ROVNICA

2+7=9 – rovnosť
2+x=9 – rovnica

Rovnica je vzťah rovnosti medzi dvoma algebrickými výrazmi, a na rozdiel od rovnosti (identity) dá dosadiť len niekoľko špecifických hodnôt.

V matematike definujeme pojmy.
3 + 7 = 10
– toto je výrok
$x + 7 = 10; x \in R$
- toto je rovnica, ktorá sa po dosadení čísla za x stáva výrokom
- je to výroková forma

x – nazývame premenná
Definičný obor výrokovej formy je množina všetkých prvkov z M (M je základná množina, vačšinou R), po dosadení ktorých dostaneme výrok (buď pravdivý alebo nepravdivý).
Výrokové formy môžu byť rôzne.
Výroková forma, ktorá sa po dosadení za premennú stáva výrokom o rovnosti čísel sa nazýva rovnica.
v prípade rovnice x nazývame neznáma.
Prvok množiny K nazývame koreň rovnice.
- je to číslo, po dosadení ktorého sa rovnica stáva výrokom o rovnosti čísel

Riešiť rovnicu:
- znamená určiť množinu K; čiže určiť množinu všetkých koreňov danej rovnice.

LINEÁRNE ROVNICE

Lineárne rovnice:
Vyriešiť lineárnu rovnicu znamená nájsť množinu všetkých reálnych čísel, ktoré keď do danej rovnice dosadíme za premennú dostaneme pravdivú rovnosť. Pri riešení rovníc používame ekvivalentné úpravy, sú to také požitím ktorých z danej rovnice dostaneme novú rovnicu, ale ich množiny riešení musia byť rovnaké

- obsahujú neznámu v 1. mocnine
- tvar: ax + b = 0
  Napr. 2x – 1 = 0
  Postup riešenia:
  a) keď vidíme riešenie napíšeme K
     Napr. v R: x + 1 =0
     K = $\{-1\}$
  b) keď koreň nevidíme priamo
     - upravujeme dovtedy než ten koreň nepoznáme

     Úpravy:
     - neznáme dáme na ľavú stranu a známe na pravú stranu
     - delíme konkrétnym číslom

     Napr. v Z: $\frac{7x-1}{3}$ = 5x -6 - $\frac{5+3x}{2}$
     2(7x – 1) = 30x – 36 – 3(5 + 3x) - - - - odstránime zlomky
     14x – 2 = 30x – 36 – 15 -9x - - - - - úprava výrazov

$14x - 2 = 21x - 51$ - - - - - zjednodušíme
$14x - 21x = 2 - 51$ - - - - prenesieme
$-7x = -49$
$x = 7$
$K = \{7\}; 7 \in Z$

Pri riešení môžu nastať 3 prípady:

- ak a je rôzne od nuly, potom ax = -b a rovnica má práve jeden koreň x = -b/a;
- ak a = b = 0, po úprave dostaneme 0 = 0 a to je pravdivý výrok (rovnosť), takže pôvodná rovnica má nekonečne veľa riešení resp. koreňom tejto rovnice je každé reálne číslo;
- ak sme po úprave dostali nepravdivú rovnosť (napr. 5=3) - pôvodná rovnica nemá žiadne riešenie.

Lineárne rovnice s 2 neznámymi- sústavy rovníc:
- nazývame rovnicu tvaru $ax + by = c$; $a, b, c \in R$; $a, b \neq 0$
- má nekonečne veľa riešení v R
- riešením sú usporiadané dvojice čísel

KVADRATICKÁ ROVNICA

Kvadratická rovnica:
- je každá rovnica tvaru: $ax^2 + bx + c = 0$; a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla , $a \neq 0$
- normovaný tvar rovnice; $x^2 + px + q = 0$ ($p = \frac{b}{a}$; $q = \frac{c}{a}$)
- ak c = 0, hovoríme o kvadratickej rovnici bez absolútneho člena; $ax^2 + bx = 0$
- ak b = 0, hovoríme o rýdzo kvadratickej rovnici; $x^2 + c = 0$

Postup riešenia:
- a) rozkladom na súčin
  Napr. $x^2 - 5x + 6 = 0$
  $(x-2)(x-3) = 0$
  $K = \{2,3\}$
- b) pomocou vzorcov
  určíme diskriminant kvadratickej rovnice t.j číslo $D = b^2 - 4ac$
  ak $D < 0$ potom
  $K = \emptyset$ (v R)
  $K = \left\{\frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a}, \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a}\right\}$ (v C; sú to čísla komplexne združené, nemá žiaden koreň)
  ak $D = 0$ potom $K = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$ (korene sú reálne rovnaké, tzv. jeden dvojnásobný koreň)

ak D > 0 potom K = $\left\{\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right\}$ (má 2 reálne rôzne korene)

Napr. $15x^2 - 38x + 24 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 38^2 - 4.15.24 = 1444 - 1440 = 4$

$D > 0 \Rightarrow$ rovnica má dva rôzne korene x_1, x_2

$x_{1,2} = \frac{38 \pm 2}{2.15} = \frac{38 \pm 2}{30}$

$x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{6}{5}$

$K = \left\{\frac{4}{3}, \frac{6}{5}\right\}$

<u>Vzťahy medzi koreňmi a koeficientmi kvadratickej rovnice:</u>

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) . (x - x_2);\ x_1 \neq x_1$ - reálne korene

Nazývame to rozklad kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov.

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + \frac{b}{a} . x + \frac{c}{a} = 0$

$x^2 + px + q = 0;\ p = \frac{b}{a};\ q = \frac{c}{a}$

$(x - x_1) . (x - x_2) = 0$

$x^2 - x_1 . x + x_1 . x_2 - x . x_2 = 0$

$x^2 - (x_1 + x_2) . x + x_1 . x_2 = 0$

<u>Platí:</u>

$p = -(x_1 + x_2)$

$q = x_1 . x_2$

NEROVNICA

Výroková forma, ktorá sa po dosadení za premennú stáva výrokom o nerovnosti čísel sa nazýva nerovnica.
Koreňom nerovnice je interval.
Riešenie nerovnice:
Napr. v R: $-5x \geq 2$
$5x \leq -2$
$x \leq -\frac{2}{5}$
$K = \left(-\infty, -\frac{2}{5} \right\rangle$

Pri riešení nerovníc často používame aj metódu intervalov (tým že si nájdeme nulové body a dosadíme ich na číselnú os), tento postup je síce rýchlejší ako iné, ale súčasne náročnejší na sledovanie všetkých podmienok.
Ak pri riešení nerovnice používame iba ekivalentné úpravy, nemusíme robiť skúšku. Ak ju urobíme, tak overujeme len správnosť vykonaných úprav. Nerovnice majú často nekonečne veľa koreňov, skúška je zdĺhavá a pomerne obtiažna. Namiesto nej urobíme len približné overenie, t. j. dosadíme len niektoré z čísel patriacich do oboru pravdivosti a niekoľko čísel momi neho, a tak overujeme svoje výpočty.

Lineárna nerovnica s neznámou x patrí do R je každá nerovnica tvaru $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, kde a, b sú ľubovoľné reálne čísla.

Kvadratická nerovnica je taká nerovnica, v ktorej sa vyskytuje premenná (napr. x) so stupňom mocniny maximálne dva, t. j. nerovnica, ktorá sa dá upraviť na jeden z tvarov: $ax^2 + bx + c< 0$ $ax^2 + bx + c\leq 0$, $ax^2 + bx + c> 0$, $ax^2 + bx + c\geq 0$, kde a, b, c, sú ľubovoľné reálne čísla, a sa nesmie rovnať nule, x ktoré patrí do R je neznáma.

Kvadratické nerovnice riešime opať pomocou nulových bodov, číselnej osi a intervalov, ktoré vzniknú vďaka nulovým bodom. Nerovnice anulujeme (upravíme ich tak , aby na jednej strane nerovnice bola nula) a zistíme znamienko nenulovej strany rovnice v niektorom z intervalov (pomocou zvoleného čísla z toho intervalu). Využívame fakt, že znamienko kvadratickej funkcie sa v jednotlivých intervaloch strieda.

Ekvivalentné úpravy nerovníc:

1. vzájomná výmena strán nerovnice so súčasnou zmenou znaku nerovnosti na obrátený;
2. nahradenie ľubovoľnej strany nerovnice výrazom, ktorý sa jej rovná v celom obore riešenia nerovnice, pričom znak nerovnosti sa nezmení;
3. pripočítaním toho istého čísla alebo výrazu s neznámou, ktorý je definovaný v celom obore riešenia, k obom stranám nerovnice, pričom znak nerovnosti sa nemení;
4. vynásobenie oboch strán nerovnice kladným číslom alebo výrazom s neznámou, pričom znak nerovnosti sa nemení;
5. vynásobenie oboch strán nerovnice záporným číslom alebo výrazom s neznámou, pritom znak nerovnosti sa zmení v obrátený;
6. umocnenie oboch strán nerovnice prirodzeným mocniteľom, ak sú obe strany nerovnice nezáporné, pritom znak nerovnosti sa nemení;
7. odmocnenie oboch strán nerovnice prirodzeným odmocniteľom, ak sú obe strany nerovnice nezáporné, pričom znak nerovnosti sa nemení;
8. zlogaritmovaní oboch strán nerovnice pri tom istom základe väčšom ako 1, ak sú obe strany nerovnice kladné, pritom znak nerovnosti sa nemení.

Ekvivalentnými úpravami sa nezmení obor pravdivosti žiadnej novovzniknutej rovnice. Nemusíme preto robiť skúšku ako neoddeliteľnú súčasť riešenia rovnice. Ak ju robíme, tak overujeme len správnosť vykonaných úprav. Pri niektorých typoch rovníc (napr. s neznámou v odmocnenci) je skúška neoddeliteľnou súčasťou riešenia.

Dôsledková úprava rovnice je každá taká úprava rovnice, ktorá nie je ekvivalentná. Takýmito úpravami sú napríklad umocnenie a odmocňovanie – pri umocňovaní môžu vzniknúť nové korene, pri odmocňovaní zas korene odpadnúť. Čím sa zmení obor pravdivosti novovzniknutej rovnice, preto musíme robiť skúšku ako neoddeliteľnú súčasť riešenia.