2[illegible]

Úvod do matematickej logiky

Učebný text z predmetu matematika

1. Výroky

Za **výrok** (**tvrdenie**) považujeme každú oznamovaciu vetu, o ktorej má zmysel hovoriť, že je pravdivá alebo nepravdivá. O výroku, ktorý je pravdivý, hovoríme že platí. O výroku, ktorý je nepravdivý, hovoríme že neplatí. Z dvoch pravdivostných hodnôt – **pravda alebo nepravda** – môže mať výrok iba jednu ! Žiadny výrok nemôže byť súčasne pravdivý aj nepravdivý. Existujú však výroky, ktorých pravdivostnú hodnotu nepoznáme. Taký výrok sa nazýva **hypotéza**.

Výroky budeme symbolicky označovať veľkými písmenami.

<u>1. úloha :</u>
Ktoré z nasledujúcich viet sú výrokmi ?
A: Číslo 12 je násobkom čísla 4.
B: Čo je riešením rovnice x+3=16 ?
C: Každý násobok čísla 5 je nepárny.
D: Vyrieš rovnicu x+3=16 !
E: Nulou sa deliť nedá.
F: x+3=16
G: Aspoň jeden trojuholník má všetky strany rovnako dlhé.
H: Rozdiel množín A – B je vždy tá istá množina ako rozdiel B – A.

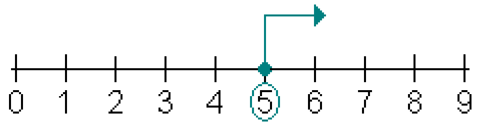
2. Negácia výrokov

Každý výrok môžeme poprieť tak, že vytvoríme nový výrok začínajúci slovami **„ Nie je pravda, že ...“** a za tým doplníme pôvodný výrok. Takto vytvorený výrok nazývame **negácia** (daného) výroku. Negáciu výroku V označujeme **¬V alebo V'**.

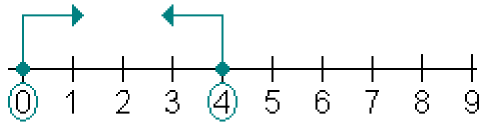
<u>2. úloha :</u>
Povedz negácie výrokov z 1. úlohy !
Skús povedať negácie týchto výrokov bez použitia slov „ Nie je pravda, že ...“. Porovnaj pravdivostnú hodnotu každého výroku s pravdivostnou hodnotou jeho negácie.

Negácia pravdivého výroku je nepravdivá. Negácia nepravdivého výroku je pravdivá. **Výrok a jeho negácia majú vždy opačné pravdivostné hodnoty.** Ak vo výroku hovoríme o počte (osôb, vecí, prvkov množiny...), tak pred číslom môžeme použiť iba slová **aspoň** alebo **najviac**.

<u>1. riešený príklad :</u>
Povedz negáciu výroku A: Dnes chýba aspoň 5 žiakov.
<u>Riešenie :</u>
Počet, o ktorom sa hovorí vo výroku, znázorníme na číselnej osi vľavo.
Negácia musí zahrnúť všetky zvyšné možnosti počtu (obrázok vpravo).
¬A: Dnes chýbajú najviac 4 žiaci.

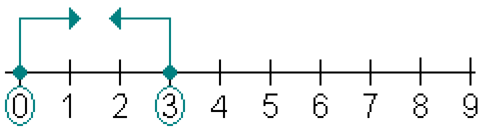


počet ≥ 5

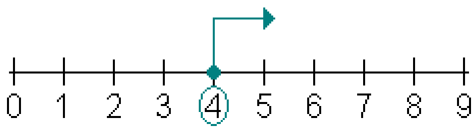


0 ≤ počet ≤ 4

<u>2. riešený príklad :</u>
Povedz negáciu výroku B: Jednotku z písomky mali najviac 3 žiaci.
<u>Riešenie :</u>
Počet, o ktorom sa hovorí vo výroku, znázorníme na číselnej osi vľavo.
Negácia musí zahrnúť všetky zvyšné možnosti počtu (obrázok vpravo).
¬B: Jednotku z písomky mali aspoň 4 žiaci.

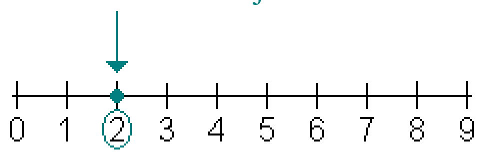


$0 \leq$ počet ≤ 3

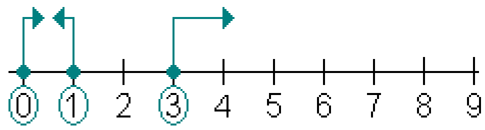


počet ≥ 4

<u>3. riešený príklad :</u>
Povedz negáciu výroku C: Okuliare nosia 2 žiaci.
<u>Riešenie :</u>
Počet, o ktorom sa hovorí vo výroku, znázorníme na číselnej osi hore. Negácia musí zahrnúť všetky zvyšné možnosti počtu (obrázok dole).
¬C: Okuliare nosí najviac 1 žiak alebo aspoň 3 žiaci.



počet = 2



počet ≤ 1 alebo počet ≥ 3

<u>3. úloha :</u>
Napíš negácie výrokov o počte. Počet znázorni na číselnej osi. Zisti pravdivostnú hodnotu každého výroku (predpokladaj, že výroky hovoria o triede, do ktorej chodíš).
A: V triede je aspoň 25 žiakov.
B: Dievčat je najviac 6.
C: Dnes chýba najviac 5 žiakov.
D: Aspoň 8 žiakov nosí okuliare.
E: Aspoň 15 žiakov sa učí nemčinu.
F: Z Novák sú práve 4 žiaci.
G: Autobusom dochádza najviac 10 žiakov.
H: Na obed si môžeme vybrať najviac z 2 alebo aspoň zo 4 jedál.
I: Nikto nefajčí.
J: Všetci pravidelne športujú.

3. Výroky s kvantifikátormi

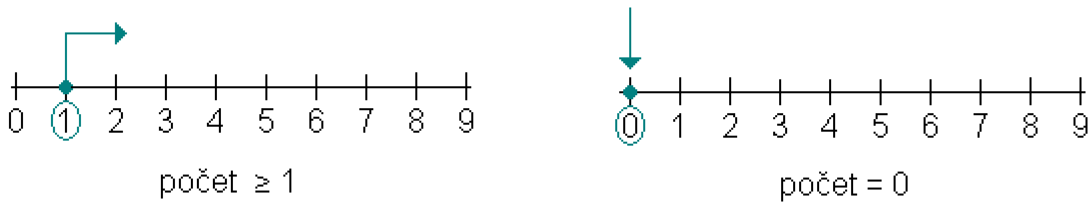
Slovné spojenia „ každý, všetky, existuje ...“ sa nazývajú **kvantifikátory**. **Existenčný kvantifikátor** môžeme symbolicky zapísať znakom ∃ – čítame existuje. **Všeobecný kvantifikátor** symbolicky zapisujeme znakom ∀ – čítame každý, (pre) všetky.

<u>4. riešený príklad :</u>
Symbolicky zapíš nasledujúce výroky a povedz, ktoré z nich sú pravdivé ?
A: Existuje reálne číslo, ktorého absolútna hodnota je záporná.
B: Rovnica $x^2 = 4$ má v množine celých čísel aspoň jedno riešenie.

C: Druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná.
D: Keď ktorékoľvek reálne číslo vydelíme samé sebou, podiel bude 1.
Riešenie :
A: $\exists\, x \in R : |x| < 0$ nepravda
Výrok B môžeme povedať aj takto : Existuje celé číslo, ktoré je riešením rovnice $x^2 = 4$.
B: $\exists\, x \in Z : x^2 = 4$ pravda
C: $\forall\, x \in R : x^2 \geq 0$ pravda
Výrok D môžeme povedať aj takto :
Pre každé reálne číslo platí, že ak ho vydelíme samé sebou, podiel bude 1.
D: $\forall\, x \in R : x : x = 1$ nepravda – existuje výnimka

4. úloha :
Symbolicky zapíš nasledujúce výroky a urči ich pravdivostnú hodnotu
A: Existuje celé číslo, ktoré je riešením rovnice $x^2 = 2$.
B: Existujú také reálne čísla, ktorých druhé odmocniny sú prirodzené čísla.
C: Nerovnica $2x + 3 \geq 15$ má v množine celých čísel aspoň jedno riešenie.
D: Absolútna hodnota každého prirodzeného čísla je väčšia alebo rovná 1.
E: Tretia mocnina každého reálneho čísla je nezáporná.
F: Všetky celé čísla sú bez zvyšku deliteľné dvoma.
G: Existuje aspoň jedno celé číslo, ktorého súčin s opačným číslom je nezáporný.
H: Riešením nerovnice $\sqrt{x}>0$ sú všetky kladné reálne čísla.

5. riešený príklad :
Povedz a symbolicky zapíš negácie výrokov A a C zo 4. riešeného príkladu.
Riešenie :
Ak povieme, že „ Existuje reálne číslo, ktoré má ... “ , myslíme tým, že existuje aspoň jedno reálne číslo, ktoré má uvedenú vlastnosť. Počet, o ktorom sa hovorí vo výroku, znázorníme na číselnej osi vľavo. Negácia zahŕňa všetky zvyšné možnosti počtu (obr. vpravo).



¬A: Neexistuje reálne číslo, ktorého absolútna hodnota je záporná.
alebo
¬A: Absolútna hodnota každého reálneho čísla je nezáporná. ¬A: $\forall\, x \in R : |x| \geq 0$
Ak povieme „ Pre každé reálne číslo platí ...“, myslíme tým, že **všetky** reálne čísla majú uvedenú vlastnosť. Toto tvrdenie poprieme tak, že nájdeme výnimku, čiže „ Existuje reálne číslo, pre ktoré neplatí ... “.
¬C: Existuje reálne číslo, ktorého druhá mocnina je záporná. ¬C: $\exists\, x \in R : x^2 < 0$

Ak výrok obsahuje slovo **existuje**, tak jeho negáciu vytvoríme s použitím slov **každý** alebo **všetky**. Ak výrok obsahuje slová **každý** alebo **všetky**, jeho negácia obsahuje slovo **existuje**. Ako pomôcku si zapamätajte, že negáciou výroku „ Každé pravidlo má výnimku “ je výrok „ Existuje pravidlo, ktoré nemá výnimku “.

5. úloha :
Povedz a symbolicky zapíš negácie výrokov zo 4. úlohy.

6. úloha :
Výroky povedz inými slovami. Povedz ich negácie.
A: Nikto nechýba.
B: Ani jeden študent nechodí neskoro do školy.
C: Celé prázdniny pršalo.
D: Niet pravidla bez výnimky.
E: Niektorí nemali domácu úlohu.
F: Neprišiel nikto.

4. Zložené výroky

Zložené výroky vytvoríme spojením 2 alebo viacerých jednoduchých výrokov. Najjednoduchšími zloženými výrokmi sú **alternatíva** a **konjunkcia**.

Konjunkcia dvoch výrokov je výrok vytvorený ich spojením spojkou „ **a** “, prípadne spojkami „ **i** “, „ **a zároveň** “. Konjunkciu považujeme za pravdivý výrok iba v tom prípade, ak sú pravdivé oba výroky, z ktorých je zložená. Konjunkciu dvoch výrokov symbolicky zapisujeme $\mathbf{A \wedge B}$.

Alternatíva dvoch výrokov je výrok vytvorený ich spojením spojkou „ **alebo** “. Alternatívu považujeme za nepravdivý výrok iba v tom prípade, ak sú nepravdivé oba výroky, z ktorých je zložená. Alternatívu dvoch výrokov symbolicky zapisujeme $\mathbf{A \vee B}$.

7. úloha :
Ktoré z nasledujúcich zložených výrokov sú konjunkcie ? Ktoré z výrokov sú alternatívy ? Ktoré z nich sú pravdivé ?
A: Dnes je chladno a fúka vietor.
B: Číslo 120 je násobkom čísla 4 a je násobkom čísla 6.
C: Každý žiak našej školy sa učí nemčinu alebo sa učí angličtinu.
D: Číslo 3 je deliteľom čísla 826 alebo je deliteľom čísla 441.
E: Rovnica $x^2=9$ má dva reálne korene a rovnica $|x| = 0$ má iba jeden reálny koreň.
F: Včera v Novákoch snežilo alebo pršalo.

Kedy je konjunkcia a alternatíva pravdivá (alebo nepravdivá) názorne ukazuje tabuľka :

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

1 – pravda **0 - nepravda**

Pomocou spojky „ a “ môžeme spojiť aj 3 alebo viac výrokov. Takto vytvorená konjunkcia sa považuje za pravdivú, keď sú pravdivé všetky výroky, z ktorých je zložená. Pomocou spojky „ alebo “ môžeme spojiť aj 3 alebo viac výrokov. Takto vytvorená alternatíva sa považuje za nepravdivú iba vtedy, keď sú nepravdivé všetky výroky, z ktorých je zložená. Pozor : v bežnej reči má spojka „ alebo “ často vylučovací význam. Keď je niečo biele alebo čierne, tak nemôže byť aj biele aj čierne. Vo formálnej logike to možné je.

Implikácia dvoch výrokov je výrok vytvorený ich spojením spojkou „ **ak ... tak ...** “. Implikáciu považujeme za nepravdivý výrok iba v tom prípade, ak prvý výrok (za slovom „ ak “) je pravdivý a druhý výrok (za slovom „ tak “) je nepravdivý. Implikáciu symbolicky zapisujeme **A => B.** Znak => môžeme čítať aj „ z toho vyplýva “.

Ekvivalencia dvoch výrokov je výrok vytvorený ich spojením spojkou „ **... vtedy, keď ...** “. Ekvivalenciu považujeme za pravdivý výrok vtedy, keď oba výroky, z ktorých je vytvorená, majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. Ekvivalencia niekedy nazývame aj obojstrannou implikáciou a symbolicky ju zapisujeme **A <=> B.**

8. úloha :
Ktoré z nasledujúcich zložených výrokov sú implikácie ? Ktoré z výrokov sú ekvivalencie ?
Ktoré z nich sú pravdivé ?
A: Ak je chladno, tak sneží.
B: Číslo 120 je násobkom čísla 4 vtedy, keď je násobkom čísla 6.
C: Ak sa žiak učí nemčinu, tak sa neučí angličtinu.
D: Konjunkcia dvoch výrokov je pravdivá vtedy, keď oba výroky sú pravdivé.
E: Je chladno vtedy, keď fúka vietor.
F: Ak je číslo 12 deliteľné číslom 6, tak jeho druhá mocnina je deliteľná číslom 36.

Kedy je implikácia a ekvivalencia pravdivá (alebo nepravdivá) názorne ukazuje tabuľka :

A	B	A=>B	A<=>B
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

1 – pravda **0 - nepravda**

9. úloha :
Dané sú dvojice výrokov. Vytvorte ich alternatívu, konjunkciu, implikáciu a ekvivalenciu.
Ktoré zo zložených výrokov sú pravdivé ?
a) A: Peter bol chorý. (pravdivý výrok) B: Nepísal písomku z matematiky (nepravda)
b) A: Ciferný súčet čísla 120 je deliteľný 3. B: Číslo 120 je párne
c) A: Prší. B: Fúka vietor. (pravdivosť výrokov závisí od dnešného počasia)

6. riešený príklad :
Povedzte negácie zložených výrokov vytvorených z výrokov z tretej časti predchádzajúcej úlohy. Vytvorte aj obmenu implikácie .
Riešenie :

	výrok	negácia
AΛB :	Prší a fúka vietor.	¬ (AΛB) : Neprší alebo nefúka vietor.
AVB :	Prší alebo fúka vietor.	¬ (AVB) : Neprší a nefúka vietor.
A=>B :	Ak prší, tak fúka vietor.	¬ (A=>B) : Prší a nefúka vietor.
A<=>B :	Prší, vtedy keď fúka vietor.	¬ (A<=>B) : Prší a nefúka vietor alebo neprší a fúka vietor.

Nemýľte si negáciu implikácie s obmenou implikácie. Zložený **výrok ¬B=>¬A sa nazýva obmena implikácie A=>B**. Implikácia a jej obmena majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu. Obmenu implikácie vytvoríme tak, že vymeníme poradie výrokov v implikácii a výroky A a B nahradíme ich negáciami.

Daná implikácia : Ak prší, tak fúka vietor.

Obmena implikácie : Ak nefúka vietor, tak neprší.

Negácie zložených výrokov môžeme vytvoriť pomocou nasledujúcej tabuľky :

výrok	negácia výroku
$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

10. úloha :
Napíšte negácie výrokov zo 7. a 8. úlohy. Ktoré z negácii sú pravdivé ?

11. úloha :
Napíšte obmeny implikácii z 8. a 9. úlohy.

Výrokovou formulou nazývame výraz vytvorený z veľkých písmen (nahrádzajúcich výroky), symbolov pre zložené výroky a negáciu a zátvoriek. Výroková formula (zložený výrok), ktorá je – bez ohľadu na pravdivosť výrokov, z ktorých je zložená – vždy pravdivá, sa nazýva **tautológia**. Výrokovými formulami sú napr. symbolické zápisy zložených výrokov na tejto a predchádzajúcej strane.

7. riešený príklad :
Ukážte, že výrokové formuly $A \Leftrightarrow B$ a $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ nadobúdajú – bez ohľadu na pravdivosť výrokov A a B – opačné pravdivostné hodnoty.
Riešenie :

A	**B**	**¬A**	**¬B**	$\mathbf{A \Leftrightarrow B}$	$\mathbf{A \wedge \neg B}$	$\mathbf{\neg A \wedge B}$	$\mathbf{(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)}$
1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0

porovnávame pravdivostné hodnoty výrokov v 1. a 4. stĺpci

porovnávame pravdivostné hodnoty výrokov v 2. a 3. stĺpci

Posledný stĺpec vyplníme tak, že urobíme alternatívu hodnôt v 6. a 7. stĺpci tabuľky. Po porovnaní 5. a posledného stĺpca tabuľky je zrejmé, že ak je formula pravdivá, tak formula $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ je nepravdivá a naopak. Tento príklad zároveň dokazuje, že negáciou ekvivalencie $A \Leftrightarrow B$ je výrok $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

12.úloha :
Ukážte, že výroky uvedené v tabuľke na predchádzajúcej strane sú negáciami konjunkcie, alternatívy a implikácie. Zároveň ukážte, že implikácia a jej obmena nadobúdajú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.

13. úloha
Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových formúl sú tautológiami :

a) (A=>B)V¬A	b) (A=>B)=>(B=>A)
c) (¬A<=>B)V(A<=>¬B)	d) ¬ (AVB) ∧(A=>¬B)
e) (A=>¬B)<=>(AΛ¬B)	f) [A=>(B=>¬C)]<=>(AΛ¬C)
g) [AΛ (BVC)] <=> [(AΛB)V(AΛC)]	h) [(AVB)ΛC)] => [(AΛC)VB)]

Počet riadkov v tabuľke je 2^n, kde n je počet výrokov vo výrokovej formule. Ak sú vo výrokovej formule napr. 3 výroky, v tabuľke bude $2^3 = 8$ riadkov. Do polovice riadkov v prvom stĺpci tabuľky napíšte jednotky, do druhej polovice nuly. Do druhého stĺpca k prvej polovici jednotiek pripíšte jednotky, k druhej polovici jednotiek nuly, k prvej polovici núl napíšte jednotky, k druhej polovici núl nuly. Podobne postupujte pri vypĺňaní ďalších stĺpcov tabuľky. Takto získate všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt. Pozrite sa, ako sú vyplnené prvé tri stĺpce tabuľky v 8. riešenom príklade.

5. Význam formálnej logiky

Živý jazyk je príliš bohatý pre potreby matematiky. Význam jednotlivých slov je výsledkom dlhého historického vývoja. Jedno slovo môže mať rôzny význam (napr. hlavička je časť klinca, ale aj o múdrom človeku môžeme povedať „ To je ale hlavička ! “), alebo jedna vec môže byť označená viacerými pojmami (napr. chyba je omyl). Niekedy závisí od situácie, ktorý pojem je vhodné použiť (napr. väčšina domčekov je zároveň budovami, ale nie každá budova je domčekom). Preto nie vždy rozumieme všetci to isté, keď počujeme nejaké slovo alebo vetu.

V matematike existuje spôsob, ako predísť takýmto nedorozumeniam – **celá matematika je postavená na niekoľkých základných pojmoch** (množina, bod, číslo, ...) a niekoľkých tvrdeniach (výrokoch) o nich. Tieto tvrdenia sa nazývajú **axiómy**. Všetky ostatné pojmy, ktoré sa v matematike používajú, je treba definovať, t.j. popísať pomocou základných pojmov alebo iných – predtým definovaných – pojmov. Podobne všetky tvrdenia v matematike treba dokázať (odvodiť) pomocou axióm alebo iných predtým dokázaných tvrdení. Nedokazujú sa iba axiómy.

Rozlišujte pojmy **definícia** – definíciou sa popisuje nový pojem – **matematická veta** – veta je tvrdenie o vlastnostiach pojmov. Pojem „ poučka “, ktorý ste používali na základnej škole, nie je presný matematický pojem. Poučky mohli byť definíciami aj matematickými vetami.

Ďalším spôsobom, ktorým sa v matematike predchádza nedorozumeniam, je rozsiahle **využívanie symbolov**. Od prvej triedy základnej školy poznáte symboly pre základné aritmetické operácie, pri čítaní učebnice geometrie je už väčšine šiestakov jasné, že veľké písmená latinskej abecedy označujú body, malé písmená dĺžku úsečiek, grécke písmená veľkosť uhlov atď. Je pravdepodobné, že by ste pochopili zadanie väčšiny úloh v zbierke úloh z matematiky pre 8. ročník ZŠ, ak by bola napísaná latinkou v ktoromkoľvek – pre vás cudzom – jazyku.

14. úloha :
Spočítajte, koľko nových a pre vás ešte pred niekoľkými dňami neznámych symbolov sa nachádza v tomto učebnom texte.

Formálna logika určuje pravidlá, ktorými sa riadi dokazovanie (odvodzovanie) matematických viet a zavádzanie nových pojmov. Základy formálnej logiky vytvorili takmer pred 2 400 rokmi v starovekom Grécku. Už Pytagoras tvrdil, že pravdu má ten, kto o svojom názore vie presvedčiť ostatných (silou argumentov samozrejme). Tzv. sofisti vedome používali slovné hračky, aby poukázali na nedostatky bežnej reči pri argumentácii ...

Za zakladateľa logiky ako vedy sa považuje Aristoteles. Už on kritizoval svojich žiakov, keď si mýlili implikáciu s ekvivalenciou, alebo keď za negáciu výroku „ Platí to pre všetkých “ považovali výrok „ Neplatí to pre nikoho “. Tvrdil, že ak pripustíme jeden nezmysel, ostatné vyplynú z neho.

Aristoteles formuloval **základné logické princípy :**

1. zákon sporu hovorí, že protikladné výpovede nemôžu byť zároveň pravdivé

2. zákon vylúčenia tretieho – z dvoch protikladných výpovedí jedna musí byť pravdivá

6. Riešenie logických slovných úloh

Pomocou zložených výrokov a tabuľky pravdivostných hodnôt môžeme vyriešiť aj niektoré slovné a logické úlohy.

8. riešený príklad :
Niektorý zo žiakov A, B a C rozbil okno. Zistilo sa, že v tom čase nebol pri okne A alebo tam nebol B. Keď B nebol pri okne, nebol tam ani A. Žiak C bol pri okne vtedy, keď tam nebol žiak A. Je možné určiť páchateľa, ak predpokladáme, že to bol práve jeden z trojice A, B, C ?

Riešenie :

Výrok A je pravdivý vtedy, keď podozrivý žiak A bol v čase spáchania činu pri okne. Keď A pri okne nebol, výrok A je nepravdivý (podobne výroky B a C). Preto tvrdenia o podozrivých môžeme symbolicky zapísať takto :

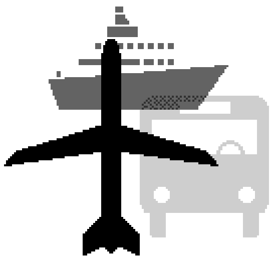
Pri okne nebol A alebo tam nebol B. ¬A∨¬B alebo ¬(A∧B)
Keď B nebol pri okne, nebol tam ani A. ¬B=>¬A alebo A=>B
Žiak C bol pri okne vtedy, keď tam nebol žiak A. C<=>¬A

A	B	C	¬A	¬B	¬A∨¬B	¬B=>¬A	C<=>¬A
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0

V tabuľke označíme riadky, v ktorých sú všetky tri výrokové formuly pravdivé. Ak v niektorom z týchto riadkov je jednotka iba pod jedným z výrokov A, B alebo C, tak žiak s touto iniciálou je páchateľom. Všetky tri výroky sú pravdivé v 5. a 7. riadku tabuľky. Piaty riadok nevyhovuje – páchatelia by museli byť dvaja. Vyhovuje 7. riadok – okno rozbil C.

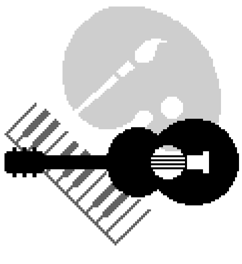
15. úloha :
Zistite, aké sú možnosti pre prácu trojice strojov, ktoré pracujú podľa nasledujúcich
podmienok : Ak pracuje prvý stroj, pracuje aj druhý stroj.
Pracuje druhý alebo tretí stroj.
Ak nepracuje prvý stroj, tak nepracuje ani tretí stroj.

16. úloha :
Pomôžte Jane vybrať si šperky
Jana sa chystá na stužkovú. Jej mama, teta a kamarátka jej radia, ktoré šperky si má vziať.
Kamarátka : „ Vezmi si brošňu alebo náhrdelník. “
Teta : „ Odporúčam náramok alebo brošňu. “
Mama : „ Ak si nezoberieš náhrdelník, neber si ani náramok. “
Jana si zobrala všetky šperky, aj keď sa cítila príliš „ ovešaná “. Splnila skutočne všetky želania ? Ktoré šperky si môže vziať, aby pritom vyhovela všetkým trom ?



17. úloha :
Záujemkyňa o zájazd do Stredomoria mala veľmi náročné a trochu čudácke požiadavky na výber dopravných prostriedkov. Chcela by letieť lietadlom alebo ísť loďou, ale nechce použiť oba dopravné prostriedky. Naviac by chcela ísť loďou a pritom už necestovať vlakom, alebo ísť vlakom a pritom už neletieť lietadlom. Zúfalý pracovník cestovnej kancelárie jej ponúkol dva zájazdy. V prvom by cestovala iba loďou a vlakom, v druhom iba lietadlom. Dokážte, že aspoň jedna z týchto ponúk spĺňala požiadavky zákazníčky. Pomôcka : „a pritom“ = „a zároveň“

17. úloha :
Aby do Kocúrkova prilákali viac turistov, chceli vybudovať fontánu, vyhliadkovú vežu a pomník zakladateľovi mesta. Mestská pokladnica však nie je príliš plná – realizovať môžu najviac dva projekty. Členovia mestskej rady sa vyjadrili takto :
1. člen : „ Nesúhlasím iba s rozhodnutím postaviť pomník a nepostaviť vyhliadkovú vežu. “
2. člen : „ Budem protestovať, ak postavíme fontánu a nepostavíme pomník. “
3. člen : „ Nepáčilo by sa mi. keby sme mali vyhliadkovú vežu a nemali fontánu. “
Starosta vyhovel všetkým trom členom rady. Čo postavia v Kocúrkove ?



18. úloha :
Zistite, kto zo štvorice kamarátov príde na diskotéku, ak dodržia tieto podmienky :
Príde aspoň jeden z dvojice B a D.
Na diskotéke bude najviac jeden z dvojice A a C.
Určite tam bude aspoň jeden z dvojice A a D.
Príde najviac jeden z dvojice B a C.
B nepôjde bez A.
C pôjde vtedy, keď pôjde D.

Pomôcka :
Výrok „Príde aspoň jeden z dvojice B a D“ môžeme symbolicky zapísať BVD.
Výrok „Na diskotéke bude najviac jeden z dvojice A a C“ môžeme symbolicky zapísať
¬(AΛC) atď. Ďalšie výroky už zapíšte samostatne.

7. Úsudky

Úsudok je myšlienkový postup, ktorý prebieha takto :

1. poznáme pravdivostnú hodnotu jedného alebo viacerých výrokov, tzv. **predpoklady**
2. priraďujeme pravdivostné hodnoty ďalším výrokom – vytvárame **závery**
   Pozor ! Úsudok nie je to isté ako výrok ! Úsudok **môže byť správny alebo nesprávny**, ale nie pravdivý alebo nepravdivý !

9. riešený príklad :
Ak bude Peter na konci školského roku vyznamenaný, dostane počítač. Dozvedeli sme sa, že Peter vyznamenaný nebude. Z toho usudzujeme, že počítač nedostane. Je to správny úsudok ?
Riešenie :
Označme výroky V: *Peter bude vyznamenaný.*
P: *Dostane počítač.*
Úlohu môžeme zapíšeme symbolicky – predpoklady sa zapisujú nad čiarou, závery sú pod čiarou :

V => P *platí*
V *neplatí*
―――――――
P *neplatí*

Na ľavej strane tabuľky označíme riadky, v ktorých sú splnené všetky predpoklady.

	V	P	V => P	
	1	1	1	
	1	0	0	•
•	0	1	1	
•	0	0	1	•

Na pravej strane tabuľky označíme riadky, v ktorých sú splnené všetky závery.

Ak existuje v tabuľke aspoň jeden taký riadok, v ktorom sú splnené všetky predpoklady a nie je splnený záver, tak úsudok je logicky nesprávny. V 3. riadku tabuľky sú predpoklady splnené, ale záver splnený nie je (chýba značka na pravej strane tabuľky). Z toho vyplýva, že úsudok *Peter nedostane počítač* bol nesprávny.

10. riešený príklad :
Dvojčatá Jana a Dana idú spolu na diskotéku práve vtedy, keď sa nepohádajú. Na diskotéke je len Dana. Z toho usudzujeme, že dievčatá sa pohádali. Je to správny úsudok ?
Riešenie :
Označme výroky
S: *Dvojčatá idú spolu na diskotéku*
N: *Dvojčatá sa nepohádali.*
Symbolický zápis

S <=> N *platí*
S *neplatí*
―――――――
N *neplatí*

	S	N	S <=> N	
	1	1	1	
	1	0	0	•
	0	1	0	
•	0	0	1	•

Ak v každom riadku tabuľky, v ktorom sú splnené všetky predpoklady, je splnený aj záver, tak úsudok je logicky správny. V tejto tabuľke sú splnené predpoklady iba v poslednom riadku – v tomto riadku je však splnený aj záver (značky sú na oboch stranách riadku). Z toho vyplýva, že úsudok *Dievčatá sa pohádali* je správny.

19. úloha :
Zistite, ktoré z nasledujúcich úsudkov sú správne :
Keď padá sneh, autobus mešká.
a) Dnes nesneží. Z toho usudzujeme, že autobus nebude meškať.
b) Autobus nemešká. Z toho usudzujeme, že nepadá sneh.
c) Autobus mešká. Z toho usudzujeme, že padá sneh.

20. úloha :
Martin povedal, že ak bude mať dosť peňazí, tak pôjde na školský výlet. O Martinovi vieme, že má dosť peňazí len vtedy, keď si ich zarobí na brigáde. Martin na výlet išiel. Z toho usudzujeme, že predtým bol na brigáde. Je to správny úsudok ?

21. úloha :
Keď študujem logiku, bolí ma hlava. Keď si vezmem tabletku proti bolesti hlavy, ohlúpnem. Tabletku si beriem práve vtedy, keď ma bolí hlava. Z toho vyplýva, že keď budem študovať logiku, tak ohlúpnem. Je to správny úsudok ?

Tento učebný text bol vypracovaný v rámci projektu **Aplikácia inovačných metód a foriem práce v školskom vzdelávacom programe**, ktorý je súčasťou operačného programu **Vzdelávanie**, financovaného z Európskych sociálnych fondov.

Použitá literatúra a ďalšie zdroje :

[1] Hejný, Milan – Vantuch, Juraj a kolektív autorov : Teória vyučovania matematiky 2, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990, 2. vydanie, str. 44 – 53.

[2] Šedivý, Jaroslav – Lukátšová, Júlia – Odvárko, Oldřich – Zöldy, Michal : Úlohy o výrokoch a množinách pre 1. ročník gymnázia, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1970, 4. vydanie, str. 35 – 40.

Ďalšia literatúra a webové stránky zaoberajúce sa (aj) výrokovou logikou :

[1] Vošický, Zdeněk : Testy z matematiky v kocke pre stredné školy, Art Area, 2006

[2] Burjanová, Ľudmila – Viskupová, Ivana : Matematika strednej školy v testoch – 1.časť, Exam, 2003

[3] http://brainden.com/hlavolamy/vyrokova-logika.htm

[4] http://matematika.havrlant.net/sk/vyroky

[5] http://pohodovamatematika.sk/neriesene-priklady/logika-a-teoria-mnozin/matematicka-logika

Obsah

1. Výroky	1
2. Negácia výrokov	1
3. Výroky s kvantifikátormi	2
4. Zložené výroky	4
5. Význam formálnej logiky	7
6. Riešenie logických slovných úloh	8
7. Úsudky	10
Použitá literatúra	12