

Trojuholník

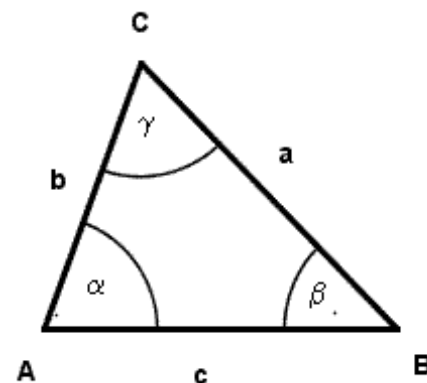
- **Trojuholník** je jeden zo základných rovinných geometrických útvarov; mnohoúhelník s tromi vrcholmi a stranami. Je to dvojrozmerný útvar.
- **Trojuholník** môžeme definovať ako **prienik troch polrovín**.
Ak máme tri rôzne body A, B, C, (ktoré neležia na jednej priamke) tak trojuholníkom s vrcholmi A, B, C nazývame prienik polrovín ABC, ACB, BAC.
Úsečky AB, BC, CA sú stranami tohto trojuholníka a ich zjednotenie je obvod trojuholníka.

Strany trojuholníka:

- stranami trojuholníka nazývame úsečky $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$;
- ich zjednotenie tvorí obvod trojuholníka

Vnútorne uhly trojuholníka:

- vnútorné uhly trojuholníka pri vrchoch A, B, C sa nazývajú konvexné uhly $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, $BCA = \gamma$



V každom trojuholníku platí:

- súčet veľkostí vnútorných uhlov je 180° (π radiánov)
- oproti väčšej strane leží väčší uhol a naopak

Trojuholníková nerovnosť:

- súčet dĺžok ľubovoľných 2 strán je väčší ako dĺžka tretej strany

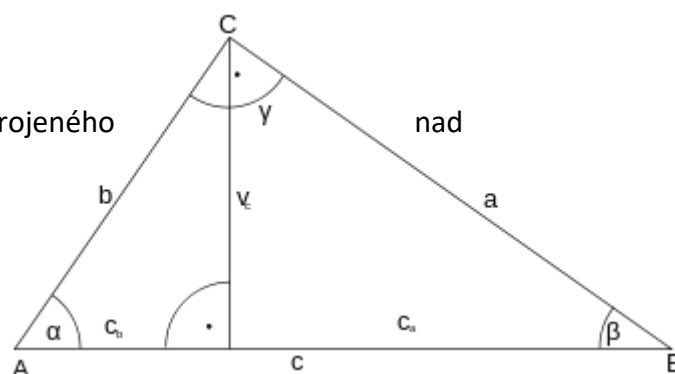
- | | |
|---------------|-----------------|
| • $a + b > c$ | • $ a - b < c$ |
| $b + c > a$ | $ b - c < a$ |
| $a + c > b$ | $a - c < b$ |

Vzťahy platiace v pravouhlom trojuholníku

- **Pytagorova veta:** Obsah štvorca nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov nad oboma jeho odvesnami. Z toho vyplýva vzorec: $c^2 = a^2 + b^2$
- **Euklidova veta o výške:** Obsah štvorca zostrojeného nad výškou pravouhlého trojuholníka spustenou na preponu sa rovná obsahu pravouholníka, ktorého strany sú úseky na prepone priľahlé k odvesnám.

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

- **Euklidova veta o odvesne:** Obsah štvorca zostrojeného odvesnou pravouhlého trojuholníka sa rovná



obsahu obdĺžníka zostrojeného z prepony a úseku na prepone príslušného k odvesne.

Pre jednotlivé odvesny trojuholníka teda platí:

$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$b^2 = c \cdot c_b$$

Sínusová veta

Znenie sínusovej vety:

- Pre každý trojuholník ABC s vnútornými uhlami α , β , γ a stranami a , b , c platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

- Pomer všetkých dĺžok strán a hodnôt sínusov im protilahlých uhlov je v trojuholníku konštantný.

- Pomer dĺžok strán trojuholníka sa rovná pomeru sínusov im protilahlých uhlov:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

- Máme dané dva uhly trojuholníka a dĺžku jednej jeho strany a chceme vypočítať veľkosť ostatných strán.

Kosínusová veta má tri základné varianty:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

- používa na výpočet dĺžky strany, pričom poznáme veľkosť uhla ležiaceho oproti strane a dĺžku zvyšných dvoch strán (ktoré zvierajú tento uhol).

Podobnosť trojuholníkov

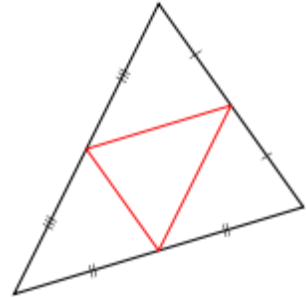
Dva trojuholníky môžu byť zhodné (podobné) podľa troch viet o podobnosti: *sss*, *sus*, *usu*.

- Veta (sss):** Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú vo všetkých troch stranách, sú zhodné.
- Veta (sus):** Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom sú zhodné.

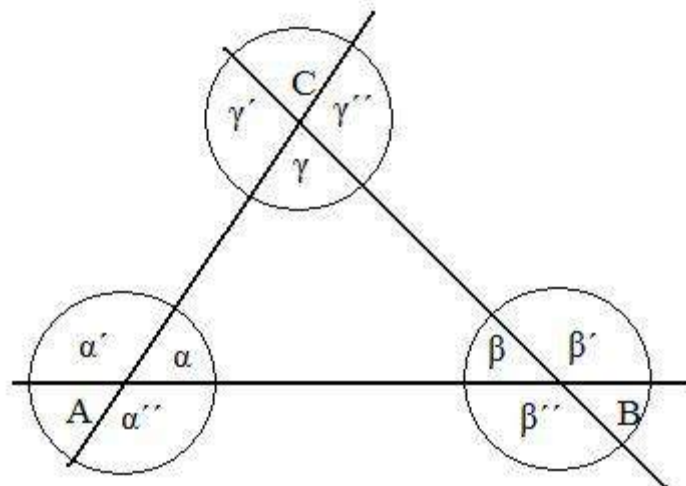
- **Veta (usu):** Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej strane a dvoch uhloch k nej priľahlých sú zhodné.
- **Veta (Ssu):** Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a uhle ležiacom oproti väčšej z nich, sú zhodné.

1. Stredné priečky trojuholníka

- Sú to spojnice stredov dvoch strán a sú rovnobežné s treťou stranou trojuholníka. Veľkosť strednej priečky sa rovná polovičnej veľkosti strany trojuholníka, s ktorou je rovnobežná. Stredná priečka trojuholníka delí trojuholník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 1 : 3.



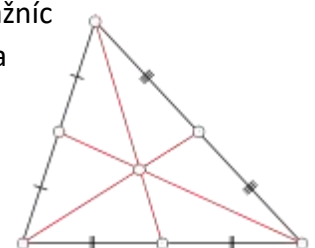
2. Vonkajší uhol



- Uhly α' , α'' sú susedné uhly k uhlu α , uhly β' , β'' sú susedné uhly k uhlu β , uhly γ' , γ'' sú susedné uhly k uhlu γ . Susedné uhly k vnútorným uhlom trojuholníka sa nazývajú vonkajšie uhly trojuholníka. Pri každom vrchole sú dva vonkajšie uhly. Vonkajšie uhly pri tom istom vrchole sú vrcholové a preto sú zhodné.

3. Ťažnice trojuholníka

- Ťažnice sú úsečky, ktoré spájajú stredy strán s vrcholmi protiľahlých strán. Prechádzajú jedným bodom, ktorý voláme ťažisko. Ťažisko delí každú z ťažníc v pomere 2 : 1, pričom dlhšia časť je medzi vrcholom a ťažiskom, a kratšia časť medzi ťažiskom a stredom strany.



4. Výška trojuholníka

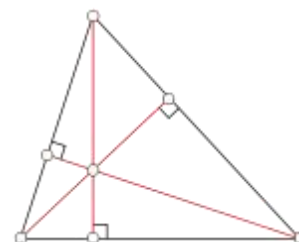
- Je to úsečka na priamke prechádzajúcej vrcholom trojuholníka a je kolmá na protiľahlú stranu. V ľubovoľnom trojuholníku prechádzajú všetky tri výšky jedným bodom, ktorý nazývame ortocentrum. **Ortocentrum** môže mať ľubovoľnú polohu:
 - vo vnútri - ak je trojuholník ostrouhlý
 - na obode - ak je trojuholník pravouhlý
 - mimo trojuholníka - ak je trojuholník tupouhlý

Výpočet výšky trojuholníka:

$$v_a = c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma$$

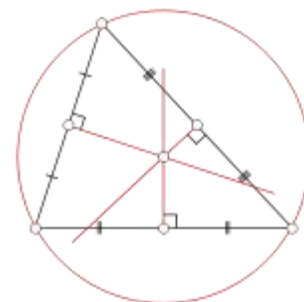
$$v_b = a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha$$

$$v_c = b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$$



5. Kružnica opísaná trojuholníku

- Je to kružnica, ktorá obsahuje vrcholy daného trojuholníka. Stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC je priesečník osí strán trojuholníka ABC. Polomer je spojnica stredy s ľubovoľným vrcholom.



Kružnica vpísaná trojuholníku

- Je to kružnica, ktorá sa dotýka všetkých strán daného trojuholníka. Stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečník osí uhlov trojuholníka ABC (a leží vždy vnútri trojuholníka!). Polomer je vzdialenosť stredy od ľubovoľnej strany trojuholníka.

