

Trojuholník

Trojuholník je jeden zo základných rovinných geometrických útvarov; mnohouholník s troma vrcholmi a stranami. Je to dvojrozmerný útvar. Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180° .

Trojuholník môžeme definovať ako **prienik troch polrovín**. Ak máme tri rôzne body A, B, C, (ktoré neležia na jednej priamke) tak trojuholníkom s vrcholmi A, B, C nazývame prienik polrovín ABC, ACB, BCA.

Úsečky AB, BC, CA sú stranami tohto trojuholníka a ich zjednotenie je obvod trojuholníka. Pre strany trojuholníka musí platiť **trojuholníková nerovnosť**, tj. , že súčet dĺžok dvoch ľubovoľných strán je väčší ako dĺžka tretej strany, teda:

- $a + b > c$
- $b + c > a$
- $a + c > b$

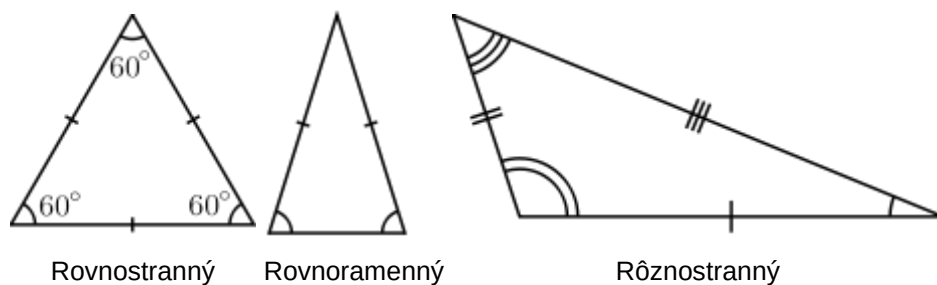
Trojuholníky možno triediť podľa viacerých kritérií:

1. Podľa dĺžky jeho strán

-**Rovnostranný trojuholník** – všetky strany majú rovnakú dĺžku. Rovnostranný trojuholník je tiež **rovnouhlý**, t. j. všetky jeho vnútorné uhly majú rovnakú veľkosť, a to 60° ; je to pravidelný mnohouholník.

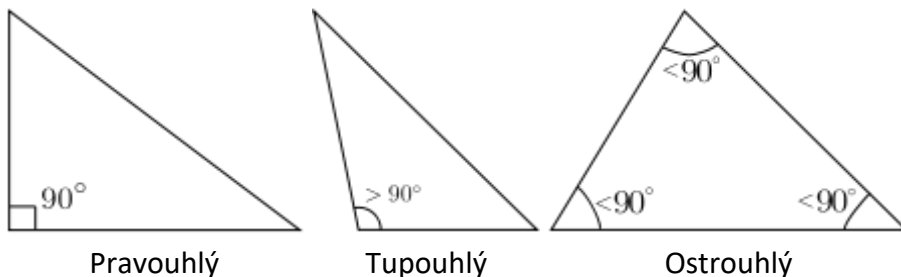
-**Rovnoramenný trojuholník** – má práve dve strany rovnakej dĺžky. Rovnoramenný trojuholník má tiež dva rovnaké vnútorné uhly (sú to uhly, v ktorých obe rovnaké strany sa napájajú na tretiu). ::Rovnostranný trojuholník je tiež rovnoramenný, ale nie každý rovnoramenný trojuholník je rovnostranný.

-**Rôznostranný trojuholník** – všetky strany majú rozličnú dĺžku. Jeho vnútorné uhly sú taktiež rozdielne.



2. Podľa veľkosti najväčšieho vnútorného uhla:

- **Pravouhlý trojuholník** – má práve jeden vnútorný uhol s veľkosťou 90° (pravý uhol). Strana ležiaca oproti pravému uhlu sa nazýva **prepona** a je najdlhšou stranou v trojuholníku. Ostatné dve strany sa nazývajú **odvesny**.
- **Tupouhlý trojuholník** – má práve jeden vnútorný uhol väčší ako 90° (tupý uhol).
- **Ostrouhlý trojuholník** – má všetky vnútorné uhly menšie ako 90° (tri ostré uhly).



VLASTNOSTI

Výška trojuholníka

Je to úsečka na priamke prechádzajúcej vrcholom trojuholníka a je kolmá na protiľahlú stranu. V ľubovoľnom trojuholníku prechádzajú všetky tri výšky jedným bodom, ktorý nazývame ortocentrum. **Ortocentrum** môže mať ľubovoľnú polohu:

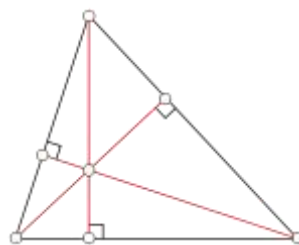
- vo vnútri - ak je trojuholník ostrouhlý
- na obvode - ak je trojuholník pravouhlý
- mimo trojuholníka - ak je trojuholník tupouhlý

Výpočet výšky trojuholníka:

$$v_a = c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma$$

$$v_b = a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha$$

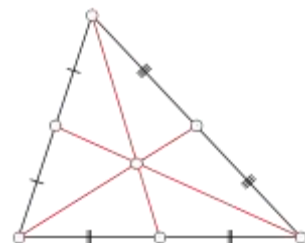
$$v_c = b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$$



Ťažnice trojuholníka

Ťažnice sú úsečky, ktoré spájajú stredy strán s vrcholmi protiľahlých strán. Prechádzajú jedným bodom, ktorý voláme ťažisko. Ťažisko delí každú z ťažníc v pomere 2 : 1, pričom dlhšia časť je medzi vrcholom a ťažiskom, a kratšia časť medzi ťažiskom a stredom strany.

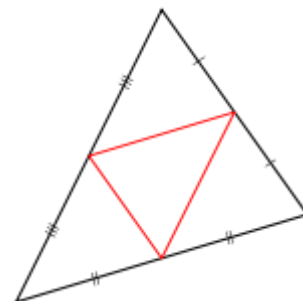
Ťažnice trojuholníka a ťažisko.



Stredné priečky trojuholníka

Sú to spojnice stredov dvoch strán a sú rovnobežné s tretou stranou trojuholníka. Veľkosť strednej priečky sa rovná polovičnej veľkosti strany trojuholníka, s ktorou je rovnobežná. Stredná priečka trojuholníka delí trojuholník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 1 : 3.

Stredné priečky trojuholníka.

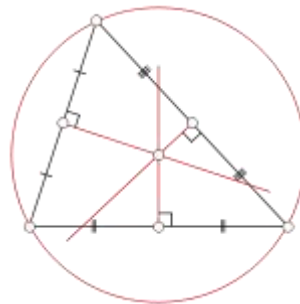


Kružnica opísaná trojuholníku

Je to kružnica, ktorá obsahuje vrcholy daného trojuholníka. Stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC je **priesečník osí strán** trojuholníka ABC. **Polomer je spojnica stredy s ľubovoľným vrcholom.**

Kružnica opísaná

trojuholníku



Polomer opísanej kružnice:

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

Kružnica vpísaná trojuholníku

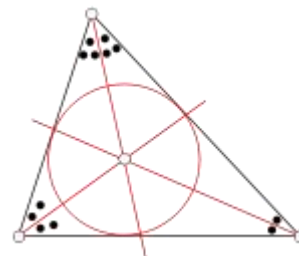
Je to kružnica, ktorá sa dotýka všetkých strán daného trojuholníka.

Stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC je **priesečník osí uhlov** trojuholníka ABC (a leží vždy vnútri trojuholníka!). **Polomer je vzdialenosť stredy od ľubovoľnej strany trojuholníka.**

Polomer vpísanej kružnice:

$$r = 4R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

alebo $r = 2S/o$; o = polomer trojuholníka, S = obsah trojuholníka



Výpočet obsahu

Pre výpočet obsahu všeobecného trojuholníka

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

a, b, c strany trojuholníka

v_a, v_b, v_c výšky trojuholníka

- Pre výpočet obsahu pravouhlého trojuholníka

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

a, b odvesny trojuholníka

Výpočet obvodu

Obvod trojuholníka sa rovná súčtu všetkých troch strán trojuholníka. **Platí:** $o = a + b + c$

Pytagorova veta

Obsah štvorca nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov nad oboma jeho odvesnami. Z toho vyplýva vzorec: $c^2 = a^2 + b^2$

Sínusová veta

Znenie sínusovej vety:

:Pre každý trojuholník ABC s vnútornými uhľami α , β , γ a stranami a , b , c platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Čiže:

- Pomer všetkých dĺžok strán a hodnôt sínusov im protilahlých uhlov je v trojuholníku konštantný.
- Pomer dĺžok strán trojuholníka sa rovná pomeru sínusov im protilahlých uhlov:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Kosínusová veta

Kosínusová veta používa na výpočet dĺžky strany, pričom poznáme veľkosť uhla ležiaceho oproti strane a dĺžku zvyšných dvoch strán (ktoré zvierajú tento uhol).

Kosínusová veta má tri základné varianty:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

Podobnosť trojuholníkov

Dva trojuholníky môžu byť zhodné (podobné) podľa troch viet o podobnosti: *sss*, *sus*, *usu*.

- **Veta (sss):** Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú vo všetkých troch stranách, sú zhodné.
- **Veta (sus):** Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom sú zhodné.
- **Veta (usu):** Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej strane a dvoch uhloch k nej priľahlých sú zhodné.
- **Veta (Ssu):** Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a uhle ležiacom oproti väčšej z nich, sú zhodné.

Osová a stredová súmernosť

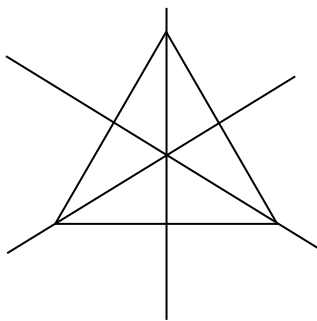
Stredová súmernosť

Žiadny trojuholník nemá stred súmernosti.

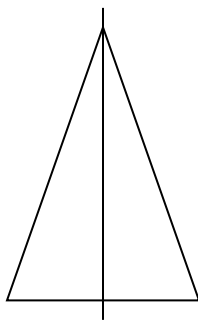
Osová súmernosť

Rovnostranný trojuholník má tri osi súmernosti (osi strán trojuholníka). Rovnoramenný trojuholník má jednu os súmernosti (os základne). Rôznostranný trojuholník nemá os súmernosti.

rovnostranný



rovnoramenný



rôznostranný

