a_2x^2 … kvadratický člen, a_3x^3 … kubický člen

> $a_1x + a_0$ … lineárny dvojčlen, $a_2x^2 + a_1x + a_0$ … kvadratický trojčlen,
$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ … kubický štvorčlen

- <u>operácie s mnohočlenmi</u>

1. **sčítanie mnohočlenov** - sčítame koeficienty pri členoch s rovnakým stupňom
   > napr.:

$$a(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$$
$$b(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3x$$
$$a(x) + b(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x + 1$$

2. **odčítanie mnohočlenov** - odčítame koeficienty pri členoch s rovnakým stupňom
   > napr.:

$$a(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$$
$$b(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3x$$
$$a(x) - b(x) = x^4 + 6x^2 - 3x + 1$$

3. **násobenie mnohočlenov** - násobíme každý člen prvého mnohočlena s každým členom druhého mnohočlena
   > napr.:

$$a(x) = x^2 - 3x + 5$$
$$b(x) = 2x - 1$$
$$a(x)b(x) = (x^2 - 3x + 5)(2x - 1) =$$
$$= 2x^3 - 6x^2 + 10x - x^2 + 3x - 5 =$$
$$= 2x^3 - 7x^2 + 13x - 5$$

4. **delenie mnohočlena jednočlenom** - delíme každý člen mnohočlena jednočlenom, môže nám zostať aj zvyšok po delení
   > napr.:

$$(6x^9 - 5x^6 + 8x^4) : (2x^3) = 3x^6 - \tfrac{5}{2}x^3 + 4x$$

$(4x^5 - 10x^4 - 2x) : (2x^2) = 2x^3 - 5x^2$ … neúplný podiel a máme ešte zvyšok $-2x$

5. **delenie mnohočlena mnohočlenom** - postupujeme tak že prvý člen prvého mnohočlena delíme prvým členom druhého mnohočlena a spätne vynásobíme podielom každý člen druhého mnohočlena a takto vzniknutý člen odčítame od prvého mnohočlena > dostane zvyšok po delení a postupujeme tak isto
   > napr.:

$$(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (x - 1) = x^2 - 6x + 8$$
$$\mp x^3 \pm x^2$$
$$\theta \quad -6x^2 + 14x - 8$$
$$\pm 6x^2 \mp 6x$$
$$\theta \quad 8x - 8$$
$$\mp 8x \pm 8$$
$$\theta \quad \theta$$

Pr.

Vydeľte mnohočlen mnohočlenom:

a) $9x^4 - 13x^2 + 4; 3x^2 + 5x + 2$

$$\left(9x^4 - 13x^2 + 4\right) : \left(3x^2 + 5x + 2\right) = 3x^2 - 5x + 2$$

$$\mp 9x^4 \mp 15x^3 \mp 6x^2$$

$$\theta \quad -15x^3 - 19x^2 + 4$$

$$\pm 15x^3 \pm 25x^2 \pm 10x$$

$$\theta \quad 6x^2 + 10x + 4$$

$$\mp 6x^2 \mp 10x \mp 4$$

$$\theta \quad \theta \quad \theta$$

b) $3x^3 + 5x^2 - x + 2; x + 2$

$$\left(3x^3 + 5x^2 - x + 2\right) : \left(x + 2\right) = 3x^2 - x + 1$$

$$\mp 3x^3 \mp 6x^2$$

$$\theta \quad -x^2 - x + 2$$

$$\pm x^2 \pm 2x$$

$$\theta \quad x + 2$$

$$\mp x \mp 2$$

$$\theta \quad \theta$$

c) $x^3 - 5x^2 + 5x - 2; x - 4$

$$\left(x^3 - 5x^2 + 5x - 2\right) : \left(x - 4\right) = x^2 - x + 1$$

$$\mp x^3 \pm 4x^2$$

$$\theta \quad -x^2 + 5x - 2$$

$$\pm x^2 \mp 4x$$

$$\theta \quad x - 2$$

$$\mp x \pm 4$$

$\theta \quad 2$ … zvyšok

D5. SLOVNÉ ÚLOHY

1. Riešenie slovnej úlohy

.....

- riešenie slovnej úlohy má tri časti:

1. **matematizácia** - z jazyka slovnej úlohy prejdeme do jazyka matematiky
2. **vyriešenie** - vyriešime získanú matematickú úlohu
3. **záver** - vykonáme skúšku správnosti riešenia a v jazyku slovnej úlohy sformulujeme odpoveď

Pr.

Žiaci išli na výlet. Za tri dni prešli 65 km. Prvý deď prešli dvakrát toľko ako tretí deň. Druhý deň prešli o 10 km menej ako prvý deň. Koľko km prešli každý deň:

1. deň … $2x$
2. deň … $2x-10$
3. deň … x

$$2x+2x-10+x=65$$
$$5x=75$$
$$x=15$$

Skúška:
1. deň … 30
2. deň … 20
3. deň … 15

$$30+20+15=65$$

Žiaci prvý deň prešli 30 km, druhý deň prešli 20 km a tretí deň prešli 15 km.

Pr.

Na dvore sú sliepky a zajace. Spolu majú 22 hláv a 54 nôh. Koľko je sliepok a koľko je zajacov:

sliepok … x nôh majú … $2x$
zajacov … $22-x$ nôh majú … $4(22-x)$
spolu nôh … 54

$$2x+4(22-x)=65$$
$$2x+88-4x=54$$
$$2x=17$$
$$x=17$$

Skúška:
sliepok … 17 nôh majú … 34
zajacov … 5 nôh majú … 20

$17+5=22$ $34+20=54$

Sliepok je 17 a zajacov je 5.

Pr.

Do štyroch obchodov rozvážali tovar. V prvom obchode zložili $\frac{1}{3}$ zásielky, v druhom obchode $\frac{2}{3}$ z toho čo v prvom obchode, v treťom obchode zložili $\frac{1}{4}$ zvyšku a vo štvrtom zložili zostávajúcich 240 kg. Koľko kg zložili v každom obchode:

1. obchod … $\frac{1}{3}x$
2. obchod … $\frac{2}{3}.\frac{1}{3}x = \frac{2}{9}x$
3. obchod … $\frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{9}x\right)$
4. obchod … $240\,\text{kg} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{9}x\right)$

$$240 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{9}x\right)$$
$$240 = \frac{3}{4}x - \frac{5}{12}x = \frac{1}{3}x$$
$$x = 720$$

Skúška:

1. obchod … $240\,\text{kg}$
2. obchod … $\frac{2}{3}.240\,\text{kg} = 160\,\text{kg}$
3. obchod … $\frac{1}{4}.320\,\text{kg} = 80\,\text{kg}$
4. obchod … $240\,\text{kg} = \frac{3}{4}.320\,\text{kg}$

$$240 + 160 + 80 + 240 = 720$$

V prvom obchode zložili 240 kg, v druhom 160 kg, v treťom 80 kg a vo štvrtom obchode zložili 240 kg.

Pr.

Do nádrže priteká voda štyrmi rúrami. Prvou by sa nádrž naplnila za jeden deň, druhou za dva dni, treťou za tri dni a štvrtou za štyri dni. Za aký čas sa nádrž zaplní všetkými štyrmi rúrami:

	za jednu hodinu
1. rúra … za 1 deň	$\frac{1}{24}$ nádrže
2. rúra … za 2 dni	$\frac{1}{48}$ nádrže
3. rúra … za 3 dni	$\frac{1}{72}$ nádrže
4. rúra … za 4 dni	$\frac{1}{96}$ nádrže
spolu za 1 hodinu	$\frac{25}{288}$ nádrže

$$288 : 25 = 11{,}52$$

Skúška:

1. rúra … $11{,}52.\frac{1}{24}$ nádrže
2. rúra … $11{,}52.\frac{1}{48}$ nádrže
3. rúra … $11{,}52.\frac{1}{72}$ nádrže
4. rúra … $11{,}52.\frac{1}{96}$ nádrže

$$11{,}52.\frac{1}{24} + 11{,}52.\frac{1}{48} + 11{,}52.\frac{1}{72} + 11{,}52.\frac{1}{96} = 1$$

Spolu naplnia nádrž za 11 hodín 31 minút a 12 sekúnd

Pr.

Jeden robotník zhotoví súčiastku o štyri hodiny neskôr a druhý o deväť hodín neskôr ako keby ju robili spoločne. Za aký čas zhotoví každý súčiastku sám:

	za jednu hodinu
1. robotník … $x+4$ hodín	$\frac{1}{x+4}$
2. robotník … $x+9$ hodín	$\frac{1}{x+9}$
spolu … x hodín	$\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+9}=\frac{2x+13}{x^2+13x+36}$

$$\left(x^2+13x+36\right):\left(2x+12\right)=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{13}{4}$$
$$\mp x^2 \mp \tfrac{13}{2}x$$
$$\theta \quad \tfrac{13}{2}x+36$$
$$\mp \tfrac{13}{2}x \mp \tfrac{169}{4}$$
$$\theta \quad -\tfrac{25}{4}$$ … zvyšok

$$0=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{13-25}{4}$$
$$\tfrac{1}{2}x=3$$
$$x=6$$

Skúška:

	za jednu hodinu
1. robotník … 10 hodín	$\frac{1}{10}$
2. robotník … 15 hodín	$\frac{1}{15}$
spolu … 6 hodín	$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{25}{150}$

$$6.\tfrac{25}{150}=1$$

Prvý robotník zostrojí súčiastku za 10 hodín a druhý za 15 hodín.

Pr.

Kráľ rozdelil svojim synom stádo koní v pomere 7:6:4. Dvaja dostali spolu 143 koní. Koľko koní dostal každý:

1. syn … $7x$
2. syn … $6x$
3. syn … $4x$

1. $7x+6x=143$
$13x=143$
$x=11$

Skúška:
1. syn … 77
2. syn … 66
3. syn … 44
$77+66=143$
$77:66:44=7:6:4$

2. $7x+4x=143$
$11x=143$
$x=13$

Skúška:
1. syn … 91
2. syn … 78
3. syn … 52
$91+52=143$
$91:78:52=7:6:4$

3. $6x+4x=143$
$10x=143$
$x=14{,}3$

Skúška:
1. syn … $101{,}1$
2. syn … $85{,}8$
3. syn … $57{,}2$

nevyhovuje

Úloha má dve riešenia: 1. prvý dostal 77 koní, druhý 66 koní a tretí 44 koní
2. prvý dostal 91 koní, druhý 78 koní a tretí 52 koní.

Pr.

Sud s vodou má hmotnosť 130 kg. Keď odlejeme 75% vody, tak bude mať hmotnosť 40 kg. Koľko váži prázdny sud:

sud … x kg
sud + voda … 130 kg
sud + 15% vody … 40 kg

75% vody … $130-40=90$ kg
voda … 120 kg

$$x=130-120=10$$

Skúška:
sud …10 kg
sud + voda … 130 kg
voda … $130-10=120$ kg

Sud váži 10 kg.

Pr.

Trieda mala zozbierať 900 Sk na divadelné prestavenie, keďže päť žiakov chýbalo, tak každý zaplatil o 6 Sk viac. Koľko bolo žiakov v triede:

spolu … 900 Sk	900 Sk
žiakov … x	$x-5$
1 žiak … $\frac{900}{x}$ Sk	$\frac{900}{x-5}$ Sk

$$\frac{900}{x-5}-6=\frac{900}{x}$$
$$\frac{900-6x+30}{x-5}-\frac{900}{x}=0$$
$$\frac{930-6x}{x-5}-\frac{900}{x}=0$$
$$930x-6x^2-900x+4500=0$$
$$-6x^2+30x+4500=0$$
$$x^2-5x-750=0$$
$$(x-30)(x+25)=0$$
$$x=30 \vee x=-25$$

> žiakov bolo 30

Skúška:

spolu … 900 Sk	900 Sk
žiakov … 30	25
1 žiak … 30 Sk	36 Sk

$$36-30=6$$

Žiakov bolo 30.

Pr.

Kanadský hokejový brankár chytil v zápase so Švédskom 34 striel, čo bolo 85% zo všetkých striel na jeho bránu. Švédsky brankár chytil len 80% striel a predsa Švédsko vyhralo o jeden gól. Ako skončil zápas:

Kanada	Švédsko
34 striel chytil … 85% striel	80% striel chytil
1% striel … $34:85=0{,}4$	
100% striel … 40	
gólov … $40-34=6$	5

Zápas skončil KANADA:ŠVÉDSKO

$$5:6$$

- ukážeme si ešte zopár všeobecných úloh, pri takýchto úlohách skúšku nemôžeme vykonať, keďže pri zmene podmienok máme iný výsledok a teda máme nekonečne veľa výsledkov

Pr.

Kúpili sme m kg zemiakov po n Sk, za dovoz sme zaplatili 35 Sk. Koľko stál kilogram zemiakov s dovozom:

cena c

$$c = \frac{m.n+35}{n} = n + \frac{35}{m}$$

Za kilo zemiakov s dovozom zaplatíme $n + \frac{35}{m}$

Pr.

Vlak má n vagónov. V každom vagóne je a miest na sedenie a b miest na státie. Štyri vagóny sú plne obsadené a ostatné majú obsadené všetky miesta na sedenie polovicu miest na státie. Koľko je cestujúcich.

	cestujúcich
plne obsadené … 4	$4(a+b)$
čiastočne obsadené … $n-4$	$(n-4)(a+\frac{b}{2})$
celkom cestujúcich … $(n-4)(a+\frac{b}{2})+4(a+b)$	

Cestujúcich je $(n-4)(a+\frac{b}{2})+4(a+b)$.

Pr.

Auto má spotrebu s litrov na 100 km a v nádrži je a litrov. Koľko litrov bude v nádrži po prejdení 230km? O koľko sa zmenší hmotnosť auta?

spotreba na 100 km … s litrov
v nádrži … a litrov
dráha … 230 km
hmotnosť auta … b kg
hmotnosť auta s benzínom … x kg
celková spotreba … $2{,}3s$ litrov
po skončení bude v nádrži … $a-2{,}3s$ litrov
hmotnosť auta so zvyškom benzínu … $b+(x-b)-2{,}3s.\rho$

V nádrži bude $a-2{,}3s$ litrov a hmotnosť sa zmenší o $2{,}3s.\rho$ (ρ je hustota benzínu).

Neriešené úlohy

1. Na schôdzu prišlo trikrát viac mužov ako žien. Keď osem mužov a osem žien odišlo, tak bolo mužov päťkrát viac ako žien. Koľko mužov a žien bolo na začiatku?

2. Kvalifikovaný robotník zarobí denne o 90 Sk viac ako pomocník, za päť dní zarobí o 350 Sk menej ako pomocník za desať dní. Koľko denne zarobí každý?

3. Určitú prácu vykonalo a robotníkov za b dní. Koľko robotníkov treba ešte zamestnať, aby prácu vykonali o šesť dní skôr?

4. Prázdne auto má hmotnosť a kg a naložené má hmotnosť b kg. Akú hmotnosť má s tretinou nákladu?

5. V obchode zmiešali a kg cukríkov po 30 Sk a b kg cukríkov po 43 Sk. Koľko stál kilogram zmesi?

6. V nádrži je 150 litrov vody, každú minútu pritečie n litrov a odtečie m litrov. Koľko vody bude v nádrži po t minútach, ak odtok otvoríme o tri minúty neskôr ako prítok?

D6. PLANIMETRIA

1. Základné pojmy

2. Axiomatický systém
- primitívne pojmy
- axiómy

3. Konvexné útvary
- uhly
- trojuholník
- kružnica, kruh, Talesova veta

4. Množiny bodov danej vlastnosti

5. Konštrukčné úlohy
- riešené geometricky
- riešené algebraicko-geometrickou metódou

.....

- geometria patrí medzi najstaršie matematické vedné disciplíny, planimetria je geometria v rovine

- vznikla z praktických potrieb ľudí – meranie, staviteľstvo, astronómia, …

- vznikla v 7.-6. stor. p.n.l. - Tales z Milétu , Pytagoras zo Samu, Euklides
  > 13 základných kníh
  > axiomatická výstavba teórie

- ďalej sa geometrii venovali Gauss, Bólai, Lobačevskij, …

-1899 - Hilbert - uzavretá axiomatická výstavba

- <u>axiomatický systém planimetrie</u>

- obsahuje:

1. **primitívne pojmy**
   - sú to pojmy, ktoré sa nedefinujú (ich význam je známy bez definície)
   - delia sa na :

a) **primitívne objekty**
- bod … $A, B, C, \ldots$
- priamka … $a, b, \ldots, p, q, \ldots$
- rovina … $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \nu, \ldots, \pi, \rho, \sigma, \tau, \ldots$

b) **primitívne vzťahy**
- leží na (v) … $A \in p$ … bod A leží na priamke p
  $A \in \rho$ … bod A leží v rovine ρ
  $p \subset \rho$ … priamka p leží v rovine ρ
- leží medzi … $\mu(ABC)$ … bod B leží medzi bodmi A a C
- zhodnosť (úsečiek a uhlov) … $\underline{AB} \cong \underline{CD}$
  $\measuredangle \alpha \cong \measuredangle \beta$

[*veľkosť (úsečky a uhla)*] - tiež sa nedefinuje

> všetky ostatné pojmy sa definujú

Def.

Priamky p, q sú v rovine rovnobežné ak $p = q \vee p \cap q = \theta$.

Def.

Priamky p, q sú v rovine rôznobežné ak sú rôzne a ich prienik je neprázdna množina.

2. **axiómy (postuláty)**

- sú to výroky (vety), ktoré považujeme za pravdivé bez dôkazu

Veta (A)

Existujú aspoň tri body, ktoré neležia na jednej priamke.

Veta (A)

Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna priamka.

Veta (A)

Na každej priamke ležia aspoň dva rôzne body.

Veta (A)

Medzi každými dvoma rôznymi bodmi leží aspoň jeden bod.

Veta (A)

Pre každý bod A a pre každú priamku p existuje práve jedna priamka q také, že platí $A \in q \wedge p \parallel q$.

> všetky ostatné vety sa dokazujú

Veta

Na každej priamke leží nekonečne veľa bodov.

Dôkaz

- podľa axiómy medzi každými dvoma bodmi leží aspoň jeden bod

- priamka je určená práve dvoma bodmi a medzi nimi je teda aspoň jeden bod

> ale medzi týmto bodom a krajnými musí zase byť bod a teda už máme päť bodov

> a takto môžeme pokračovať do nekonečna, teda na priamke leží nekonečne veľa bodov

- úsečka

Def.

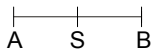
Úsečka s krajnými bodmi A, B je množina obsahujúca body A, B a všetky body X také, ktoré ležia medzi bodmi A, B ($\mu(AXB)$).

- označujeme ju $\underline{AB}$ a jej veľkosť $|AB|$

Def.

Stred úsečky A, B je bod S taký, ktorý ju delí na dve zhodné úsečky.

$S = A \div B$

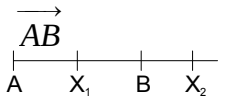


- <u>polpriamka</u>

<u>Def.</u>

Polpriamka so začiatkom v bode A a vnútorným bodom B je množina obsahujúca:

1. body A, B
2. všetky body X také, ktoré ležia medzi bodmi A, B ($\mu(AXB)$)
3. všetky body X také, že bod B leží medzi bodmi A, X ($\mu(ABX)$)



- označujeme ju $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB^x}$ $\overrightarrow{AB}$

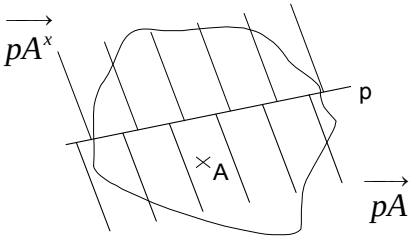
$\overrightarrow{AB^x}$ - opačná polpriamka ku polpriamke $\overrightarrow{AB}$

- <u>polrovina</u>

<u>Def.</u>

Polrovina určená hranicou polroviny (priamkou) p a vnútorným bodom A je časť roviny ohraničená priamkou p a obsahujúca bod A.

- označujeme ju $\overrightarrow{pA}$ (ak $p = \overleftrightarrow{BC}$, tak ju môžeme označiť aj $\overrightarrow{BCA}$)



$\overrightarrow{pA^x}$ - opačná polrovina k polrovine $\overrightarrow{pA}$

<u>Def.</u>

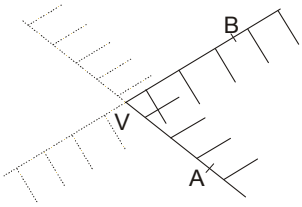
Rovinný útvar U sa nazýva konvexný, ak platí $\forall X, Y \in U : \underline{XY} \subset U$

- <u>uhly</u>

<u>Def.</u>

Konvexný uhol AVB je prienik polrovín $\overrightarrow{AVB}$ a $\overrightarrow{BVA}$.

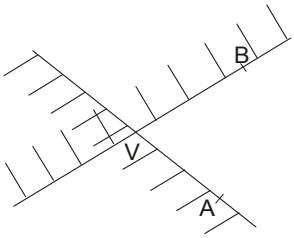
$$\boxed{\measuredangle AVB = \overrightarrow{AVB} \cap \overrightarrow{BVA}}$$



<u>Def.</u>

Nekonvexný uhol AVB je zjednotenie polrovín opačných ku $\overrightarrow{AVB}$ a $\overrightarrow{BVA}$.

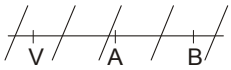
$$\boxed{\measuredangle AVB = \overrightarrow{AVB^x} \cup \overrightarrow{BVA^x}}$$



Def.
Nulový uhol je polpriamka.

Def.
Priamy uhol je polrovina.

Def.
Plný uhol je rovina.

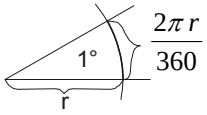


1. stupňová miera uhla

- jednotkou je 1° (jeden stupeň)

Def.
1° je veľkosť uhla, ktorému na kružnici, so stredom vo vrchole uhla a polomerom r, prislúcha kružnicový oblúk dĺžky $\frac{2\pi r}{360}$.

$$\boxed{1° = \frac{2\pi r}{360}}$$

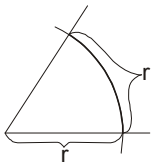


2. oblúková miera uhla

- jednotkou je 1 rad (jeden radián)

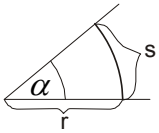
Def.
1 radián je veľkosť uhla, ktorému na kružnici, so stredom vo vrchole uhla a polomerom r, prislúcha kružnicový oblúk dĺžky r.

$$\boxed{1 \text{ rad} \doteq 57°17'44''}$$



Def.
Veľkosť uhla v oblúkovej miere je číslo $\alpha = \frac{s}{r}$, kde r je polomer kružnice so stredom vo vrchole uhla a s je dĺžka oblúka, ktorý danému uhlu prislúcha.

$$\boxed{\alpha = \frac{s}{r}}$$

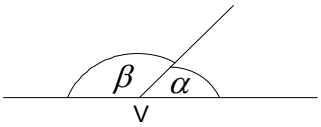


- prevody z jednej miery do druhej:

1. $\boxed{\alpha_r = \frac{\pi}{180°}.\alpha°}$ 2. $\boxed{\alpha° = \frac{180°}{\pi}.\alpha_r}$

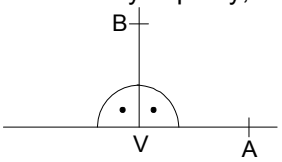
- dvojice uhlov

Def.
Dva konvexné uhly sa nazývajú susedné, ak majú jedno rameno spoločné a ďalšie dve ramená sú opačné polpriamky.



Def.

Konvexný uhol sa nazýva pravý, ak je zhodný so svojím susedným uhlom.

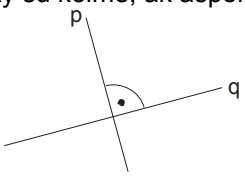


$\measuredangle AVB \cong R$

$\measuredangle AVB = 90°$

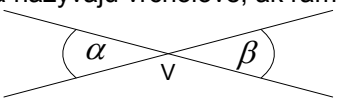
Def.

Dve priamky sú kolmé, ak aspoň jeden uhol nimi určený je pravý.



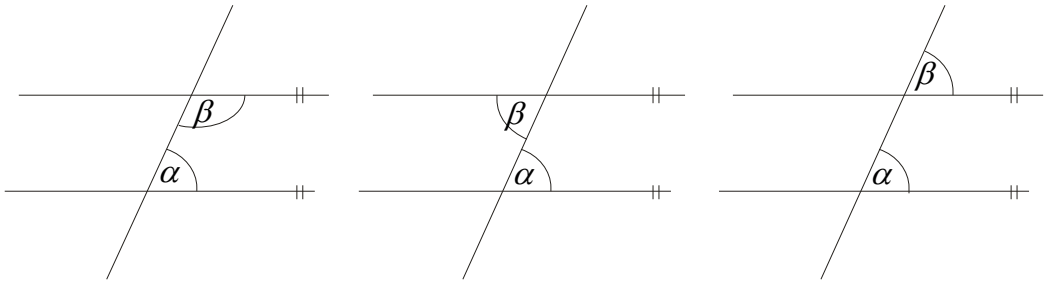
Def.

Dva uhly sa nazývajú vrcholové, ak ramená jedného sú opačné polpriamky k ramenám druhého.



$\alpha = \beta$

- ak si zoberiem dve rovnobežky a pretneme ich priamkou s nimi rôznobežnou (priečka rovnobežiek), tak dostaneme ďalšie dvojice uhlov:



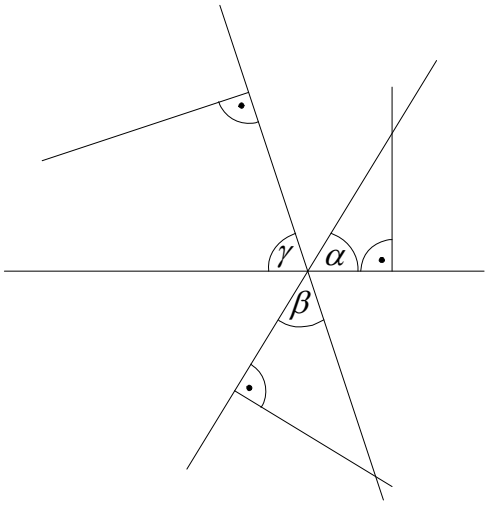
priľahlé uhly $\alpha + \beta = 180°$

striedavé uhly $\alpha = \beta$

súhlasné uhly $\alpha = \beta$

Pr.

Určite $\alpha + \beta + \gamma$



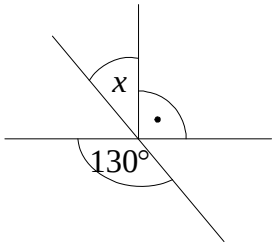
- vidno, že uhol medzi uhlami α a γ je vrcholový s uhlom β a teda mu je rovný

> tak máme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Pr.

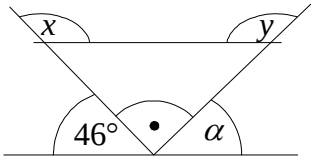
Určite x resp. y:

a)



$$x + R = 130°$$
$$x = 130° - 90°$$
$$x = 40°$$

b)



$$y = 46° + R = 46° + 90°$$
$$y = 136°$$
$$\alpha = 180° - 46° - 90° = 44°$$
$$x = \alpha + R = 44° + 90°$$
$$x = 134°$$

- trojuholník

- na tomto mieste do teórie planimetrie patrí trojuholník, ale keďže je mu venovaná celá kapitola 19., tak ho vynecháme a čitateľ sa môže ku tejto kapitole vrátiť (strany 241-258)

- kružnica, kruh

Def.

Kružnica k so stredom S a polomerom $r \in R^+$ je množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od stredu S je r.

$$k(S,r) = \{x \in \rho; |XS| = r\}$$

Def.

Kruh K so stredom S a polomerom $r \in R^+$ je množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od stredu S je najviac r.

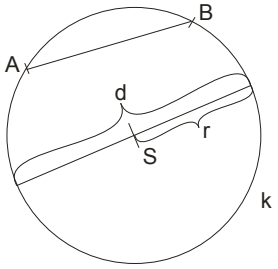
$$K(S,r) = \{x \in \rho; |XS| \le r\}$$

Def.

Tetiva kružnice je úsečka, ktorej koncové body ležia na kružnici.

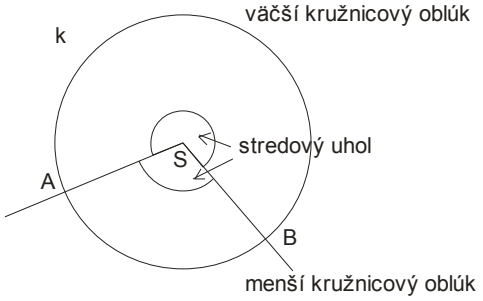
Def.

Priemer kružnice je tetiva prechádzajúca stredom.



Def.

Stredový uhol je uhol, ktorý má vrchol v strede kružnice.

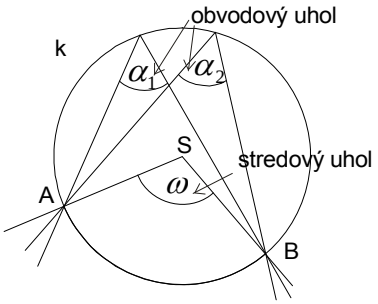


Def.

Stredový uhol prislúchajúci oblúku $\widehat{AB}$ je ten uhol $\sphericalangle ASB$, ktorý obsahuje oblúk $\widehat{AB}$.

Def.

Obvodový uhol prislúchajúci oblúku $\widehat{AB}$ je každý $\sphericalangle AXB$ taký, že $X \in k \wedge X \notin \widehat{AB}$.



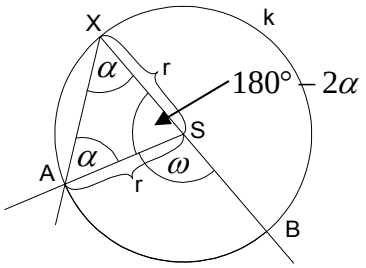
$$\omega = 108°$$
$$\alpha_1 = 54°$$
$$\alpha_2 = 54°$$

Veta

V každej kružnici je stredový uhol dvojnásobkom ľubovoľného obvodového uhla, prislúchajúceho tomu istému kružnicovému oblúku.

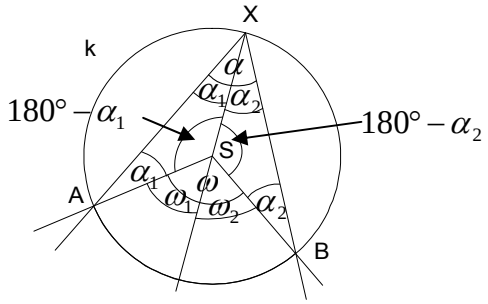
Dôkaz

1.



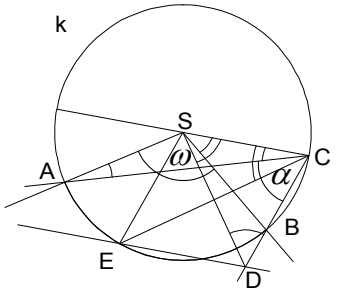
$$180° = 180° - 2\alpha + \omega$$
$$\omega = 2\alpha$$

2.



$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$180° = 180° - 2\alpha_1 + \omega_1 \ldots 2\alpha_1 = \omega_1$$
$$180° = 180° - 2\alpha_2 + \omega_2 \ldots 2\alpha_2 = \omega_2$$
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$$

3.



$\omega = \measuredangle ASB \qquad \alpha = \measuredangle ACB$

$EDCS$ - je kosoštvorec a jeho uhlopriečky rozpoľujú uhly

$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$

$\omega_1 = \measuredangle ASE \qquad \omega_2 = \measuredangle ESD \qquad \omega_3 = \measuredangle DSB$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

$\alpha_1 = \measuredangle ECB = \measuredangle ECD \qquad \alpha_2 = \measuredangle ACE$

- zoberme si trojuholník ΔSDC:
  - vidno, že: $|SC| = |CD| = r$ teda je rovnoramenný
  - ďalej uhly: $\measuredangle DSC = \measuredangle SDC = \omega_2$

    $\measuredangle ECD = \measuredangle ECS = \alpha_1$ a teda $\measuredangle DCS = 2\alpha_1$

  > teda platí:

$$180° = 2\alpha_1 + 2\omega_2$$
$$180° = 2(\alpha_1 + \omega_2)$$
$$90° = \alpha_1 + \omega_2$$
$$90° - \alpha_1 = \omega_2$$

- teraz si zoberme trojuholník ΔACS:
  - vidno, že: $|SC| = |AS| = r$ teda je rovnoramenný
  - ďalej uhly: $\measuredangle ACS = \measuredangle CAS = \alpha_1 - \alpha_2$

    $\measuredangle ESD = \measuredangle DSC = \omega_2$ a $\measuredangle ASE = \omega_1$, teda

    $\measuredangle ASC = \omega_1 + 2\omega_2$

  > teda platí:

$$180° = 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \omega_1 + 2\omega_2$$
$$180° = 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \omega_1 + 2(90° - \alpha_1)$$
$$180° = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \omega_1 + 180° - 2\alpha_1$$
$$180° = -2\alpha_2 + \omega_1 + 180°$$
$$2\alpha_2 = \omega_1$$

- zoberme si trojuholník ΔSBC:
  - vidno, že: $|SC| = |SB| = r$ teda je rovnoramenný
  - ďalej uhly: $\measuredangle ECD = \measuredangle ECS = \alpha_1$, teda $\measuredangle SCB = 2\alpha_1 = \measuredangle SBC$

    $\measuredangle BSC = \omega_2 - \omega_3$

  > teda platí:

$$180° = 4\alpha_1 + \omega_2 - \omega_3$$
$$180° = 4\alpha_1 + 90° - \alpha_1 - \omega_3$$
$$90° = 3\alpha_1 - \omega_3$$
$$3\alpha_1 - 90° = \omega_3$$

> a dostávame:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2\alpha_2 + 90° - \alpha_1 + 3\alpha_1 - 90° =$$
$$= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$$

Veta

Všetky obvodové uhly prislúchajúce tomu istému kružnicovému oblúku sú zhodné.

Dôkaz

- obvodový uhol je polovica zo stredového uhla a ak dva obvodové uhly prislúchajú jednému kružnicovému oblúku, tak sú polovicou jedného stredového uhla a teda sú zhodné

Veta (Talesova)

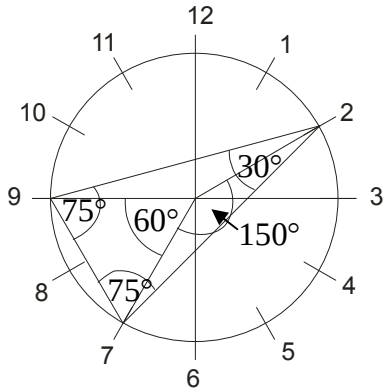
Každý obvodový uhol prislúchajúci polkružnici je pravý. $\tau(AB)$

Dôkaz

- stredový uhol ku polkružnicovému oblúku je 180° a teda obvodový musí byť 90°

Pr.

Určite vnútorné uhly trojuholníka, ktorý vznikne spojením bodov $2, 7, 9$ na ciferníku hodín:



- množiny bodov danej vlastnosti

- sú tri spôsoby určovania množín:

1. vymenovaním prvkov
2. charakteristickou vlastnosťou
   > množina bodov danej vlastnosti, určíme geometrické miesto bodov - kružnica, úsečka, …
3. výsledok operácie s inými množinami

Pr.

Čo je množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od bodu S je najviac 1,5 cm:

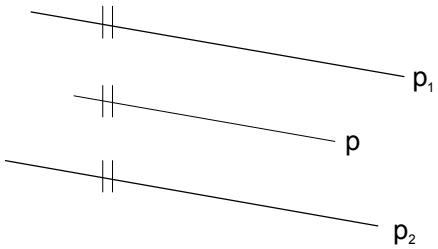
- bude to kruh s polomerom 1,5 cm

$$\{X \in \rho; |XS| \leq 1{,}5\,cm\} = K(S; 1{,}5\,cm)$$

Pr.

Čo je množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od priamky p je 1 cm:

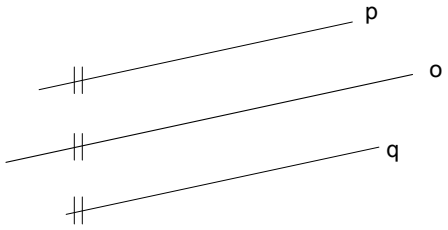
$$\{X \in \rho; |Xp| = 1\,cm\} = p_1 \cup p_2$$



Pr.

Čo je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od dvoch rôznych rovnobežiek rovnakú vzdialenosť:

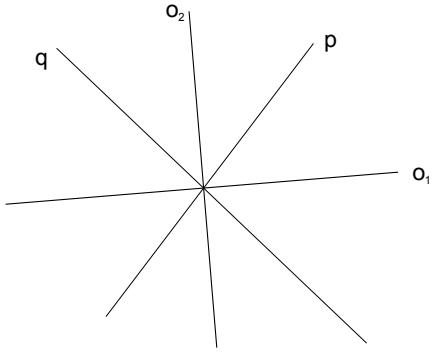
$$\{X \in \rho; |Xp| = |Xq|;\ p \parallel q\} = o$$ … os rovnobežiek



Pr.

Čo je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od dvoch rôznobežiek rovnakú vzdialenosť:

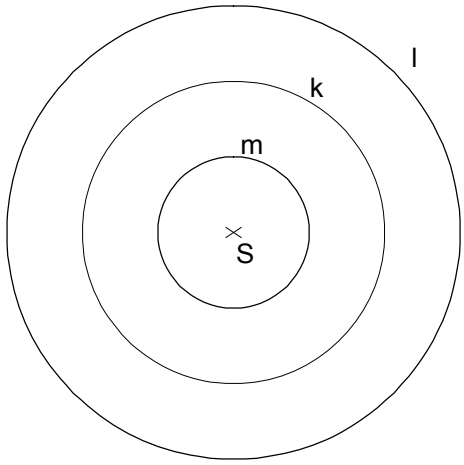
$$\{X \in \rho; |Xp| = |Xq|;\ p \nparallel q\} = o_1 \cup o_2$$ … osi rôznobežiek



Pr.

Čo je množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od kružnice $k(S, 2\,cm)$ je 1 cm:

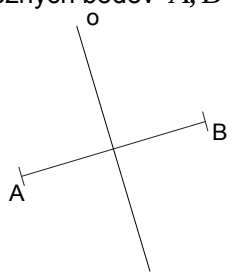
$$\{X \in \rho; |Xk| = 1cm\} = l \cup m$$ … sústredné kružnice



Pr.

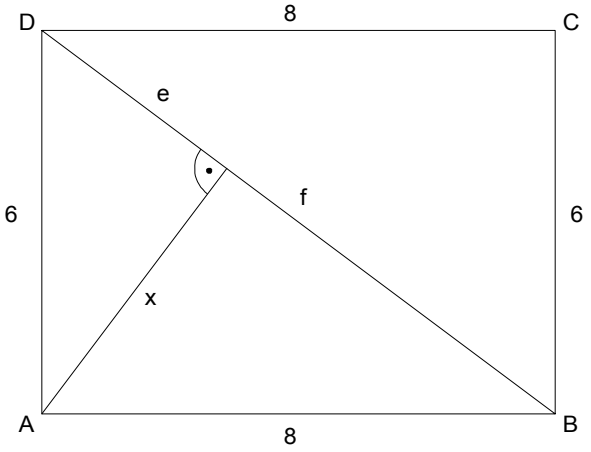
Čo je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od dvoch rôznych bodov A, B rovnakú vzdialenosť:

$$\{X \in \rho; |XA| = |XB|\} = o$$ … os úsečky



Pr.

Obdĺžnik má rozmery $a = 8, b = 6$. V akom pomere delí jeho uhlopriečku BD kolmica z vrcholu A. Vypočítajte vzdialenosť $|A\underline{BD}|$



- využijeme tu dvojité vyjadrenie obsahu:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{|AB||AD|}{2} = |BD| \cdot \frac{x}{2}$$

$$\frac{|AB||AD|}{2} = |BD| \cdot \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{|AB||AD|}{|BD|} = \frac{8.6}{10} = 4{,}8\,cm$$

- ďalej použitím Pytagorovej vety máme:

$$f^2 = |AB|^2 - x^2$$

$$e^2 = |AD|^2 - x^2$$

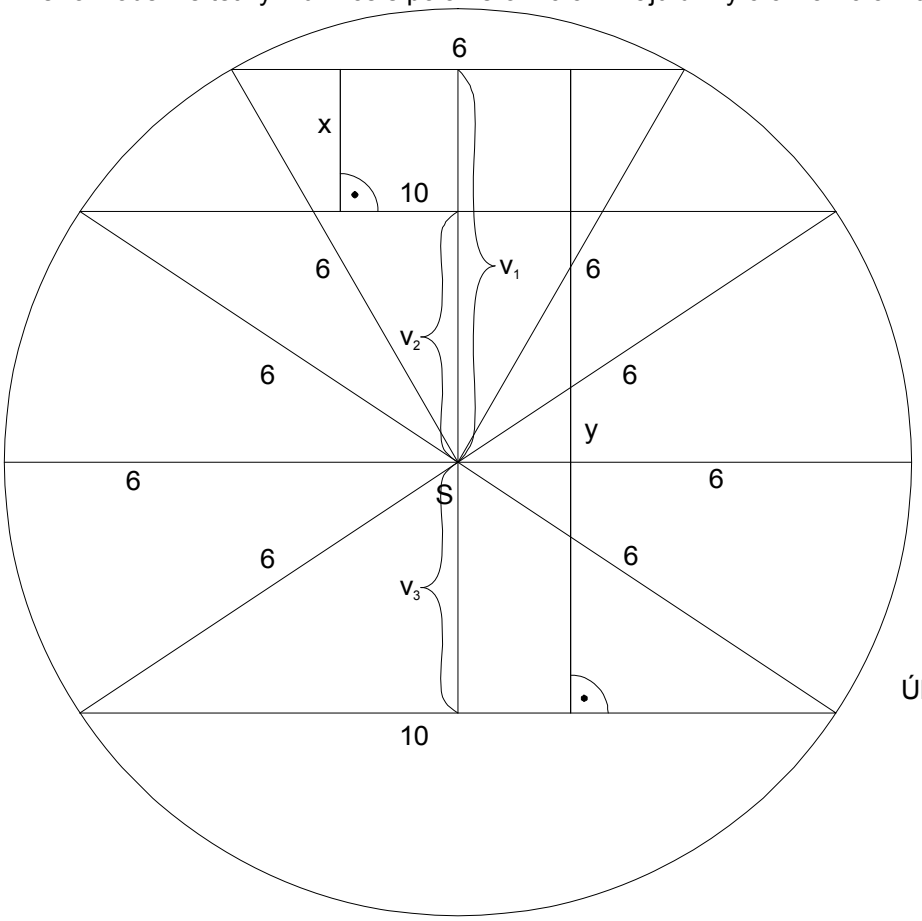
$$f = \sqrt{64 - 23{,}04} = \sqrt{40{,}96} = 6{,}4 \qquad e = \sqrt{36 - 23{,}04} = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6$$

$$\frac{f}{e} = \frac{64}{36} = 1{,}\overline{7}$$

Kolmica z bodu A delí uhlopriečku BD v pomere $1 : 1{,}\overline{7}$ a bod A je od nej vzdialená 4,8 cm

Pr.

Dve rovnobežné tetivy kružnice s polomerom 6 cm majú dĺžky 6 cm a 10 cm určite ich vzdialenosť:



$$x = v_1 - v_2$$

$$y = v_1 + v_3$$

$$v_3 = v_2$$

$$v_1 = \sqrt{6^2 - 3^2}$$

$$v_1 = \sqrt{27}$$

$$v_2 = \sqrt{6^2 - 5^2}$$

$$v_2 = \sqrt{11}$$

$$x = \sqrt{27} - \sqrt{11}$$

$$y = \sqrt{27} + \sqrt{11}$$

$$x \doteq 1{,}88\,cm$$

$$y \doteq 8{,}52\,cm$$

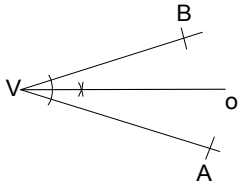
Úloha má dve riešenia:

1. tetivy sú vzdialené $\sqrt{27} - \sqrt{11}$
2. tetivy sú vzdialené $\sqrt{27} + \sqrt{11}$

Pr.

Čo je množina všetkých bodov uhlu $\measuredangle AVB$, ktoré majú od ramien uhla rovnakú vzdialenosť:

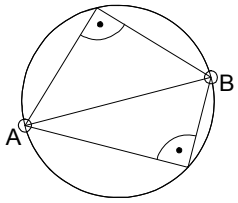
$$\left\{X \in \measuredangle AVB; \left|\overrightarrow{XVA}\right| = \left|\overrightarrow{XVB}\right|\right\} = o \text{ … os uhla}$$



Pr.

Čo je množina všetkých bodov X roviny takých, že $\measuredangle AXB \cong R$ a $A, B \in \rho$

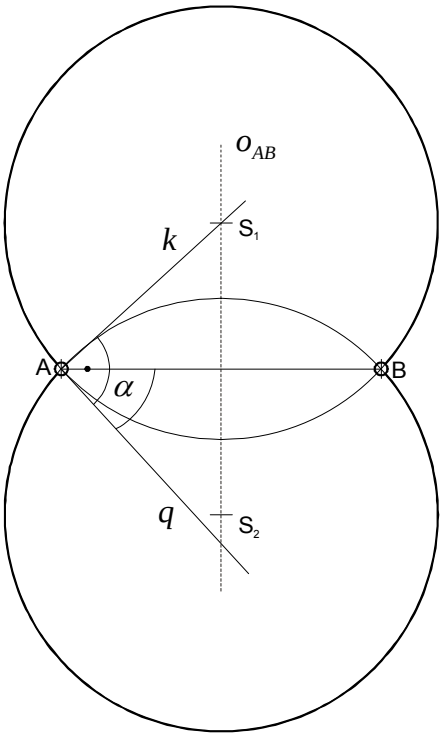
$$\left\{X \in \rho; \measuredangle AXB \cong R\right\} = \tau(AB) - \{A, B\}$$



- ďalšia množina bodov danej vlastnosti je $G(AB, \alpha)$ - množina všetkých bodov, z ktorých vidno úsečku AB pod uhlom α

> zostrojenie $G(AB, \alpha)$:

$G(AB, \alpha)$

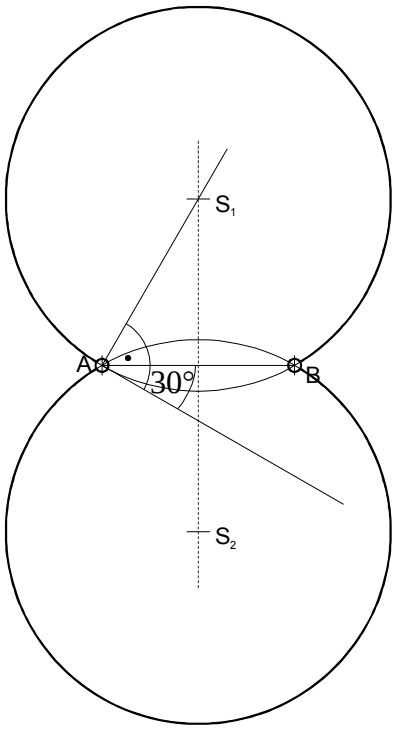


1. $\underline{AB}$
2. o_{AB}
3. $q; \left|\angle q \underline{AB}\right| = \alpha$
4. $k; k \perp q, A \in k$
5. $S_1; S_1 = o_{AB} \cap k$
6. $S_2; \left|S_2 \underline{AB}\right| = \left|S_1 \underline{AB}\right|$
7. $k_1\left(S_1, \left|AS_1\right|\right)$
8. $k_2\left(S_2, \left|AS_1\right|\right)$
9. $G(AB, \alpha)$

Pr.

Čo je množina všetkých bodov roviny X takých, že $|\measuredangle AXB| = 30°$ a $A, B \in \rho$

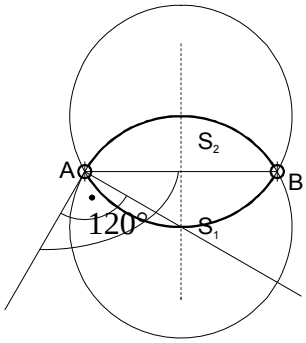
$$\{X \in \rho; |\measuredangle AXB| = 30°\} = G(AB, 30°)$$



$G(AB, 30°)$

Pr.

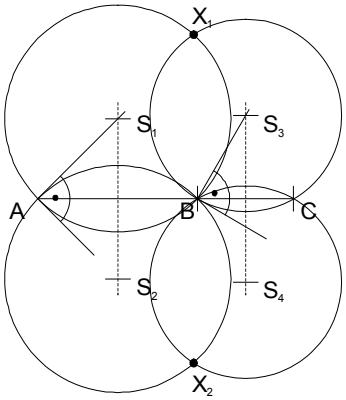
Zostrojte $G(AB, 120°)$



$G(AB, 120°)$

Pr.

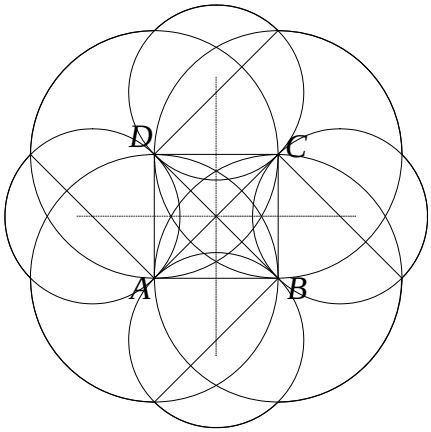
Je daná úsečka AC tak, že $AC = 4cm$ a na nej bod B tak, že $|AB| = 2{,}5cm$. Nájdite všetky body roviny, z ktorých úsečku AB vidieť pod uhlom $45°$ a zároveň úsečku BC pod uhlom $30°$



$$\{X \in \rho; |\angle AXB| = 45° \wedge |\angle BXC| = 30°\} = \{X_1, X_2\}$$

Pr.

Je daný štvorec $ABCD$. Nájdite všetky body roviny, z ktorých je vidieť štvorec pod uhlom 45°



- konštrukčné úlohy

- riešenie konštrukčnej úlohy má tri časti:

1. **rozbor** - predpokladáme, že hľadaný útvar je zostrojený a nájdeme vzťahy medzi danými a konštruovanými útvarmi (náčrt)

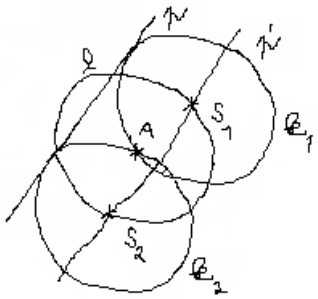
2. **konštrukcia** - na základe rozboru zostrojíme postup konštrukcie a vykonáme ju

3. **záver** - overíme, či zostrojený útvar má požadované vlastnosti, zistíme počet riešení a určíme podmienky riešiteľnosti

Pr.

Je daná priamka p a bod A tak, že $|Ap| = 2\,cm$. Zostrojte všetky kružnice s polomerom $r = 3\,cm$, ktoré sa dotýkajú priamky p a prechádzajú bodom A:

Rozbor:



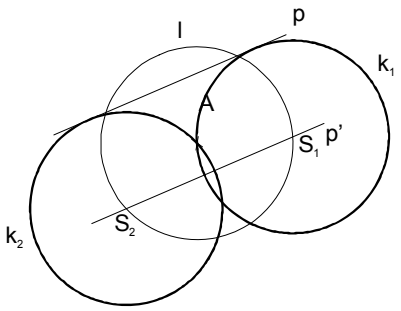
$S : |Sp| = |SA| = 3\,cm$

$S \in p' \wedge S \in l(A, 3\,cm)$

$S \in p' \cap l$

Konštrukcia:

1. $p'; |pp'| = 3\,cm$
2. $l(A, 3\,cm)$
3. $S \in p' \cap l$
4. $K(S, 3\,cm)$



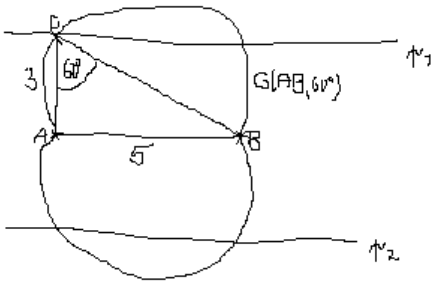
Záver:

- úloha má dve riešenia

Pr.

Je daná úsečka AB tak, že $|AB| = 5cm$. Zostrojte všetky trojuholníky ABC také, že $\gamma = 60°$ a $v_c = 3cm$

Rozbor:



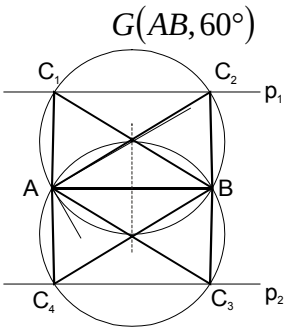
$C : \gamma = 60° \wedge |C\underline{AB}| = 3cm$

$C \in G(AB, 60°) \wedge C \in p_1 \cup p_2$

$C \in G(AB, 60°) \cap (p_1 \cup p_2)$

Konštrukcia:

1. $p_1 \cup p_2; |p_1\underline{AB}| = |p_2\underline{AB}| = 3cm$
2. $G(AB, 60°)$
3. $C \in G(AB, 60°) \cap (p_1 \cup p_2)$
4. ΔABC



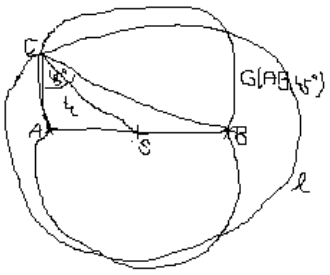
Záver:

- úloha má štyri riešenia

Pr.

Je daná úsečka AB tak, že $|AB| = 5cm$. Zostrojte všetky trojuholníky ABC také, že $\gamma = 45°$ a $t_c = 4{,}5cm$

Rozbor:



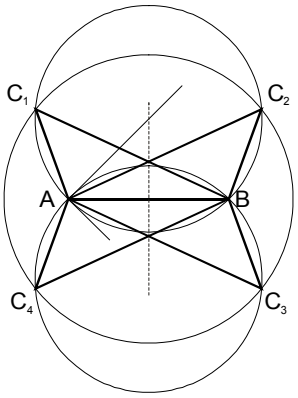
$C : \gamma = 45° \wedge t_c = 4{,}5cm$

$C \in G(AB, 45°) \wedge C \in l(S; 4{,}5); S = A\overline{\cdot}B$

$C \in G(AB, 60°) \cap l$

Konštrukcia:

1. $G(AB, 45°)$
2. $l(S; 4{,}5cm)$
3. $C \in G(AB, 45°) \cap l$
4. ΔABC



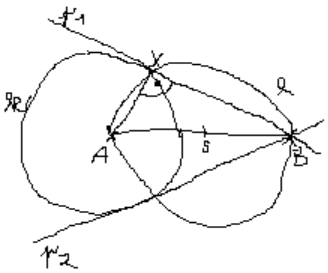
Záver:

- úloha má štyri riešenia

Pr.

Sú dané body A, B tak, že $|AB| = 5\,cm$. Zostrojte všetky priamky prechádzajúce bodom B tak, že bod A je od nich vzdialený $2\,cm$

Rozbor:



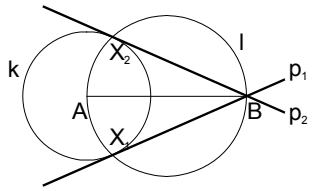
$X : \measuredangle AXB = 90° \wedge |AX| = 2\,cm$

$X \in k(A, 2\,cm) \wedge X \in l = \tau(AB)$

$X \in k \cap l$

Konštrukcia:

1. $l(S; 4{,}5\,cm)$
2. $k(A; 2\,cm)$
3. $X \in k \cap l$
4. $p; B \in p \wedge X \in p$



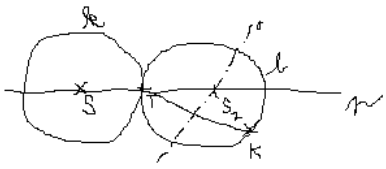
Záver:

- úloha má dve riešenia

Pr.

Je daná kružnica $k(S, 3\,cm)$, ne nej bod T a mimo nej bod K. Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú kružnice k v bode T a prechádzajú bodom K

Rozbor:



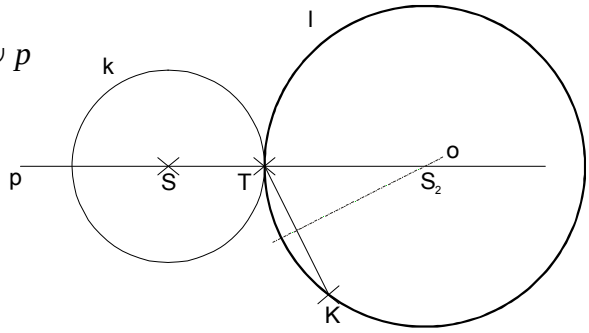
$S_2 : |TS_2| = |TS_2| \wedge S_2 \in p$

$S_2 \in o_{TK} \wedge S_2 \in p$

$S_2 \in o_{TK} \cap p$

Konštrukcia:

1. $p; S \in p \wedge T \cup p$
2. o_{TK}
3. $S_2 \in o_{TK} \cap p$
4. $l(S_2, |TS_2|)$



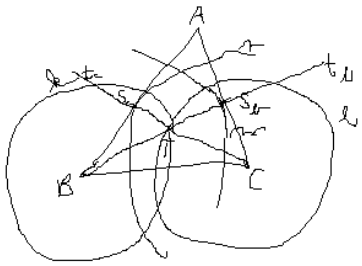
Záver:

- ak $\measuredangle STK \cong R$, tak úloha nemá riešenie a ak $\measuredangle STK \neq R$, tak úloha má práve jedno riešenie

Pr.

Je daná úsečka BC tak, že $|BC| = 5cm$. Zostrojte všetky trojuholníky ΔABC tak, že $t_b = 6cm$ a $t_c = 3cm$

Rozbor:



$T : |BT| = \frac{2}{3}t_b \wedge |CT| = \frac{2}{3}t_c$

$T \in k(B, \frac{2}{3}t_b) \wedge T \in l(C, \frac{2}{3}t_c)$

$T \in k \cap l$

$S_b : S_b \in \overleftrightarrow{BT} \wedge S_b \in m(B, t_b)$

$S_b \in \overleftrightarrow{BT} \cap m$

$S_c : S_c \in \overleftrightarrow{CT} \wedge S_c \in n(C, t_c)$

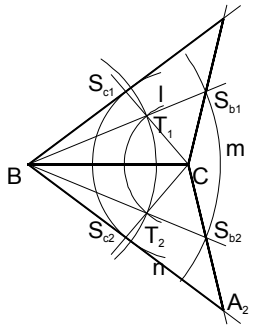
$S_c \in \overleftrightarrow{CT} \cap n$

$A : A \in \overleftrightarrow{BS_c} \wedge A \in \overleftrightarrow{CS_b}$

$A : A \in \overleftrightarrow{BS_c} \cap \overleftrightarrow{CS_b}$

Konštrukcia:

1. $k(B, \frac{2}{3}t_b)$
2. $l(C, \frac{2}{3}t_c)$
3. $S_b; S_b \in \overleftrightarrow{BT} \wedge S_b \in m(B, t_b)$
4. $S_c; S_c \in \overleftrightarrow{CT} \wedge S_c \in n(C, t_c)$
5. $A; A \in \overleftrightarrow{BS_c} \cap \overleftrightarrow{CS_b}$
6. ΔABC



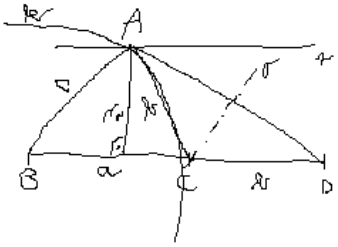
Záver:

- úloha má dve riešenia

Pr.

Zostrojte trojuholník ΔABC, ak platí: $a + b = 10cm, c = 5cm, v_a = 3cm$

Rozbor:



$A : |A\overleftrightarrow{BD}| = 3cm \wedge |AB| = 5cm$

$A \in p_1 \cup p_2 \wedge A \in k(B, 5cm)$

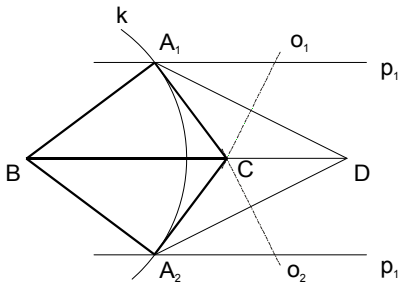
$A \in (p_1 \cup p_2) \cap k$

$C : C \in \overleftrightarrow{AD} \wedge C \in o_{AD}$

$C \in \overleftrightarrow{AD} \cap o_{AD}$

Konštrukcia:

1. BD
2. $p_1 \cup p_2; |p_1\overleftrightarrow{BD}| = |p_2\overleftrightarrow{BD}| = 3cm$
3. $k(B, 5cm)$
4. $A \in (p_1 \cup p_2) \cap k$
5. ΔABD
6. $C \in \overleftrightarrow{AD} \cap o_{AD}$
7. ΔABC



Záver:

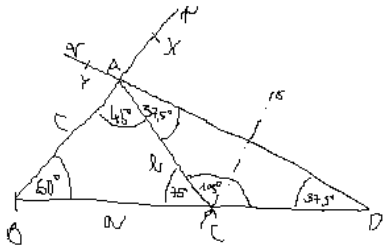
- úloha má dve riešenia

Pr.

Zostrojte trojuholník ΔABC, ak:

a) $a+b=10\,cm, \alpha=45°, \beta=60°$

Rozbor:



$A: A \in p \wedge A \in q$

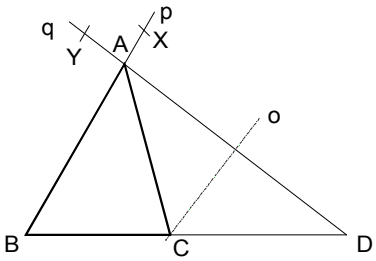
$A \in p \cap q$

$C: C \in \overleftrightarrow{AD} \wedge C \in o_{AD}$

$C \in \overleftrightarrow{AD} \cap o_{AD}$

Konštrukcia:

1. BD
2. $p; |\sphericalangle DBX| = 60° \wedge X \in p$
3. $q; |\sphericalangle BDY| = 37{,}5° \wedge Y \in q$
4. $A \in p \cap q$
5. ΔABD
6. $C \in \overleftrightarrow{AD} \cap o_{AD}$
7. ΔABC

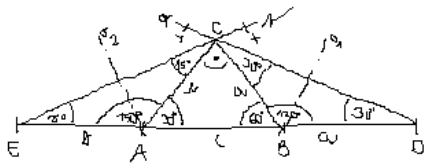


Záver:

- úloha má jedno riešenie

b) $a+b+c=12\,cm, \alpha=30°, \beta=60°$

Rozbor:



$C: C \in p \wedge C \in q$

$C \in p \cap q$

$B: B \in \overleftrightarrow{ED} \wedge B \in o_{CD}$

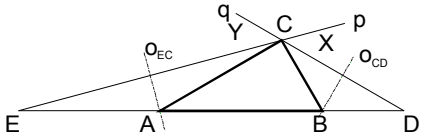
$B \in \overleftrightarrow{ED} \cap o_{CD}$

$A: A \in \overleftrightarrow{ED} \wedge A \in o_{EC}$

$A \in \overleftrightarrow{ED} \cap o_{EC}$

Konštrukcia:

1. ED
2. $p; |\sphericalangle XED| = 15° \wedge X \in p$
3. $q; |\sphericalangle YDE| = 30° \wedge Y \in q$
4. $C \in p \cap q$
5. ΔEDC
6. $A \in \overleftrightarrow{ED} \cap o_{EC}$
7. $B \in \overleftrightarrow{ED} \cap o_{CD}$
8. ΔABC



Záver:

- úloha má jedno riešenie

- <u>konštrukčné úlohy riešené algebraicko-geometrickou metódou</u>

<u>Pr.</u>

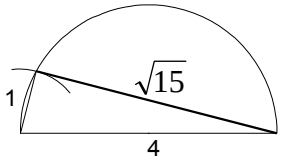
Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{15}$, pomocou Pytagorovej a Euklidových viet:

a) Pytagorova veta $c^2 = a^2 + b^2$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{15} \ldots a^2 = 15 = 4^2 - 1^2$$

$$a = \sqrt{15}, b = 1, c = 4$$

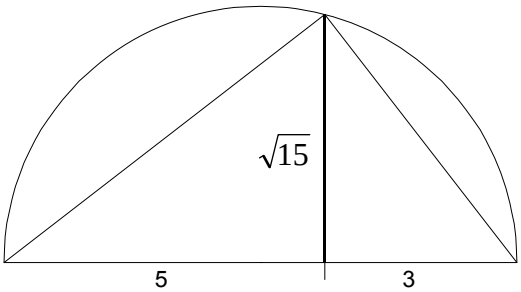


b) Euklidova veta o výške $v_c^{\ 2} = c_a.c_b$

$$v_c = \sqrt{15}$$

$$v_c^{\ 2} = 15 = 5.3$$

$$c_a = 5, c_b = 3$$

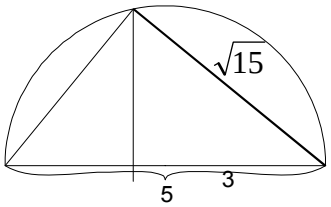


c) Euklidova veta o odvesne $a^2 = c.c_a$

$$a = \sqrt{15}$$

$$a^2 = 15 = 5.3$$

$$c = 5, c_a = 3$$



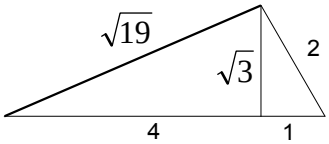
<u>Pr.</u>

Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{19}$ pomocou Pytagorovej vety:

$$x = \sqrt{19} \qquad y = \sqrt{3}$$

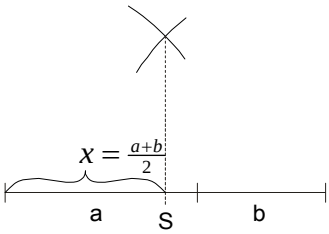
$$x^2 = 19 = 16 + 3 \qquad y^2 = 3 = 4 - 1$$

$$19 = 4^2 + \sqrt{3}^2 \qquad 3 = 2^2 - 1^2$$



<u>Def.</u>

Aritmetický priemer úsečiek a, b je úsečka $x = \frac{a+b}{2}$.



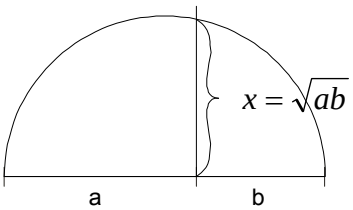
<u>Def.</u>

Geometrický priemer (stredná geometrická úmerná) úsečiek a, b je úsečka $x = \sqrt{ab}$.

$$x = \sqrt{ab}$$

$$x^2 = a.b$$

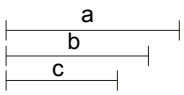
$$v_c^{\ 2} = c_a.c_b$$

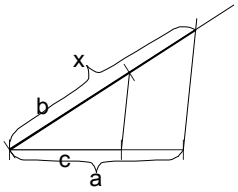


Pr.

Sú dané úsečky a, b, c. Zostrojte úsečku dĺžky $x = \frac{ab}{c}$ (štvrtá geometrická úmerná úsečiek a, b, c):

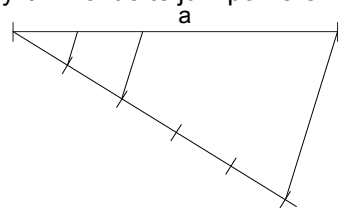
$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$





Pr.

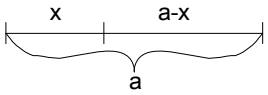
Je daná úsečka dĺžky a. Rozdeľte ju v pomere $1:1:3$



- od jedného konca úsečky nanesieme dieliky, potrebujeme ich päť
- posledný spojíme z druhým koncom úsečky a robíme rovnobežky a priesečníky nám rozdelia úsečku v pomere $1:1:3$

Def.

Zlatý rez úsečky a je jej rozdelenie na dve časti tak, aby pomer menšej časti ku väčšej sa rovnal pomeru väčšej časti ku celej úsečke.



$$\boxed{\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}}$$

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}$$

$$ax = a^2 - 2ax + x^2$$

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

$$D = 5a^2 \quad \sqrt{D} = a\sqrt{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2} = a.\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x = a.\frac{3-\sqrt{5}}{2} \doteq 0{,}38a$ … veľkosť menšej časti

Neriešené úlohy

1. Zostrojte:

a) $G(AB, 75°)$ b) $G(AB, 150°)$

2. Je daný štvorec $ABCD, a = 4cm$. Nájdite všetky body roviny, z ktorých vidieť stranu AB pod uhlom $30°$ a zároveň BC pod uhlom $45°$.

3. Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{20}$ pomocou Pytagorovej vety a Euklidových viet.

4. Sú dané úsečky dĺžok a, b, c. Zostrojte úsečky dĺžok: a) $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$ b) $\sqrt{2ab}$

5. Sú dané úsečky a, b, c. Zostrojte úsečku dĺžky $x = \frac{a^2}{b}$.

ZU. ZAUJÍMAVÉ ÚLOHY

.....

1. Je daná funkcia $f: y = \log_2\left(\frac{-x^2+4x-3}{x}\right)$
   a) určite definičný obor funkcie f
   b) nakreslite graf funkcie $g(x) = x.2^{f(x)}$
   c) z grafu určite obor hodnôt funkcie $g(x)$
   d) vypočítajte obsah útvaru ohraničeného grafom funkcie $g(x)$ a osou x

2. Sú dané body $A[4;7;0], B[7;3;0], D[0;4;0], E[4;7;5]$
   a) určite súradnice bodov $C, F, G, H,$ tak, aby $ABCDEFGH$ bol rovnobežnosten
   b) dokážte, že $ABCDEFGH$ je kocka
   c) vypočítajte vzdialenosť bodu A od roviny GED
   d) vypočítajte odchýlku rovín GED a DCG
   e) vypočítajte objem štvorstena $EAHP$, kde P je stred úsečky CH
   (Pre kontrolu: rovnica roviny GED je $7x - y - 5z + 4 = 0$)

3. Riešte v R rovnicu $\cos^n x - \sin^n x = 1$, pre $n = 2, 4, 6$.

4. Riešte v R rovnicu $81^{\sin^2 x} + 3.3^{2.\cos 2x} = 12$.

5. Dĺžky strán ΔABC tvoria aritmetickú postupnosť. Obsah ΔABC sa rovná $\frac{4}{5}$ obsahu rovnostranného trojuholníka, ktorý ma rovnaký obvod ako ΔABC. Určite veľkosť najmenšieho uhla ΔABC.

6. Vyjadrite polomer kružnice opísanej ΔABC pomocou dĺžok ťažníc t_a, t_b na strany a, b, ak ΔABC je:
   a) pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C
   b) rovnoramenný so základnou BC

7. Zistite priebeh funkcie $f: y = x + \frac{1}{x^2}$ ($D(f)$, $H(f)$, párnosť, spojitosť, monotónnosť, lokálne extrémy, konvexnosť, konkávnosť, asymptoty, graf).

8. Pre aké hodnoty parametra $m \in R$ patria korene rovnice $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ do intervalu $\langle a, b \rangle$, kde a je riešením rovnice $2^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = 4$ a b je riešením rovnice $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$?

9. Vypočítajte obsah ΔABC, v ktorom súradnice bodu A vyhovujú sústave rovníc

$$4x - 5iy + 20i = 4$$
$$3ix + 2y - 3i = 8$$

   body B, C sú bodmi dotyku priamok vedených z bodu A ku kružnici s rovnicou

$$x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0.$$

10. Pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ má bočnú hranu s dĺžkou b a odchýlku bočnej hrany od roviny podstavy α :
    a) vypočítajte dĺžku podstavnej hrany, výšku ihlana a uhol bočnej steny s rovinou podstavy
    b) vypočítajte vzdialenosť stredu gule opísanej ihlanu od roviny podstavy; zistite, pre aké hodnoty α leží stred gule vo vnútri ihlana, pre aké hodnoty α leží v rovine podstavy a pre aké hodnoty α leží vo vonkajšej oblasti ihlana

11. a) Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n\}$ losujeme dvakrát s vracaním po jednom čísle. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že podiel prvého a druhého vylosovaného čísla patri do intervalu $(1, 2\rangle$.
    b) Z množiny n guliek očíslovaných od 1 po n losujeme bez vracania dve guľky. Pre aké hodnoty n je pravdepodobnosť vylosovania dvojice čísel a, b spĺňajúcej podmienku $|a-b| = 2$ väčšia ako $\frac{1}{4}$?

12. a) Dokážte matematickou indukciou: $\forall n \in N : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
    b) Pre ktoré $n \in N$ platí : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 3025$?
    c) Vyjadri nasledujúce súčty pomocou premennej $n \in N$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 =$$
$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 =$$

13. Sú dané body $A[-1, 2], B[3, 4]$ a priamka $p : x - 3y + 3 = 0$. Nájdite na priamke p všetky body C tak, aby trojuholník ΔABC bol pravouhlý. Ktorý z trojuholníkov ΔABC má najväčší plošný obsah?

14. Grafy funkcií $f : y = -x^2 + 4x - 3$ a $g : y = x - 3$ sa pretínajú v bodoch C a D. Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného grafom funkcie f a jej dotyčnicami v bodoch C a D.

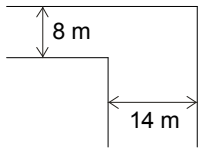
15. Je daná rovnica $x^2 - (2^a - 1)x + 3(2^{a-2} - 4^{a-1}) = 0$ s neznámou $x \in R$ a parametrom $a \in R$. Pre aké hodnoty parametra má rovnica dva rôzne reálne korene s opačnými znamienkami?

16. V pravouhlom trojuholníku ΔABC, s pravým uhlom pri vrchole C, delí os ostrého uhla protiľahlú stranu v pomere $2:3$. Vypočítajte pomer obsahov kruhu vpísaného a kruhu opísaného ΔABC.

17. Dokážte, že platí: $\forall n \in N : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

18. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály krivky $y = 0{,}5x^2$ v bode $T[2, 2]$. Vypočítajte pomer obsahov útvarov, na ktoré delí táto krivka trojuholník ohraničený osou y, dotyčnicou a normálou.

19. Kanál šírky 14 m je kolmý na kanál šírky 8 m. Nájdi najväčšiu dĺžku tyče, ktorá sa môže preplaviť cez obidva kanály.



20. Je daná rovnica $(2\cos\alpha - 1)x^2 - 2x + \cos\alpha = 0$ s neznámou $x \in R$ a parametrom $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pre aké hodnoty parametra a má rovnica dva rôzne reálne korene.

21. Zistite priebeh funkcie $f : y = \frac{4-x^2}{x^2-1}$ ($D(f)$, $H(f)$, párnosť, monotónnosť, lokálne extrémy, konvexnosť, konkávnosť, asymptoty, graf).

22. V rovine je daný trojuholník ΔABC, kde $A[5,8], B[-2,9], C[-4,5]$:
    a) napíšte všeobecnú rovnicu priamky určenej ťažiskom T a priesečníkom výšok V
    b) zistite, či na tejto priamke leží aj stred kružnice opísanej ΔABC

23. Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného krivkami: $y = \sin^3 x, y = \cos^3 x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$.

24. Strany $a, b; a < b$ trojuholníka ΔABC sú riešeniami rovnice $\frac{1}{8\log_4 x - 2} + \log_4 x = 1$. Uhol oproti strane a je riešením rovnice $\mathrm{tg}^2 x + 4\sin^2 x - 3 = 0$. Vypočítajte obsah všetkých trojuholníkov vyhovujúcich daným podmienkam.

25. Riešte v R rovnicu s neznámou x a parametrom a: $\sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}} = x$.

26. Z čísla 897413256 náhodne vyčiarknite tri číslice, čím vznikne šesťciferné číslo. Aká je pravdepodobnosť toho, že to bude :
    a) číslo deliteľné 45
    b) číslo s nepárnym ciferným súčtom

27. Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Určite ich, ak viete, že polomer kružnice vpísanej trojuholníku je $7\,cm$. '

28. Je danú kocka $A - H$ s hranou dĺžky a. Zostrojte rez kocky rovinou súmernosti telesovej uhlopriečky DF. Vypočítajte objem a povrch ihlana, ktorého podstavou je uvedený rez a hlavný vrchol je F.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. Základy matematickej logiky

1.

a) Aspoň jeden nominovaný pretekár nie je zdravý.
b) Aspoň jeden koreň danej rovnice je menší alebo rovný 2.
c) Nebol v práci aspoň 11 dní.
d) Najviac pri druhom alebo aspoň pri štvrtom štarte motor naskočil.
e) $3+\sqrt{2}>\sqrt{20}$
f) $\sqrt{7}-\sqrt{5}\neq\sqrt{2}$
g) Aspoň jeden chýba.
h) Nikto alebo aspoň dvaja chýbajú.
i) Aspoň jedného súpera nepredbehol.
j) Aspoň niečo videl.
k) Nikto nás nevidel.
l) Aspoň jeden to vie.
m) V danom trojuholníku sú aspoň dva tupé uhly.
n) Aspoň jeden neodišiel.

2.

a) A... Bude snežiť, B... Bude pršať $A\wedge B$
b) Upravíme výrok na tvar: „Ak sa učím, tak nepozerám televízor.“, čo je rovnaký výrok, ale vieme ľahko určiť stavbu výroku. Čiže: $A\Rightarrow B$
c) A ... Vyhráme, B... Budeme remizovať, C... Budeme majstrami sveta
$(A\vee B)\Rightarrow C$
d) A... Budem sa učiť, B... Nebudem sa učiť, C... Budem pozerať televízor
$A\vee(B\Rightarrow C)$, keďže B je negácia A, čiže A', stavba výroku je $A\vee(A'\Rightarrow C)$

3.

a) A... Bude pršať, B... Budem spať, C... Budem čítať $A\Rightarrow(B\vee C)$

negácia: $A\wedge(B\vee C)'$
$A\wedge(B'\wedge C')$
$A\wedge B'\wedge C'$
Bude pršať a nebudem spať a nebudem čítať.

obmena: $(B\vee C)'\Rightarrow A'$
$(B'\wedge C')\Rightarrow A'$
Ak nebudem spať a nebudem čítať, tak nebude pršať.

b) A... Bude snežiť, B... Bude mrznúť, C... Pôjdem sa lyžovať, D... Pôjdem sa korčuľovať
$(A\vee B)\Rightarrow(C\wedge D)$

negácia: $(A\vee B)\wedge(C\wedge D)'$
$(A\vee B)\wedge(C'\vee D')$
Bude snežiť alebo mrznúť a nepôjdem sa lyžovať alebo sa nepôjdem korčuľovať.

obmena: $(C\wedge D)'\Rightarrow(A\vee B)'$
$(C'\vee D')\Rightarrow(A'\wedge B')$
Ak sa nepôjdem lyžovať alebo korčuľovať, tak nebude snežiť a mrznúť.

c) A... Kúpim citróny, B... Nebudú pomaranče $A \Leftrightarrow B$

negácia: $(A \Leftrightarrow B)'$

$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))'$

$(A \Rightarrow B)' \vee (B \Rightarrow A)'$

$(A \wedge B') \vee (B \wedge A')$

Kúpim citróny a budú pomaranče, alebo nebudú pomaranče a nekúpim citróny.

obmena: využijeme to, že ak výrok $2\times$ znegujeme, dostaneme obmenu

$((A \wedge B') \vee (B \wedge A'))'$ bude naša obmena

$(A \wedge B')' \wedge (B \wedge A')'$

$(A' \vee B) \wedge (B' \vee A)$

Nekúpim citróny alebo budú pomaranče a nebudú pomaranče alebo kúpim citróny.

4.

$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
$A \wedge B$	$(A' \wedge B')'$	$(A \wedge B')'$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
			$(A \wedge B')' \wedge (B \wedge A')'$

5.

$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
$(A' \vee B')'$		$(A \wedge B')'$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
		$A' \vee B$	$((A \wedge B') \vee (B \wedge A'))'$
			$((A' \vee B)' \vee (B' \vee A)')'$

2. Metódy dôkazov v matematike

1.

D	platí
$D \Rightarrow E'$	platí
$E' \Rightarrow F$	platí
F	platí

2.

a) Dôkaz

$$\forall x \in R : (x-1)^2 \geq 0$$
$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$
$$x^2 + 1 \geq 2x$$
$$\forall x \in R : x^2 + 1 \geq 2x$$

b) Dôkaz

$$\forall x, y \in R : (x-y)^2 \geq 0$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$
$$x^2 + y^2 \geq 2x$$
$$\forall x \in R : x^2 + y^2 \geq 2xy$$

3.

a) Dôkaz

$$\forall n \in N : n = 3k \vee n = 3k+1 \vee n = 3k+2; k = 0,1,2,\ldots$$

1.

$$n = 3k \ldots n^3 + 5n = (3k)^3 + 5.3k = 27k^3 + 15k = 3.(9k^3 + 5k) = 3x$$

2.

$$n = 3k+1 \ldots n^3 + 5n = (3k+1)^3 + 5.(3k+1) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 15k + 5 =$$
$$= 27k^3 + 27k^2 + 24k + 6 = 3.(9k^3 + 9k^2 + 8k + 2) = 3y$$

3.

$$n = 3k+2 \ldots n^3 + 5n = (3k+2)^3 + 5.(3k+2) = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 + 15k + 10 =$$
$$= 27k^3 + 54k^2 + 51k + 18 = 3.(9k^3 + 18k^2 + 17k + 6) = 3z$$

$\forall n \in N : 3 \mid (n^3 + 5n)$ platí

b) Dôkaz

$$\forall n \in N : n = 3k \vee n = 3k+1 \vee n = 3k+2; k = 0,1,2,\ldots$$

1.

$$n = 3k \ldots 2n^3 + n = 2.(3k)^3 + 3k = 54k^3 + 3k = 3.(18k^3 + k) = 3x$$

2.

$$n = 3k+1 \ldots 2n^3 + n = 2.(3k+1)^3 + (3k+1) = 2.(27k^3 + 27k^2 + 9k + 1) + 3k + 1 =$$
$$= 54k^3 + 54k^2 + 21k + 3 = 3.(18k^3 + 18k^2 + 7k + 1) = 3y$$

3.

$$n = 3k+2 \ldots 2n^3 + n = 2.(3k+2)^3 + (3k+2) = 2.(27k^3 + 54k^2 + 36k + 8) +$$
$$+ 3k + 2 = 54k^3 + 108k^2 + 75k + 18 = 3.(18k^3 + 36k^2 + 25k + 6) = 3z$$

$\forall n \in N : 3 \mid (2n^3 + n)$ platí

c) Dôkaz

$\forall n \in N : n = 6k \vee n = 6k+1 \vee n = 6k+2 \vee n = 6k+3 \vee n = 6k+4 \vee$

$\vee\ n = 6k+5; k = 0,1,2,\ldots$

1.

$n = 6k \ldots n^3 - n = (6k)^3 - 6k = 216k^3 - 6k = 6.(36k^3 - k) = 6x$

2.

$n = 6k+1 \ldots n^3 - n = (6k+1)^3 - (6k+1) = 216k^3 + 108k^2 + 18k + 1 - 6k - 1 =$

$= 216k^3 + 108k^2 + 12k = 6.(36k^3 + 18k^2 + 2k) = 6y$

3.

$n = 6k+2 \ldots n^3 - n = (6k+2)^3 - (6k+2) = 216k^3 + 216k^2 + 72k + 8 -$

$- 6k - 2 = 216k^3 + 216k^2 + 66k + 6 = 6.(36k^3 + 36k^2 + 11k + 1) = 6z$

4.

$n = 6k+3 \ldots n^3 - n = (6k+3)^3 - (6k+3) = 216k^3 + 324k^2 + 162k + 27 -$

$- 6k - 3 = 216k^3 + 324k^2 + 156k + 24 = 6.(36k^3 + 54k^2 + 26k + 4) = 6v$.

5.

$n = 6k+4 \ldots n^3 - n = (6k+4)^3 - (6k+4) = 216k^3 + 432k^2 + 288k + 64 -$

$- 6k - 4 = 216k^3 + 432k^2 + 282k + 60 = 6.(36k^3 + 72k^2 + 47k + 10) = 6w$

6.

$n = 6k+5 \ldots n^3 - n = (6k+5)^3 - (6k+5) = 216k^3 + 540k^2 + 450k + 125 -$

$- 6k - 5 = 216k^3 + 540k^2 + 444k + 120 = 6.(36k^3 + 90k^2 + 74k + 20) = 6t$

$\forall n \in N : 6 \mid (n^3 - n)$ platí

Tento spôsob je zdĺhavý, tak využijeme:

$n^3 - n = 6x = 2.3.x$

$n^3 - n = n.(n^2 - 1) = n.(n-1).(n+1)$

$(n-1).n.(n+1)$ sú to tri po sebe idúce čísla, čiže jedno z nich je deliteľné 2 a jedno 3

$3 \mid n^3 - n \wedge 2 \mid n^3 - n \Rightarrow 6 \mid n^3 - n$

d) Dôkaz

$\forall n \in N : n^5 - n = 5x$

$n^5 - n = n.(n^4 - 1) = n.(n^2 - 1).(n^2 + 1) = n.(n-1).(n+1).(n^2 + 1) =$

$= (n-1).n.(n+1).(n^2 + 1)$

$\forall n \in N : n = 5k \vee n = 5k+1 \vee n = 5k+2 \vee n = 5k+3 \vee n = 5k+4; k = 0,1,2,\ldots$

1.

$n = 5k \ldots n^5 - n = (n-1).5k.(n+1).(n^2 + 1) = 5x$

2.

$n = 5k+1 \ldots n^5 - n = 5k.n.(n+1).(n^2 + 1) = 5y$

3.

$n = 5k+2 \ldots n^5 - n = (n-1).n.(n+1).(25k^2 + 20k + 5) = 5z$

4.

$n = 5k+3 \ldots n^5 - n = (n-1).n.(n+1).(25k^2 + 30k + 10) = 5v$.

5.

$n = 5k+4 \ldots n^5 - n = (n-1).n.(5k+5).(n^2 + 1) = 5w$

$\forall n \in N : 5 \mid (n^5 - n)$ platí

4. a) $\forall n \in N : n = 4k \Rightarrow n^2 + 4n = 6x$

$\forall n \in N : 4 | n$

$n = 4k$

$n^2 + 4n = (4k)^2 + 4.4k = 16k^2 + 16k = 16.(k^2 + k) = 16x$

$16 | n^2 + 4n$

b) $\forall n \in N : n = 2k \Rightarrow n^2 = 2x$

$\forall n \in N : n = 2k$

$n = 2k$

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2.(2k^2) = 2x$

$2 | n^2$

5. $\forall n \in N : 3 | n \Rightarrow 3 \nmid (n^2 + 2)$

$\forall n \in N : 3 | n$

$n = 3k$

$n^2 + 2 = (3k)^2 + 2 = 9k^2 + 2 = 3.(3k^2) + 2$

$3 \nmid (n^2 + 2)$

$\forall n \in N : 3 | (n^2 + 2) \Rightarrow 3 \nmid n$ platí

6.

a) 1. $n = 1 \ldots 1 = 1^2$

$1 = 1$ platí

2. $\forall k \in N : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) =$

$= (k + 1)^2$

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

$\forall n \in N : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ platí

b) 1. $n = 1 \ldots \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ platí

2. $\forall k \in N : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{k.(k+1)} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} +$

$+ \cdots + \frac{1}{k.(k+1)} + \frac{1}{(k+1).(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{k.(k+1)} + \frac{1}{(k+1).(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1).(k+2)} =$

$= \frac{k.(k+2)+1}{(k+1).(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1).(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1).(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

$\forall n \in N : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ platí

c) 1. $n=1\ldots 6\,|\,(1^3+5.1.)$

$6\,|\,6$ platí

2. $\forall k\in N: 6\,|\,(k^3+5k)\Rightarrow 6\,|\,\left[(k+1)^3+5.(k+1)\right]$

$\forall k\in N: k^3+5k=6x\Rightarrow (k+1)^3+5.(k+1)=6y$

$(k+1)^3+5.(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+5k+5=(k^3+5k)+3k^2+3k+6=$

$=6x+3k^2+3k+6=6.(x+1)+3.\underbrace{(k^2+k)}_{k.(k+1)=2z}=6.(x+1)+6z=6y$

$\forall n\in N: 6\,|\,(n^3+5n)$ platí

d) 1. $n=1\ldots 2^1=2.(2^1-1)$

$2=2$ platí

2. $\forall k\in N: 2^1+2^2+2^3+\cdots+2^k=2.(2^k-1)\Rightarrow 2^1+2^2+2^3+\cdots+2^k+2^{k+1}=$

$=2.(2^{k+1}-1)$

$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^k+2^{k+1}=2.(2^k-1)+2^{k+1}=2^{k+1}-2+2^{k+1}=4^{k+1}-2=$

$=2.(2^{k+1}-1)$

$\forall n\in N: 2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n=2.(2^n-1)$ platí

e) 1. $n=1\ldots 1.(1+1)=\frac{1}{3}.1.(1+1).(1+2)$

$2=2$ platí

2. $\forall k\in N: 1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k.(k+1).(k+2)\Rightarrow 1.2+2.3+3.4+\cdots+$

$+k(k+1)+(k+1).(k+2)=\frac{1}{3}.(k+1).(k+2).(k+3)$

$1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)+(k+1).(k+2)=\frac{1}{3}k.(k+1).(k+2)+(k+1).(k+2)=$

$=(k+1).(k+2).(\frac{1}{3}k+1)=\frac{1}{3}.(k+1).(k+2).(k+3)$

$\forall n\in N: 1.2+2.3+3.4+\cdots+n.(n+1)=\frac{1}{3}n.(n+1).(n+2)$ platí

f) 1. $n=1\ldots 133\,|\,(11^{1+1}+12^{2.1-1})$

$133\,|\,121+12$

$133\,|\,133$ platí

2. $\forall k\in N: 11^{k+1}+12^{2k-1}=133x\Rightarrow 11^{k+2}+12^{2(k+1)-1}=133y$

$11^{k+2}+12^{2(k+1)-1}=11^{k+2}+12^{2k+1}=11^{k+1+1}+12^{k-1+2}=11.11^{k+1}+12^2.12^{2k-1}=$

$=11.11^{k+1}+(11+133).12^{2k-1}=11.11^{k+1}+11.12^{2k-1}+133.12^{2k-1}=$

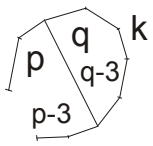
$=11.(11^{k+1}+12^{2k-1})+133.12^{2k-1}=11.133x+133.12^{2k-1}=133.(11x+12^{2k-1})=$

$=133y$

7.

1. $n=3\ldots n-3=3-3=0$ platí

2. majme k-uholník, predpokladajme, že to platí pre všetky $p,q<k$



Takže v p-uholníku je p-3 uhlopriečok a v q-uholníku ich je q-3

$p+q=k+2$

Počet uhlopriečok v k-uholníku je počet v p a q a ešte jedna:

$p-3+q-3+1=p+q-5=k-3$, čiže k-3.

Platí aj v druhom kroku.

8.

$$p(n) = \frac{n.(n-3)}{2}$$

1. $n = 3 \ldots p(3) = 0$ platí

2. $\forall k \in N, k \geq 3 : p(k) = \frac{k.(k-3)}{2} \Rightarrow p(k+1) = \frac{(k+1).(k-2)}{2}$

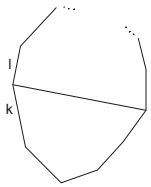
$$p(k+1) = p(k) + \underbrace{(n-2)+1}_{\substack{\text{pridáme} \\ \text{s vrcholom } n-2 \\ \text{uhlopriečhk} + 1 \\ \text{strana bude} \\ \text{ďalšia uhlopriečha}}} = \frac{k.(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{(n+1).(k-2)}{2}$$

9.

$\forall n \geq 3; n \in N : s(n) = n.180° - 360° = (n-2).180°$

1. $n = 3 \ldots 180° = 1.180°$ platí

2. predpokladáme, že pre menšie to platí, čiže n-uholník rozdelíme uhlopriečkou na dva:



$s(l) = (l-2).180°$
$s(k) = (k-2).180°$
$k + l = n + 2$

$s(n) = s(k) + s(l) = (k-2).180° + (l-2).180° = (k+l-4).180° = (n-2).180°$

$\forall n \geq 3; n \in N : s(n) = n.180° - 360° = (n-2).180°$ platí

3. Teória čísel

1.

$\overline{ab} = 10a + b \quad \overline{ba} = 10b + a$

$\overline{ab} - \overline{ba} = 20$

$10a + b - 10b - a = 20$

$9a - 9b = 20$

$9.(a - b) = 20$

Nemá riešenie, lebo 20 nie je násobkom 9.

2. 205798

3. 7368

4.

$\overline{ab4} = 100a + 10b + 4 \qquad \overline{4ab} = 400 + 10a + b$

$\overline{4ab} - \overline{ab4} = 81$

$100a + 10b + 4 - 400 - 10a - b = 81$

$90a + 9b = 477$

$10a + b = 53$

$\overline{ab} = 53$

$a = 5 \wedge b = 3$

na začiatku sme mali číslo 534

5.

$\overline{abc} = 100a + 10b + c \qquad \overline{ac} = 10a + c$

$\overline{abc} : \overline{ac} = 9$ $\quad c = 5$, lebo iba $9.5 = 45$, čiže koncová číslica násobku je tá istá ako pôvodné číslo

$$\frac{100a + 10b + c}{10a + c} = \frac{100a + 10b + 5}{10a + 5} = 9$$

$100a + 10b + 5 = 90a + 45$

$10a + 10b = 40$

$a + b = 4$

$a = 1 \ldots b = 3 \ldots 135$

$a = 2 \ldots b = 2 \ldots 225$

$a = 3 \ldots b = 1 \ldots 315$

$a = 4 \ldots b = 0 \ldots 405$

6.

$n = \overline{\ldots 5} = \overline{a5} = 10a + 5$

$n^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100(a^2 + a) + 25 = \overline{\ldots 25}$

7.

1147, 2771 niesu prvočísla a 947 je prvočíslo

8.

$560 = 2^4.5.7 \quad 1124 = 2^2.281 \quad 1125 = 3^2.5^3 \quad 3859 = 17.227$

9.

$n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_k^{\alpha_k}$

a) $\tau(n) = (\alpha_1 + 1).(\alpha_2 + 1).\cdots.(\alpha_k + 1) = 3 \qquad (\alpha_1 + 1) = 3 \qquad \alpha_1 = 2$

$n = p^2$ 4,9,25,49,121,…

b) $\tau(n) = (\alpha_1 + 1).(\alpha_2 + 1).\cdots.(\alpha_k + 1) = 4 = 2.2$

1. $(\alpha_1 + 1) = 4 \qquad \alpha_1 = 3$

$n = p^3$ 8,27,125,…

2. $(\alpha_1+1)=2 \wedge (\alpha_2+1)=2$ $\alpha_1=1 \wedge \alpha_2=1$

$n=p_1.p_2$ 6,10,14,15,…

10. $6300=2^2.3^2.5^2.7$ nie je lebo exponenty niesu párne

11. a) D(92,156)=4, n(92,156)=3588 b) D(67,28)=1, n(67,28)=1876 c) D(423,900)=9, n(423,900)=42300 d) D(68,12)=4, n(68,12)=204 e) D(34,119)=238, n(34,119)=17 f) D(1001,242,583)=11, n(1001,242,583)=1167166 g) D(48,576,2664)=24, n(48,576,2664)=21312

12. a) $x=4k \wedge y=4l; D(k,l)=1$

$x.y=D(x,y).n(x,y)$

$4k.4l=4.n(x,y)$

$n(x,y)=4kl=24 \qquad kl=6$

$k=1\ldots l=6\ldots x=4, y=24$

$k=6\ldots l=1\ldots x=24, y=4$

$k=2\ldots l=3\ldots x=8, y=12$

$k=3\ldots l=2\ldots x=12, y=8$

b) $x=7k \wedge y=7l; D(k,l)=1$

$x.y=D(x,y).n(x,y)$

$7k.7l=7.n(x,y)$

$n(x,y)=7kl=686 \qquad kl=98$

$k=2\ldots l=49\ldots x=14, y=343$

$k=49\ldots l=2\ldots x=343, y=14$

$k=7\ldots l=14\ldots x=49, y=98$

$k=14\ldots l=7\ldots x=98, y=49$

c) $x=D.k \wedge y=D.l; D(k,l)=1$

$n(x,y)=Dkl$

$D+5=Dkl$

$D.(kl-1)=5$

1. $D=1 \wedge kl-1=5$

$kl=6$

$k=1, l=6\ldots x=1, y=6$

$k=6, l=1\ldots x=6, y=1$

$k=2, l=3\ldots x=2, y=3$

$k=3, l=2\ldots x=3, y=2$

2. $D=5 \wedge kl-1=1$

$kl=2$

$k=1, l=2\ldots x=5, y=10$

$k=2, l=1\ldots x=10, y=5$

13. n+1=n(2,3,4,5,6)=6 n=59

14.

a) $\frac{12}{200}=\frac{3}{50}=\frac{3}{2.5^2}=0{,}06=\frac{6}{10^2}$ je desatinné b) $\frac{28}{98}=\frac{2}{7}$ nie je desatinné

15.

a) $a=3,\overline{49}$

$a=3{,}494949...$

$100a=349{,}494949...$

$99a=346$

$a=\frac{346}{99}$

b) $b=0{,}41\overline{6}$

$100b=41{,}6666...$

$1000b=416{,}6666..$

$900b=375$

$b=\frac{375}{900}$

c) $c=4{,}32\overline{1}$

$100c=432{,}111...$

$1000c=4321{,}111..$

$900c=3889$

$c=\frac{3889}{900}$

4. Komplexné čísla

1. a) $-a=[1,2]$ $\frac{1}{a}=\left[-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right]$ b) $-b=[-3,0]$ $\frac{1}{b}=\left[\frac{1}{3},0\right]$ c) $-c=[0,-2]$ $\frac{1}{c}=\left[0,-\frac{1}{2}\right]$

2. a) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{2001}=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+i=i$

b) $i.i^2.\,i^3.\cdots.i^{50}=i^{\frac{50+(50+1)}{2}}=i^{1275}=(i^4)^{318}.i^3=1.(-i)=-i$

3. a) $(1+i).(1+i)=1-i^2=1+1=2+0i$

b) $(2-3i)^2=4-12i+9i^2=4-12i-9=-5+12i$

c) $\dfrac{7-4i}{2}=\dfrac{7}{2}-2i=3{,}5-2i$

4. a) 4 b) $-43+81i$ c) $18+36i$

5. a) $(1-i\sqrt{3})^9=\left((1-i\sqrt{3})^3\right)^3=(-8)^3=-512$

$$\begin{aligned}&(1-i\sqrt{3})^3=(1-i\sqrt{3})^2.(1-i\sqrt{3})=\\&=(1-2i\sqrt{3}+3i^2).(1-\sqrt{3})=\\&=(-2-2i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})=\\&=-2(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})=-2(1+3)=-8\end{aligned}$$

b) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{24}=\left[\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right]^8=(-1)^8=1$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2.\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\\&=\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}\right).\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).\\&.\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\\&=-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i^2\right)=-1\end{aligned}$$

c) $(1+i)^{100}=\left((1+i)^2\right)^{50}=(2i)^{50}=2^{50}.i^{50}=2^{50}.i^{50}=2^{50}.(i^4)^{12}.i^2=2^{50}.1.(-1)=-2^{50}$

6. a) $[2x+3,-2+3x]=[y,2y]$

$2x+3=y\wedge 3x-2=2y$

$3x-2=2(2x+3)$

$3x-2=4x+6$

$x=-8$

$y=-13$

$P=\{[-8,-13]\}$

b) $[2x+y,2y-x]=[3,-4]$

$2x+y=3\wedge 2y-x=-4$

$y=3-2x\ldots 2(3-2x)-x=-4$

$6-5x=-4$

$-5x=-10$

$x=2\ldots y=-1$

$P=\{[2,-1]\}$

7. a) $z=x+yi$

$z=\bar{z}$

$x+yi=x-yi$

$x=x\wedge y=-y$

$x\in R\quad 2y=0$

$y=0$

$P=\{x+0i,x\in R\}$

b) $z=x+yi$

$z+\bar{z}=0$

$(x+yi)+(x-yi)=0+0i$

$2x=0\wedge 0y=0$

$x=0\qquad y\in R$

$P=\{0+yi,y\in R\}$

c) $z = x + yi$

$z = z^2$

$x + yi = (x + yi)^2$

$x + yi = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x = x^2 - y^2 \wedge y = 2xy$

$0 = y(1 - 2x)$

$y = 0 \vee x = \frac{1}{2}$

1. $y = 0$

$x = x^2 - 0$

$x(1 - x) = 0$

$x = 0 \vee x = 1$

$[0,0] \quad [1,0]$

2. $x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - y^2$

$y^2 \neq -\frac{1}{4}$

$P = \{[0,0], [1,0]\}$

8. a) $z = 3.(\cos 270° + i \sin 270°)$ b) $z = 2.(\cos 180° + i \sin 180°)$

c) $z = 4.(\cos 90° + i \sin 90°)$ d) $z = 5.(\cos 0° + i \sin 0°)$

e) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}.(\cos 225° + i \sin 225°)$

9. a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x_0 = 45° \quad x = 135°$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12} = (\cos 135° + i \sin 135°)^{12} = \cos 1620° + i \sin 1620° =$$

$$= \cos 180° + i \sin 180° = -1 + 0i = -1$$

1620°=4.360°+180°

b) $\cos x = -\frac{1}{2} \quad x_0 = 60° \quad x = 120°$

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{4} = (\cos 120° + i \sin 120°)^{4} = \cos 480° + i \sin 480° =$$

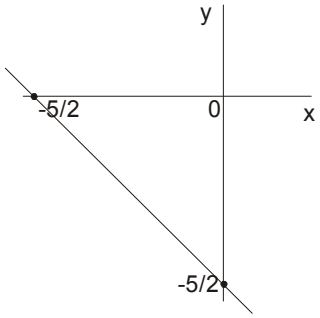
$$= \cos 120° + i \sin 120° = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

480°=360°+120°

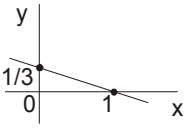
5. Lineárne rovnice, nerovnice a ich sústavy

1.

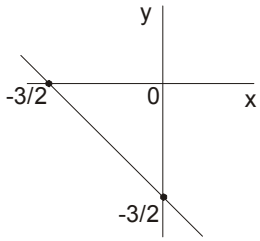
a) $\left[0,-\frac{5}{2}\right],\ \left[-\frac{5}{2},0\right]$



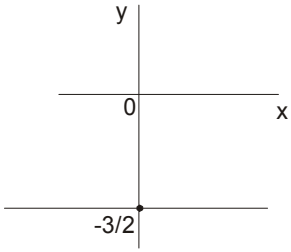
b) $\left[0,\frac{1}{3}\right],\ [1,0]$



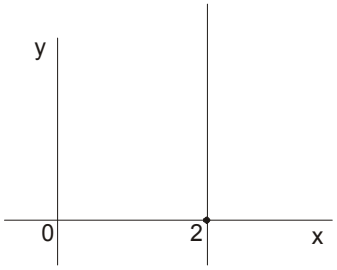
c) $\left[0,-\frac{3}{2}\right],\ \left[-\frac{3}{2},0\right]$



d) $x \in R, y = -\frac{3}{2} \ldots \left[x,-\frac{3}{2}\right]$



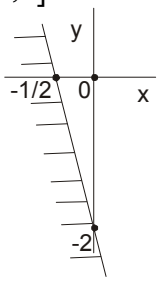
e) $y \in R, x = 2 \ldots [2, y]$



2.

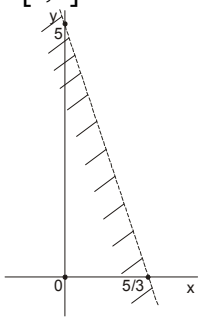
a) $[0,-2],\ \left[-\frac{1}{2},0\right]$

$[0,0] \ldots 2 \le 0$



b) $[0,5],\ \left[\frac{5}{3},0\right]$

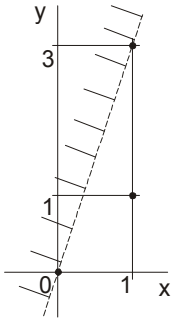
$[0,0] \ldots 0 < 5$



c) $x = 0 \ldots y = 0 \ldots [0,0]$

$x = 1 \ldots y = 3 \ldots [1,3]$

$[1,1] \ldots 1 > 3$



3. a)

$$(x-1)(y+4) = (x+3)(y-1)$$
$$(x-2)(y+2) = x.(y-2)$$

$$xy - y + 4x - 4 = xy + 3y - x - 3$$
$$xy - 2y + 2x - 4 = xy - 2x$$

$$5x - 4y = 1$$
$$4x - 2y = 4$$

$$5x - 4y = 1$$
$$2x - y = 2 \ldots y = 2x - 2$$

$$5x - 4(2x-2) = 1$$
$$5x - 8x + 8 = 1$$
$$-3x = -7$$
$$x = \tfrac{7}{3} \ldots y = \tfrac{8}{3}$$

$$P = \left\{\left[\tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}\right]\right\}$$

b)

$$(x-y)^2 - (x+y)^2 = 2x(1-2y) - y$$
$$(x-y)(x+y) - 2y(x-1) = (x-y)^2 + 4x - 2y^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2 = 2x - 4xy - y$$
$$x^2 - y^2 - 2xy + 2y = x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 2y^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 2x - 4xy - y$$
$$2y = 4x$$

$$-4xy = 2x - 4xy - y$$
$$2y = 4x$$

$$y = 2x$$
$$2y = x$$

$$y = 2x$$

$$P = \{[x, 2x]\}$$

4. a) $x+3y=8$

$x=0 \ldots \ y=\frac{8}{3} \ldots \left[0,\frac{8}{3}\right]$

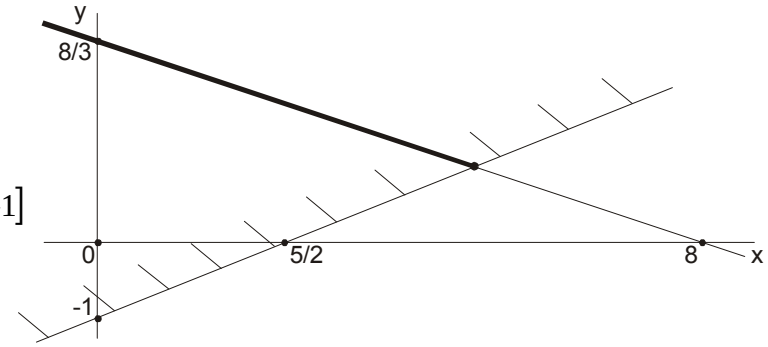
$y=0 \ldots \ x=8 \ldots [8,0]$

$2x-5y=5$

$x=0 \ldots \ y=-1 \ldots [0,-1]$

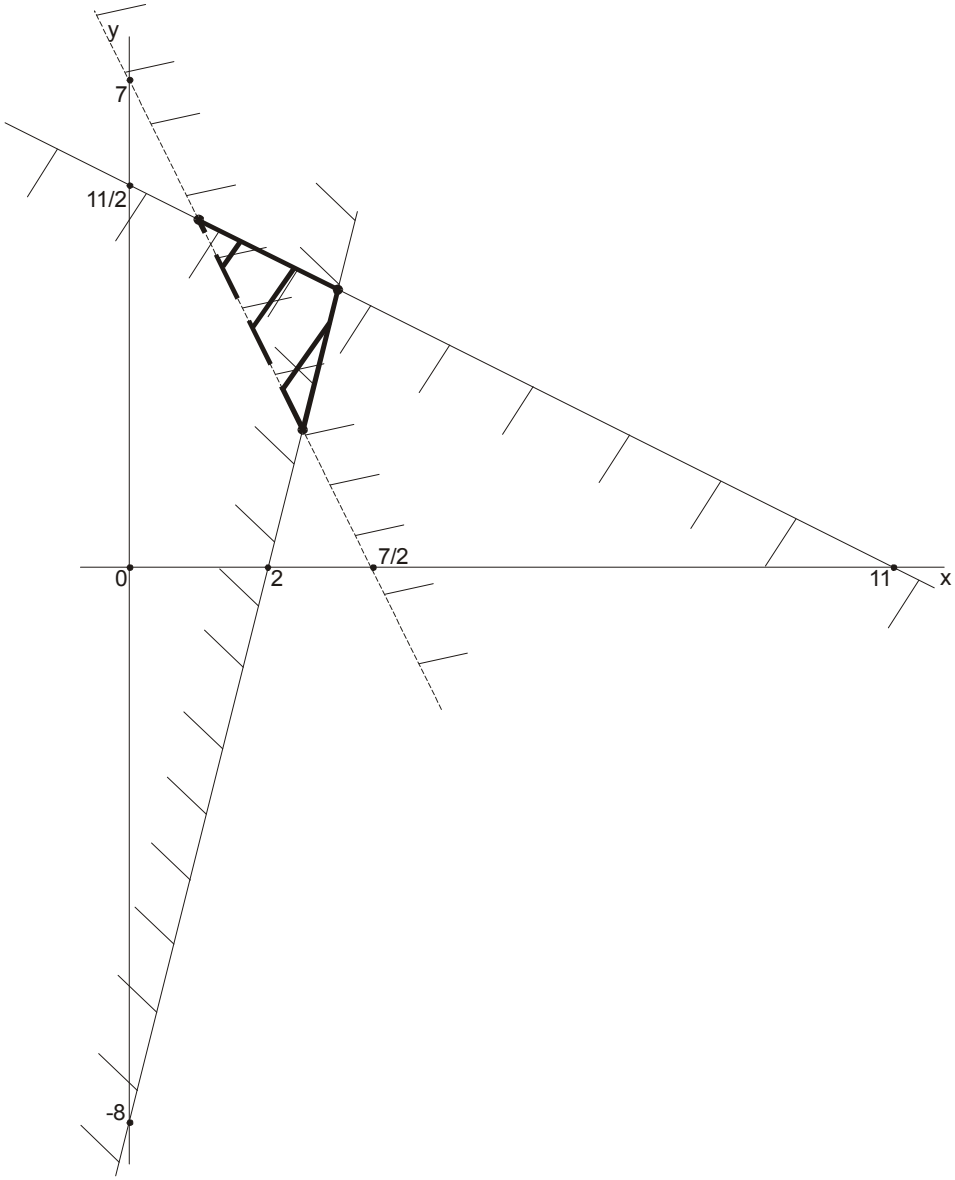
$y=0 \ldots \ x=\frac{5}{2} \ldots \left[\frac{5}{2},0\right]$

$[0,0] \ldots 0 \le 5$



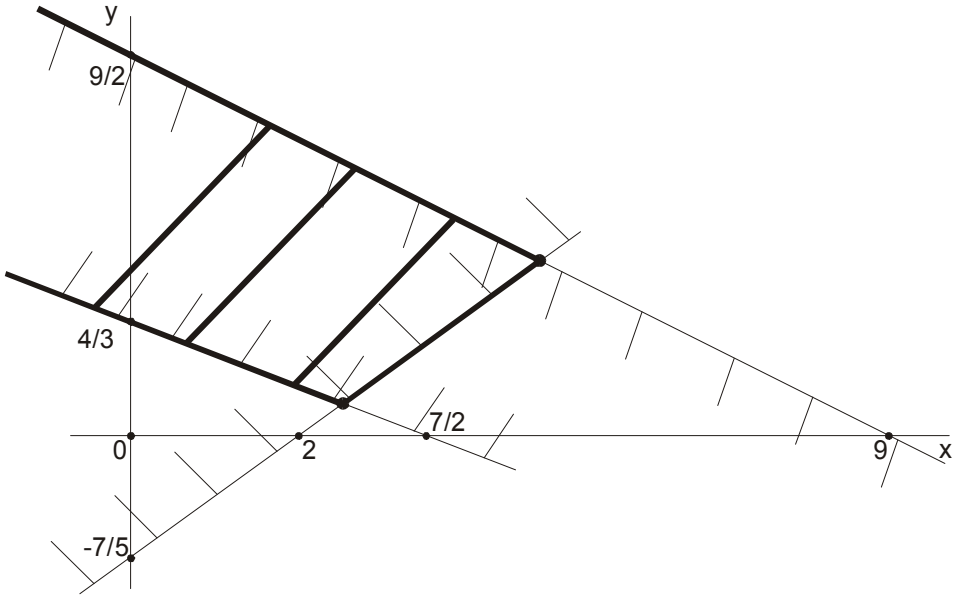
b)

$4x-y=8$	$x+2y=11$	$2x+y=7$
$x=0 \ldots \ y=-8 \ldots [0,-8]$	$x=0 \ldots \ y=\frac{11}{2} \ldots \left[0,\frac{11}{2}\right]$	$x=0 \ldots \ y=7 \ldots [0,7]$
$y=0 \ldots \ x=2 \ldots [2,0]$	$y=0 \ldots \ x=11 \ldots [11,0]$	$y=0 \ldots \ x=\frac{7}{2} \ldots \left[\frac{7}{2},0\right]$
$[0,0] \ldots 0 \le 8$	$[0,0] \ldots 0 \le 11$	$[0,0] \ldots 0 > 7$



c)

$2x-5y=7$	$2x+3y=4$	$x+2y=9$
$x=0 \ldots\ y=-\frac{7}{5} \ldots [0,-\frac{7}{5}]$	$x=0 \ldots\ y=\frac{4}{3} \ldots [0,\frac{4}{3}]$	$x=0 \ldots\ y=\frac{9}{2} \ldots [0,\frac{9}{2}]$
$y=0 \ldots\ x=\frac{7}{2} \ldots [\frac{7}{2},0]$	$y=0 \ldots\ x=2 \ldots [2,0]$	$y=0 \ldots\ x=9 \ldots [9,0]$
$[0,0] \ldots 0 \le 7$	$[0,0] \ldots 0 \ge 4$	$[0,0] \ldots 0 \le 9$



5.

a)
$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \quad |.1 \quad |.(-2)\\ -x+y+2z&=5\\ 2x-y+z&=13\\ \hline x+y+z&=6\\ 2y+3z&=11\\ -3y-z&=1 \quad |.3\\ \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ -7y&=14\\ -3y-z&=1\\ \hline y&=-2\\ z&=5\\ x&=3\\ P&=\{[3,-2,5]\} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x+2y+3z&=4\\ x+3y+5z&=7\\ \hline x+y+z&=3\\ y+2z&=1\\ 2y+4z&=4\\ \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ y+2z&=1\\ y+2z&=2\\ \hline \end{aligned}$$

$P=\theta$

lebo pravé strany v posledných dvoch rovniciach sú rôzne a ľavé sa rovnajú, čo nie je možné

c)
$$\begin{aligned} x-y-z&=5\\ -x+y-z&=1\\ -x-y+z&=15\\ \hline x-y-z&=5\\ -2z&=6\\ -2y&=20\\ \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z&=-3\\ y&=-10\\ x&=-8\\ P&=\{[-8,-10,-3]\} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x+y-4z&=12\\ x-2y\ \ +z&=12\\ x+5y-6z&=-12\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x-2y\ \ +z&=12\\ 3x+y-4z&=12\\ x+5y-6z&=-12\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x-2y\ \ +z&=12\\ 7y-7z&=-24\\ 7y-7z&=-24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-2y\ \ +z&=12\\ 7y-7z&=-24\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x-2y&=12-z\\ 7y&=-24+7z\end{aligned}$$
$z\in R$

$y=-\frac{24}{7}+z$

$x=\frac{36}{7}+z$

$P=\{[z+\frac{36}{7},z-\frac{24}{7},z];z\in R\}$

6.

a) $\begin{pmatrix}14&16\\12&15\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}5&13&3&-1\\5&-17&2&2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$

7.

a) $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\1&-1&0&2\\1&0&2&-1\\-1&1&0&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix}$ po úprave $\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $h(A)=3$

b) $\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix}$ po úprave $\begin{pmatrix}1&-3&-5&0&-7\\0&4&9&1&13\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ $h(B)=3$

8. a)
$$\begin{aligned} x\ \ +2y&=14\\ x^2+4y^2&=100\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x&=14-2y\\ x^2+4y^2&=100\end{aligned}$$
$$(14-2y)^2+4y^2=100$$
$$196-56y+4y^2+4y^2=100$$

$8y^2-56y+96=0$

$y^2-7y+12=0$

$(y-3).(y-4)=0$

$y=3\vee y=4$

$y=3\ldots x=8\ldots[8,3]$

$y=4\ldots x=6\ldots[6,4]$

$P=\{[8,3];[6,4]\}$

b)
$$\begin{aligned} x^2+y^2&=100\\ xy&=48\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x^2+y^2&=100\\ y&=\tfrac{48}{x}\end{aligned}$$
$$x^2+\left(\tfrac{48}{x}\right)^2=100$$
$$x^2+\tfrac{2304}{x^2}-100=0$$

$x^4-100x^2+2304=0$

$x^2=z$

$z^2-100z+2304=0$

$D=784$ $\sqrt{D=28}$

$z=64\vee z=36$

$x^2=64\vee x^2=36$

$x=\pm8;x=\pm6$

$x=8\ldots y=6\ldots[8,6]$

$x=-8\ldots y=-6\ldots[-8,-6]$

$x=6\ldots y=8\ldots[6,8]$

$x=-6\ldots y=-8\ldots[-6,-8]$

$P=\{[8,6];[-8,-6];[6,8];[-6,-8]\}$

c)
$$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}=1$$
$$\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=\frac{31}{12}$$
$$3.\frac{1}{x}-4.\frac{1}{y}=1$$
$$2.\frac{1}{x}-5.\frac{1}{y}=\frac{31}{12}$$

$$\frac{1}{x}=a \wedge \frac{1}{y}=b$$
$$3a-4b=1$$
$$2a+5b=\frac{31}{12}$$

$$6a-8b=2$$
$$6a+15b=\frac{31}{4}$$
$$23b=\frac{23}{4}$$
$$b=\frac{1}{4}$$

$$a=\frac{2}{3}$$
$$x=\frac{3}{2} \wedge y=4$$
$$P=\{[\tfrac{3}{2},4]\}$$

9.

a)
$$xy+xz=7$$
$$xy+yz=15$$
$$yz+xz=16$$
$$2.(xy+xz+yz)=38$$

všetko sčítame

odtiaľ $xy+xz+yz=19$

vytvoríme si tri takéto sústavy:

$$xy+xz+yz=19$$
$$xy+xz=7$$
$$yz=12$$

$$\frac{yz}{xz}=3 \ldots y=3x$$

$$xy+xz+yz=19$$
$$xy+yz=15$$
$$xz=4$$

$$\frac{yz}{xy}=4 \ldots y=4x$$

$$xy+xz+yz=19$$
$$xz+yz=16$$
$$xy=3$$

$$xz=4 \ldots x^2=1 \ldots x=\pm 1$$

$$x=1 \ldots y=3 \ldots z=4$$
$$x=-1 \ldots y=-3 \ldots z=-4$$

$$P=\{[1,3,4];[-1,-3,-4]\}$$

b)
$$x^2+xy-xz=2$$
$$y^2+xy-yz=3$$
$$z^2-yz-xz=4$$
$$x.(x+y-z)=2$$
$$y.(x+y-z)=3$$
$$-z.(x+y-z)=4$$
$$x+y-z=a$$

$$ax=2$$
$$ay=3$$
$$a.(-z)=4$$
$$(x+y-z).a=9$$
$$a^2=9 \ldots a=\pm 3$$

$$a=3 \ldots [\tfrac{2}{3},1,-\tfrac{4}{3}]$$
$$a=-3 \ldots [-\tfrac{2}{3},-1,\tfrac{4}{3}]$$

$$P=\{[\tfrac{2}{3},1,-\tfrac{4}{3}];\ [-\tfrac{2}{3},-1,\tfrac{4}{3}]\}$$

6. Rovnice a nerovnice

1.

a) $2(3x-5)<x$

$6x-10<x$

$5x<10$

$x<2$

$P=(-\infty,2)$

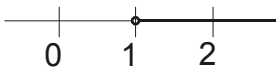
b) $2x-3(x+4)<5x+6$

$12-x<5x+6$

$6x>6$

$x>1$

$P=(1,\infty)$



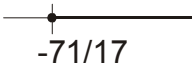
c) $\frac{2x-4}{5}-\frac{x-1}{4}\geq x+3$

$8x-16-5x+5\geq 20x+60$

$-17x\geq 71$

$x\geq -\frac{71}{17}$

$P=\left\langle -\frac{71}{17},\infty\right)$



2.

a) $x_1=0, x_2=5$

$ax^2+bx+c=0$

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$

$(x-0)(x-5)=0$

$x^2-5x=0$

b) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{3}$

$ax^2+bx+c=0$

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$

$6x^2-x-1=0$

c) $x_1=2+\sqrt{3}, x_2=2-\sqrt{3}$

$ax^2+bx+c=0$

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$

$\left(x-2-\sqrt{3}\right)\left(x-2+\sqrt{3}\right)=0$

$x^2-4x+1=0$

3.

a) $-3x^2+9x\leq 0$

$-3x(x-3)\leq 0$

$x(x-3)\geq 0$

$x=0 \quad x=3$

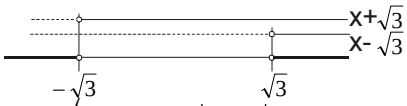
$P=(-\infty,0\rangle\cup\langle 3,\infty)$

b) $-4x^2+12<0$

$-4(x^2-3)<0$

$\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0$

$x=\sqrt{3} \quad x=-\sqrt{3}$



$P=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{3},\infty\right)$

c) $-4x^2-12<0$

$-4(x^2+3)<0$

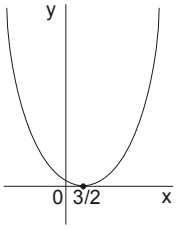
$P=R$

4.

a) $4x^2-12x+9\leq 0$

$4x^2-12x+9=0$

$D=0 \qquad x=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$



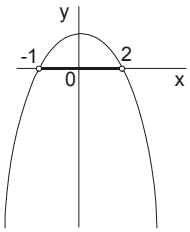
$P=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $-x^2+x+2>0$

$-x^2+x+2=0$

$D=9 \qquad \sqrt{D}=3$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{-2} \qquad x_1=2 \quad x_2=-1$



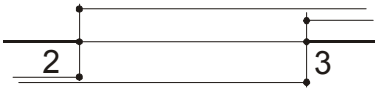
$P=(-1,2)$

5.

a) $\dfrac{x-2}{3-x}\leq 0$

$(x-2\leq 0\ \wedge\ 3-x>0)\vee(x-2\geq 0\ \wedge\ 3-x<0)$

$(x\leq 2\ \wedge\ 3>x)\vee(x\geq 2\ \wedge\ 3<x)$

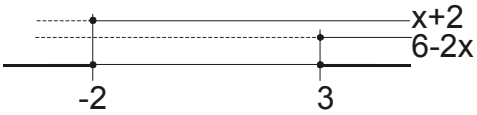


$P=(-\infty,2\rangle\cup\langle 3,\infty)$

b) $(2+x)(6-2x) \le 0$

$2+x=0 \vee 6-2x=0$

$x=-2 \qquad x=3$



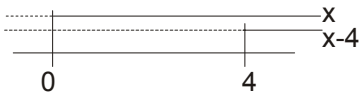
$P=(-\infty,-2\rangle \cup \langle 3,\infty)$

6.

a) $2|x| = |x-4|+3$

$x=0 \qquad x-4=0$

$x=4$



1. $(-\infty,0\rangle \ldots -2x=-x+7$

$x=-7 \ldots -7 \in (-\infty,0\rangle \ldots P_1=\{-7\}$

2. $\langle 0,4\rangle \ldots 2x=-x+7$

$x=\frac{7}{3} \ldots \frac{7}{3} \in \langle 0,4\rangle \ldots P_2=\left\{\frac{7}{3}\right\}$

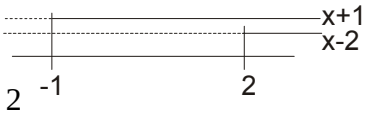
3. $\langle 4,\infty) \ldots 2x=x-1$

$x=-1 \ldots -1 \in \langle 4,\infty) \ldots P_3=\theta$

$P=P_1 \cup P_2 \cup P_3=\{-7,\frac{7}{3}\}$

b) $|x-2|=2|x+1|$

$x=2 \qquad x=-1$



1. $(-\infty,-1\rangle \ldots -x+2=-2x-2$

$x=-4 \ldots -4 \in (-\infty,-1\rangle \ldots P_1=\{-4\}$

2. $\langle -1,2\rangle \ldots -x+2=2x+2$

$3x=0$

$x=0 \ldots 0 \in \langle -1,2\rangle \ldots P_2=\{0\}$

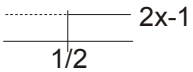
3. $\langle 2,\infty) \ldots x-2=2x+2$

$x=-4 \ldots -4 \notin \langle 2,\infty) \ldots P_3=\theta$

$P=P_1 \cup P_2 \cup P_3=\{-4,0\}$

c) $|2x-1|=x+6$

$2x-1=0 \qquad x=\frac{1}{2}$



1. $(-\infty,\frac{1}{2}\rangle \ldots -2x+1=x+6$

$-3x=5$

$x=-\frac{5}{3} \ldots -\frac{5}{3} \in (-\infty,\frac{1}{2}\rangle \ldots P_1=\{-\frac{5}{3}\}$

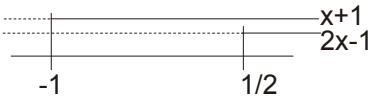
2. $\langle \frac{1}{2},\infty) \ldots 2x-1=x+6$

$x=7 \ldots 7 \in \langle \frac{1}{2},\infty) \ldots P_2=\{7\}$

$P=P_1 \cup P_2=\{-\frac{5}{3},7\}$

d) $|x+1|+|2x-1|=3$

$x=-1 \qquad x=\frac{1}{2}$



1. $(-\infty,-1\rangle \ldots -x-1-2x+1=3$

$-3x=3$

$x=-1 \ldots -1\in(-\infty,-1\rangle \ldots P_1=\{-1\}$

2. $\langle -1,\frac{1}{2}\rangle \ldots x+1-2x+1=3$

$x=-1 \ldots -1\in\langle -1,\frac{1}{2}\rangle \ldots P_2=\{-1\}$

3. $\langle \frac{1}{2},\infty) \ldots x+1+2x-1=3$

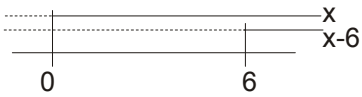
$3x=3$

$x=1 \ldots 1\in\langle \frac{1}{2},\infty) \ldots P_3=\{1\}$

$P=P_1\cup P_2\cup P_3=\{-1,1\}$

e) $|x-6|=2|x|+3$

$x=6 \qquad x=0$



1. $(-\infty,0\rangle \ldots -x+6=-2x+3$

$x=-3 \ldots -3\in(-\infty,0\rangle \ldots P_1=\{-3\}$

2. $\langle 0,6\rangle \ldots -x+6=2x+3$

$3x=3$

$x=1 \ldots 1\in\langle 0,6\rangle \ldots P_2=\{1\}$

3. $\langle 6,\infty) \ldots x-6=2x+3$

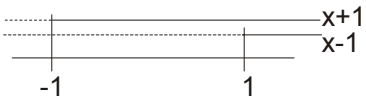
$x=-9 \ldots -9\notin\langle 6,\infty) \ldots P_3=\theta$

$P=P_1\cup P_2\cup P_3=\{-3,1\}$

7.

a) $|x+1|-|x-1|\geq x$

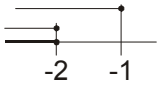
$x=-1 \qquad x=1$



1. $(-\infty,-1\rangle \ldots -x-1+x-1\geq x$

$-2\geq x$

$P_1=(-\infty,-2\rangle$

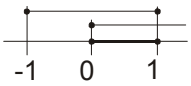


2. $\langle -1,1\rangle \ldots x+1+x-1\geq x$

$2x\geq x$

$x\geq 0$

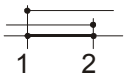
$P_2=\langle 0,1\rangle$



3. $\langle 1,\infty) \ldots x+1-x+1\geq x$

$2\geq x$

$P_3=\langle 1,2\rangle$



$P=P_1\cup P_2\cup P_3=(-\infty,-2\rangle\cup\langle 0,2\rangle$

b) $|x| < 3$

$|x-0| < 3 \qquad P = (-3,3)$

c) $|x| + 5 > 0$

$|x| > -5$ keďže $\forall x \in R : |x| \geq 0$, tak je zrejmé, že $P = R$

d) $|x| + 4 < 1$

$|x| < -3$ keďže $\forall x \in R : |x| \geq 0$, tak je zrejmé, že $P = \theta$

e) $|x+2| \leq 10$

$|x-(-2)| \leq 10 \qquad P = \langle -12, 8 \rangle$

f) $|x-1| \geq 0 \qquad P = R$

8.

a) $\dfrac{x-a}{1-a} = \dfrac{x+a}{1+a} \quad \Big| \begin{array}{l} a \neq \pm 1 \\ .(1-a)(1+a) \end{array}$

$(x-a)(1+a) = (x+a)(1-a)$

$x - a + ax - a^2 = x + a - ax - a^2$

$2ax = 2a$

$ax = a \quad \Big| . \frac{1}{a}$

$a = 0$

$\frac{x-0}{1-0} = \frac{x+0}{1+0}$

$x = x$

$x \in R$

$a \neq 0$

$x = 1$

$a = 0 \ldots P_0 = R$

$a \neq 0; \pm 1 \ldots P_a = \{1\}$

b) $\dfrac{x+a}{a} = ax - 1$

$x + a = a^2 x - a$

$x - a^2 x = -2a$

$x(1-a^2) = -2a$

$x(1-a)(1+a) = -2a \quad \Big| . \frac{1}{1-a}$

$a = 1$

$x + 1 = x - 1$

$0x = -2$

$P_1 = \theta$

$a \neq 1$

$x(1+a) = \dfrac{1}{1-a} \quad \Big| . \frac{1}{1+a}$

$a = -1$

$x - 1 = x + 1$

$0x = 2$

$P_{-1} = \theta$

$a \neq -1$

$x = \dfrac{-2a}{1-a^2}$

$a = 1 \ldots P_1 = \theta$

$a = -1 \ldots P_{-1} = \theta$

$a \neq \pm 1; 0 \ldots P_a = \left\{ \frac{-2a}{1-a^2} \right\}$

c) $\sqrt{x^2+m}=m-x$

$$x^2+m=m^2-2mx+x^2$$

$$2mx=m^2-m$$

$$2mx=m(m-1)$$

$m=0$	$m\neq 0$
$\sqrt{x^2}=-x$	$2x=m-1$
$\lvert x\rvert=-x$	$x=\frac{m-1}{2}$
$x\leq 0$	

$$p\left(\frac{m-1}{2}\right)=m-\frac{m-1}{2}=\frac{m+1}{2}$$

$$l\left(\frac{m-1}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2+m}=\sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right)^2}=\left|\frac{m+1}{2}\right|=\frac{|m+1|}{2}=$$

$m+1\geq 0$	$m+1<0$
$m\geq -1$	$m<-1$
$\frac{m+1}{2}$	$\frac{-m-1}{2}$

$m=0\ \ldots\ P_0=(-\infty,0\rangle$

$m<-1\ \ldots\ P_m=\theta$

$0\neq m\geq -1\ \ldots\ P_m=\left\{\frac{m-1}{2}\right\}$

8. Postupnosti

1.

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad a_5 = 10, a_6 = 9$

$a_7 = a_6 + a_5 \qquad a_8 = a_7 + a_6 = 2a_6 + a_5 = 28$

$a_6 = a_5 + a_4 \quad a_5 = a_4 + a_3 \quad a_4 = a_3 + a_2 \quad a_3 = a_2 + a_1$

$a_1 = a_3 - a_2 = a_3 - (a_4 - a_3) = 2a_3 - a_4 = 2(a_5 - a_4) - a_4 = 2a_5 - 3a_4 =$

$= 2a_5 - 3(a_6 - a_5) = 5a_5 - 3a_6 = 23$

2.

a) $a_{n+1} = 2 - a_n \quad a_1 = 3$

$a_2 = -1, a_3 = 3, a_4 = -1, \ldots$

$a_n = 1 - (-1)^n 2$

1. $n = 1 \ldots a_1 = 1 - (-1)^1 2 = 1 + 2 = 3$ platí
2. $\forall k \in N : a_k = 1 - (-1)^k 2 \Rightarrow a_{k+1} = 1 - (-1)^{k+1} 2$

$a_{k+1} = 2 - a_k = 2 - 1 + (-1)^k 2 = 1 + (-1)^k 2 = 1 + (-1)^k (-1)(-1)2 = 1 - (-1)^{k+1} 2$

$\forall n \in N : a_n = 1 - (-1)^n 2$

b) $a_{n+2} = \frac{1}{2}(3a_{n+1} - a_n) \quad a_1 = 2, a_2 = 1$

$a_3 = a_{1+2} = \frac{1}{2}(3.1 - 2) = \frac{1}{2}, a_4 = a_{2+2} = \frac{1}{2}(3.\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4}, \ldots$

$a_n = 2^{2-n}$

1. $n = 1 \ldots a_1 = 2^{2-1} = 2$ platí
2. $\forall k \in N : a_k = 2^{2-k} \Rightarrow a_{k+1} = 2^{2-(k+1)} = 2^{1-k}$

$a_{k+1} = \frac{1}{2}(3a_k - a_{k-1}) = \frac{1}{2}(3.2^{2-k} - 2^{3-k}) = \frac{1}{2}(6.2^{1-k} - 4.2^{1-k}) = 2^{1-k}$

$\forall n \in N : a_n = 2_{2-n}$

3.

a) $\left\{\frac{3n^2+6}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$a_n = \frac{3n^2+6}{n^2}, a_{n+1} = \frac{3(n+1)^2+6}{(n+1)^2}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)^2+6}{(n+1)^2} - \frac{3n^2+6}{n^2} = \frac{(3n^2+6n+9)n^2 - (3n^2+6)(n^2+2n+1)}{(n^2+2n+1)n^2} = -\frac{18n+6}{n^4+2n^3+n^2} < 0$

klesajúca

b) $\{2^n - 1\}_{n=1}^{\infty}$

$a_n = 2^n - 1, a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 1 - 2^n + 1 = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n > 0$

rastúca

c) $\{tn\}_{n=1}^{\infty}, t \in R$

$a_n = tn, a_{n+1} = tn + t$

$a_{n+1} - a_n = tn + t - tn = t$

$t \in (0, \infty)$	$t = 0$	$t \in (-\infty, 0)$
rastúca	stacionárna	klesajúca

4.

a) $a_1 + a_7 = 42, a_{10} - a_3 = 21$ určite a_1 a d

$$a_1 + a_1 + 6d = 42$$
$$a_1 + 9d - a_1 - 2d = 21$$
$$2a_1 + 6d = 42$$
$$7d = 21$$

$$2a_1 = 42 - 6d$$
$$d = 3$$
$$2a_1 = 42 - 6.3$$
$$a_1 = 12$$

b) poznáme a_5 a a_{13} vyjadrite a_1 a d

$$a_{13} = a_5 + 8d \qquad d = \frac{a_{13} - a_5}{8}$$
$$a_{13} = a_1 + 12d$$
$$a_1 = a_{13} - 12d = a_{13} - 3.\frac{a_{13} - a_5}{2} = \frac{3a_5 - a_{13}}{2}$$

5.

$$a_1 = 85, d = 1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d = 84 + n \qquad 100 = 84 + n \qquad n = 16$$
$$s_{16} = \frac{16(85+100)}{2} = 1480$$

6.

$$2, a_2, a_3, a_4, a_5, 486$$
$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$486 = 2q^5$$
$$q^5 = 243$$
$$q = 3 \qquad 2, 6, 18, 54, 162, 486 \qquad s_6 = 2.\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728$$

7.

$$a_1 = 2 + x, a_2 = 7 + x, a_3 = 17 + x$$
$$7 + x = (2 + x)q$$
$$17 + x = (7 + x)q$$
$$7 + x = 2q + qx$$
$$17 + x = 7q + qx$$
$$10 = 5q$$
$$q = 2$$

$$7 + x = (2 + x)2$$
$$7 + x = 4 + 2x \qquad x = 3$$

9. Limita postupnosti a nekonečné rady

1.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

$$s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1 = s$$

konvergentný, $s = 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} + \cdots$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \left(\sqrt{1} - \sqrt{0}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = \sqrt{n} - \sqrt{0} = \sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

divergentný

2.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$-\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots \qquad q = -\frac{2}{3} \ldots \left|q\right| = \frac{2}{3} < 1 \ldots \; s = \frac{-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{2}{5}$$

konvergentný $s = -\frac{2}{5}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}}$

$$\frac{\sqrt{5}}{2^0} + \frac{\sqrt{5}}{2^1} + \frac{\sqrt{5}}{2^2} + \cdots \qquad q = \frac{1}{2} \ldots \left|q\right| = \frac{1}{2} < 1 \ldots \; s = \frac{\sqrt{5}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{5}$$

konvergentný $s = 2\sqrt{5}$

3.

$$1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \cdots = \frac{8}{x+10}$$

$$q = -\frac{3}{x} \qquad \left|q\right| < 1 \qquad \left|\frac{-3}{x}\right| < 1 \qquad \frac{3}{|x|} < 1$$

$$3 < |x| \qquad K = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

$$\frac{1}{1+\frac{3}{x}} = \frac{8}{x+10} \qquad \frac{x}{x+3} = \frac{8}{x+10}$$

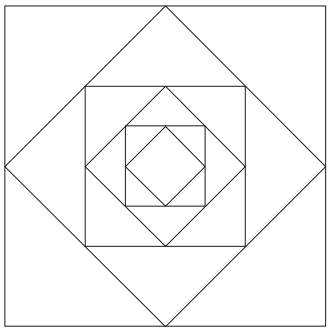
$$x^2 + 10 = 8x + 24$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x-4)(x+6) = 0$$

$$x = 4 \vee x = -6 \qquad P = \{-6, 4\}$$

4.



$a_1 = a, a_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}, a_3 = \frac{a}{2}, \ldots \qquad q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$O_1 = 4a, O_2 = 4.\frac{a}{\sqrt{2}}, O_3 = 4.\frac{a}{2}, \ldots \qquad q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$O = O_1 + O_2 + O_3 + \cdots = 4a + 4.\frac{a}{\sqrt{2}} + 4.\frac{a}{2} + \cdots =$

$= \frac{4a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

$S_1 = a^2, S_2 = \frac{a^2}{2}, S_3 = \frac{a^2}{4}, \ldots \qquad q = \frac{1}{2}$

$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \ldots =$

$= \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$

5.

$\underbrace{a_1}_{1} + \underbrace{a_2 + a_3 + \cdots}_{1} = s = 2$

$a_2 + a_3 + \cdots = 1 = \frac{1q}{1-q}$

$1 = \frac{1q}{1-q}$

$1 - q = q$

$q = \frac{1}{2}$

10. Limita a derivácia funkcie

1.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+6x-7}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+7)}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+1)}=\frac{-2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x+\sin x}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{2}^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(\sqrt{6+x}-2)(\sqrt{6+x}+2)}{(x+2)(\sqrt{6+x}+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{6+x}+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{1}{\sqrt{6+x}+2}=\frac{1}{4}$

2.

a) $f(x)=\sin^2 x$

$$f'(x)=[\sin x.\sin x]'=[\sin x]'.\sin x+\sin x.[\sin x]'=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

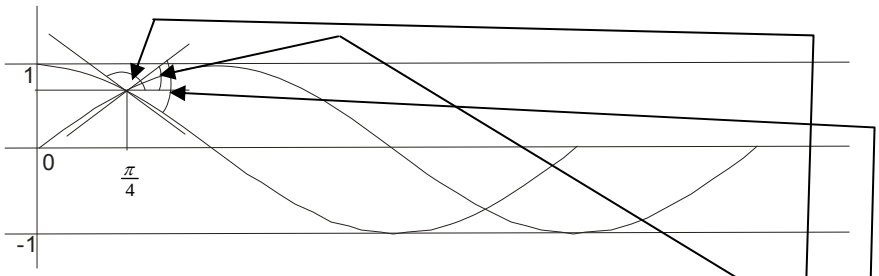
b) $f(x)=\sin 2x$

$$f'(x)=[\sin 2x]'=[2\sin x\cos x]'=2[\sin x\cos x]'=$$
$$=2.(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos 2x$$

c) $f(x)=(x^3.\sin x).\cos x$

$$f'(x)=[(x^3.\sin x).\cos x]'=[x^3.\sin x]'.\cos x+(x^3.\sin x).[\cos x]'=$$
$$=([x^3]'.\sin x).\cos x+(x^3.[\sin x]')\cos x+(x^3.\sin x).[\cos x]'=$$
$$=3x^2\sin x\cos x+x^3\cos^2 x-x^3\sin^2 x=3x^2\,\frac{\sin 2x}{2}+x^3\cos 2x$$

3.



$$f'(x)=[\sin x]'=\cos x\ldots f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ldots\alpha=35°$$
$$g'(x)=[\cos x]'=-\sin x\ldots g'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ldots\beta=145°$$
$$\varphi=180°-\alpha-\beta=180°-(145°-35°)=70°$$

- zvierajú uhol $70°$

11. Funkcie a ich vlastnosti

1.

a) $f(0)=2, f(-3)=-1, g(a+1)=2a^2+7a+6$

b) $f(x^2)=x^2+2, g(x-1)=2x^2-x, g(-x)=2x^2-3x+1$

c) $f(g(x))=2x^2+3x+3, g(f(x))=2x^2+11x+15, g(f(x+1))=2x^2+15x+28$

2.

a) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x \qquad 12x^3-12x^2-24x>0$

$x(x^2-x-2)>0 \qquad x(x+1)(x-2)>0$

rastúca … $\langle -1,0\rangle;\langle 2,\infty)$

klesajúca … $(-\infty,-1\rangle;\langle 0,2\rangle$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

$D(f)=R-\{-1,1\} \qquad f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$\frac{-2x}{(x^2-1)^2}>0 \qquad -2x>0 \qquad x<0$

rastúca … $(-\infty,-1);(-1,0\rangle$

klesajúca … $\langle 0,1);(1,\infty)$

c) $f(x)=\ln(1+x^2)$

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2} \qquad \frac{2x}{1+x^2}>0$

$2x>0 \qquad x>0$

rastúca … $\langle 0,\infty)$

klesajúca … $(-\infty,0\rangle$

d) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \qquad \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})>0$

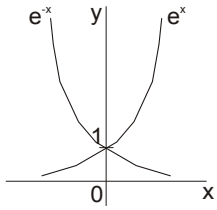
$e^x-e^{-x}>0$

$e^x>e^{-x}$

$x>0$

rastúca … $\langle 0,\infty)$

klesajúca … $(-\infty,0\rangle$



13. Mocniny a mocninové funkcie

1.

a) 2^4 b) 2^{44} c) 2^2 d) 3^7 e) 2^5

2.

a) $\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{a^5}=a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{3}{4}}.a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{4+9+10}{12}}=a^{\frac{23}{12}}$

b) $\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^7}}}=\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[12]{a^7}}=\frac{\sqrt[12]{a^{10}}}{\sqrt[12]{a^7}}=\sqrt[12]{a^3}$

c) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}}=\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{4}}$

d) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^4}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3]{2}$

14. Exponenciálne a logaritmické funkcie

1.

$\left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{2}{5}\right)^5$

$f: y = \left(\frac{2}{5}\right)^x \qquad a = \frac{2}{5} < 1 \ldots$klesajúca

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

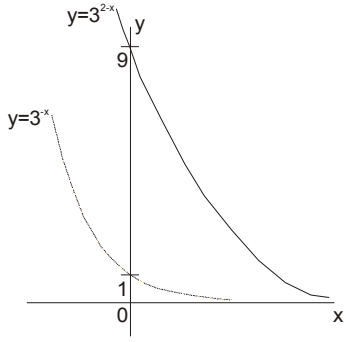
$\left(\frac{2}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{2}{5}\right)^{x_2}$

$2 < 5 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 > \left(\frac{2}{5}\right)^5$

2.

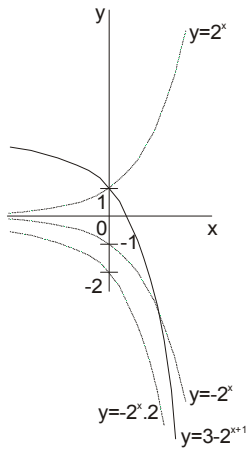
a) $y = 3^{2-x}$

$3^{2-x} = 3^2.3^{-x} = 9.3^{-x}$



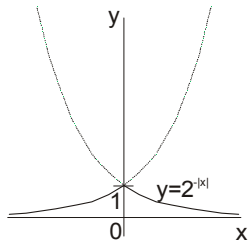
b) $y = 3 - 2^{x+1}$

$3 - 2^{x+1} = -2^x.2 + 3$



c) $y = 2^{-|x|}$

1. $x \geq 0 \ldots y = 2^{-x}$
2. $x < 0 \ldots y = 2^x$



3.

a) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5.\log_2 2 = 5$

b) $\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 4^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 2^4 = \frac{1}{3}.2 = \frac{2}{3}$

c) $8^{1+\log_8 5} = 8^{\log_8 8+\log_8 5} = 8^{\log_8 40} = 40$

d) $\log_2(\log_3(\log_4 64)) = \log_2(\log_3(\log_4 4^3)) = \log_2(\log_3(3.\log_4 4)) = 0$

Obsah

1.	ZÁKLADY MATEMATICKEJ LOGIKY	3
2.	MÉTÓDY DÔKAZOV V MATEMATIKE	7
3.	TEÓRIA ČÍSEL	16
4.	KOMPLEXNÉ ČÍSLA	29
5.	LINEÁRNE ROVNICE, NEROVNICE A ICH SÚSTAVY	42
6.	ROVNICE A NEROVNICE	64
7.	ALGEBRICKÉ ROVNICE	86
8.	POSTUPNOSTI	92
9.	LIMITA POSTUPNOSTI A NEKONEČNÉ RADY	111
10.	LIMITA A DERIVÁCIA FUNKCIE	123
11.	FUNKCIE A ICH VLASTNOSTI	138
12.	POLYNOMICKÉ A RACIONÁLNE FUNKCIE	155
13.	MOCNINY A MOCNINOVÉ FUNKCIE	170
14.	EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE	181
15.	GONIOMETRICKÉ FUNKCIE	194
16.	GONIOMETRIA	209
17.	NEURČITÝ INTEGRÁL	215
18.	URČITÝ INTEGRÁL A JEHO APLIKÁCIE	222
19.	TROJUHOLNÍK	241
20.	MNOHOUHOLNÍKY	259
21.	GEOMETRICKÉ ZOBRAZENIA	266
22.	STEREOMETRIA	274
23.	TELESÁ, ICH OBJEMY A POVRCHY	286
24.	VEKTORY	297
25.	ANALYTICKÁ GEOMETRIÁ LINEÁRNYCH ÚTVAROV	318
26.	KUŽEĽOSEČKY	347
27.	KOMBINATORIKA	394
28.	PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA	417
29.	TEÓRIA GRAFOV	447
30.	ZÁKLADY NUMERICKEJ MATEMATIKY	459
D1	MNOŽINY	469
D2	KONŠTANTY A PREMENNÉ	475
D3	VÝRAZY A ICH ÚPRAVY	476
D4	MNOHOČLENY A OPERÁCIE S NIMI	480
D5	SLOVNÉ ÚLOHY	483
D6	PLANIMETRIA	488
ZU	ZAUJÍMAVÉ ÚLOHY	508
VÝSLEDKY CVIČENÍ		511

(Použité skratky a značky: Pr. = Príklad, Def. = Definícia, θ = prázdna množina)

Vzorce na derivovanie

1. $[c]' = 0$

2. $[x]' = 1$

3. $[x^n]' = nx^{n-1}; n \in N, x \in R$

4. $[x^n]' = nx^{n-1}; n \in Z, x \in R - \{0\}$

5. $[x^n]' = nx^{n-1}; n \in R, x \in R^+$

6. $[\sin x]' = \cos x$

7. $[\cos x]' = -\sin x$

8. $[\mathrm{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}; x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$

9. $[\mathrm{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}; x \neq k\pi$

10. $[a^x]' = a^x.\ln a$

11. $[e^x]' = e^x$

12. $[e^{-x}]' = -e^{-x}$

13. $[\ln x]' = \frac{1}{x}; x > 0$

14. $[\log_a x]' = \frac{1}{x.\ln a}; x > 0, 1 \neq a > 0$

15. $[c.f(x)]' = c.f'(x)$

16.: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

17. $[f(x).g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

18.: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; g(x) \neq 0$

19.: $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}; g(x) \neq 0$

20. $F'(x) = f'(u_0).\varphi'(x_0)$

21. $[\ln \varphi(x)]' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}; \varphi(x) > 0$

22. $[\log_a \varphi(x)]' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x).\ln a}; \varphi(x) > 0, 1 \neq a > 0$

23. $\left[\sqrt{\varphi(x)}\right]' = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}}; \varphi(x) > 0$

24. $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

25. $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

26. $[\mathrm{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$

27. $[\mathrm{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$

Vzorce na integrovanie

1. $\int 1\,dx = x + c; x \in R$

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \in N, x \in R$

3. $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c; r \in R - \{-1\}, x \in R^+$

4. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c; x \in (0, \infty)$

5. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c; x \in (-\infty, 0)$

6. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c; x \in R - \{0\}$

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c; x \in R$

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + c; x \in R$

9. $\int \mathrm{tg}x\,dx = -\ln|\cos x| + c; x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$

10. $\int \mathrm{cotg}x\,dx = \ln|\sin x| + c; x \neq k\frac{\pi}{2}$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}x + c; x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$

12. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{cotg}x + c; x \neq k\pi$

13. $\int e^x\,dx = e^x + c; x \in R$

14. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c; 0 < a \neq 1,\ x \in R$

15. $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + c; x \in R^+$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$

17. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}x$

18. $c.\int f(x)dx = \int c.f(x)dx$

19. $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int (f(x) \pm g(x))dx$

20. $\int \log_a x\,dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}\,dx = \frac{1}{\ln a}\int \ln x\,dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + c; x > 0$

21. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

22. $\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx$

23. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

24. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

25. $\overline{f(x)} = \frac{1}{(b-a)}.\int_a^b f(x)dx$

26. $S(E) = \int_a^b f(x)dx$ - ohraničená zdola osou x

27. $S(E) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ - ohraničená zhora $f(x)$ a zdola $g(x)$

28. $V(T) = \pi.\int_a^b f^2(x)dx$ - ohraničené zdola osou x

29. $V(T) = \pi.\int_a^b f^2(x) - g^2(x)dx$

- ohraničená zhora $f(x)$ a zdola $g(x)$

30. $l(k) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$ - dĺžka krivky k na intervale $\langle a,b \rangle$

31. $S(P) = 2\pi.\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$