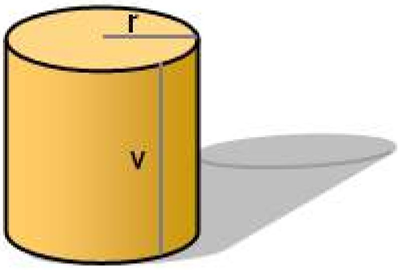
Valec, ihlan, kužeľ a guľa.

1. Úlohy na výpočet objemu a povrchu valca

Rotačný valec je teleso, ktoré vznikne otáčaním obdĺžnika okolo jednej jeho strany. Táto strana je výškou valca, ozn. v. Valec má dve **podstavy – kruhy** s polomerom r. Ak rozvinieme jeho **plášť** do roviny, dostaneme **obdĺžnik**, ktorého jedna strana je výškou valca a druhá obvodom jeho podstavy.

Pre objem a povrch valca platí:

obsah podstavy	$\mathbf{P = \pi.r^2}$
objem valca	$\mathbf{V = P.v = \pi.r^2}$
obsah plášťa	$\mathbf{Q = 2\pi.r.v}$
povrch valca	$\mathbf{S = 2.P + Q = 2\pi.r.(r + v)}$



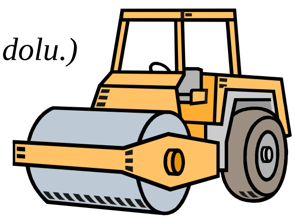
1. Vypočítaj objem a povrch valca, ak jeho rozmery sú
a) r = 5 cm, v = 60 cm *Riešenie: S=2041 cm^2, V=4710 cm^3*
b) r = 2,5 m, v = 1,6 m *Riešenie: S=64,37 m^2, V=31,4 m^3*
c) r = 2 mm, v = 3,5 m. *Riešenie: S=439,85 cm^2, V=43,96 cm^3*

2. Sud tvaru valca je vysoký 1,2 m, <u>priemer</u> jeho podstavy je 0,6 m. Koľko hl vody sa zmestí do suda ? Aké najmenšie množstvo plechu treba na jeho výrobu ?
Riešenie: V=3,39 hl (po zaokrúhlení), S=2,826 m^2 – počítame obe podstavy.

3. Aký objem (v dl) má hrnček tvaru valca, ak je vysoký 8 cm a <u>priemer</u> jeho podstavy je 7 cm ?
Riešenie: V= 3 dl.

4. Hrniec na polievku má tvar valca s <u>priemerom</u> dna 30 cm a výškou 36 cm. Pre koľko osôb vystačí polievka, ak je hrniec naplnený do ¾ výšky ? Počíta sa s 0,25 l polievky pre jednu osobu.
Riešenie: 19 litrov polievky pre 76 osôb.

5. Detský plastový bazénik (tvaru valca) je hlboký 60 cm. Jeho <u>priemer</u> je 3,2 m.
a) Aké najmenšie množstvo materiálu treba na jeho výrobu ?
Nezabudni, že chýba jedna podstava ☺.
b) Koľko m^3 vody je v bazéne, ak je úplne naplnený ?
Riešenie: V= 4,823m^3, P=8 m^2, Q=6 m^2, spolu 14 m^2 (zaokrúhlené dolu.)

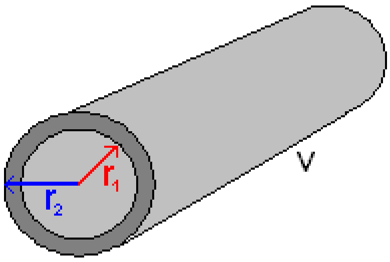


6. Cestný valec má <u>priemer</u> 0,8 m a dĺžku 1,8 m. Akú plochu uvalcuje, ak sa otočí 1200-krát ? Koľkokrát sa musí otočiť, aby uvalcoval cestu 3,6 m širokú a 6,28 km dlhú ?
Riešenie: Q=4,5216 m^2, uvalcuje necelých 5426 m^2, 5000 otočiek

7. Nádrž fontánky je plytký valec s <u>priemerom</u> dna 210 cm a hĺbkou 40 cm. Dno a boky treba 2-krát natrieť ochranným náterom. Koľko plechoviek náteru treba kúpiť, ak jedna vystačí približne na 7,5 m^2 náteru ?
Riešenie: P+Q=6,1 m^2(zaokrúhlené), treba 2 plechovky náteru.

8. Drôt s <u>priemerom</u> 3 mm je dlhý 1 500 m. Vypočítaj jeho hmotnosť (v kg), ak je vyrobený z kovu, ktorý má hustotu ρ = 8,9 g/cm^3. Ťahák : **m = V.ρ**
Riešenie: V=10597,5 cm^3, m=94,3 kg.

9. Vnútorný polomer rúry je $r_1 = 15$ cm, vonkajší polomer $r_2 = 20$ cm, dĺžka rúry je $v = 220$ cm (pozri obrázok). Môže ju odniesť jeden človek, ak je vyrobená z materiálu s hustotou $\rho = 2{,}8$ g/cm^3 ?
Riešenie:
Objem dutiny je 155430 cm^3, objem plnej rúry 276320 cm^3, rozdiel 120890 cm^3, hmotnosť 338,5 kg ☹



10. Strecha haly je polovicou plášťa valca s polomerom 6,5 m a dĺžkou 50 m. Aký objem má vzduch pod strechou ? Koľko m^2 plechu treba na jej pokrytie, ak k minimálnemu množstvu treba kvôli spojom a odpadu pripočítať 5 % ?
Riešenie: V=3316,625 m^3, polovica plášťa valca 1020,5 m^2, cca 1072 m^2 plechu.

11. Vypočítaj povrch valca, ak
a) jeho objem je 141,3 dm^3 a polomer podstavy 3 dm *Riešenie: v=5 dm, S=150,72 dm^2*
b) objem je 509 cm^3 a výška 8 cm. *Riešenie: r=4,5 cm, S=353,25 cm^2*

12. Objem hrnca (tvaru valca) má byť 2,5 l. Aký vysoký musí byť, ak priemer dna je 17 cm ?
Riešenie: v = 11 cm

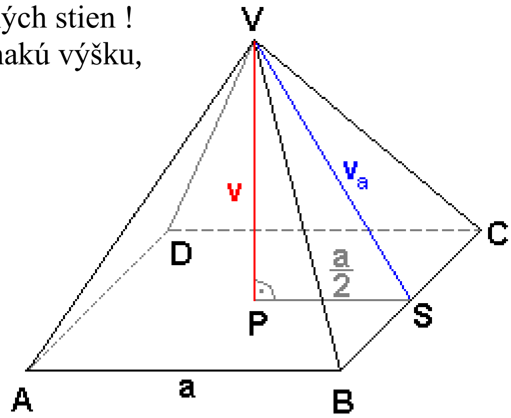
13. Aký objem môže mať valec, ktorého plášť je obdĺžnik so stranami 3,14 m a 15,7 m ?
Riešenie: Ak v=3,14 m, tak r=2,5 m a V=61,6 m^3
Ak v=15,7 m, tak r=0,5 m a V=12,3 m^3 (objemy sú zaokrúhlené).

2. Úlohy na výpočet objemu a povrchu ihlana

Ihlan je teleso ohraničené jedným **n-uholníko**m, ktorý **tvorí podstavu** ihlanu a n **trojuholníkmi**, ktoré **tvoria bočné steny** ihlanu. Ak je postavou pravidelný n-uholník, hovoríme o pravidelnom n-bokom ihlane. Výška ihlana (ozn. v) je kolmá vzdialenosť vrchola od roviny podstavy. Nemýľte si výšku ihlana s výškami jeho bočných stien !

Ak majú ihlan a hranol úplne zhodné podstavy a rovnakú výšku, tak **objem ihlanu je tretinou objemu hranola**.
Pre objem a povrch ihlana platí:

objem ihlana	$\mathbf{V = \frac{1}{3}.P.v}$
povrch ihlana	$\mathbf{S = P + Q}$



Najčastejšie budeme počítať **objem a povrch pravidelného štvorbokého ihlanu** – jeho podstavou je štvorec, plášť tvoria štyri zhodné trojuholníky.

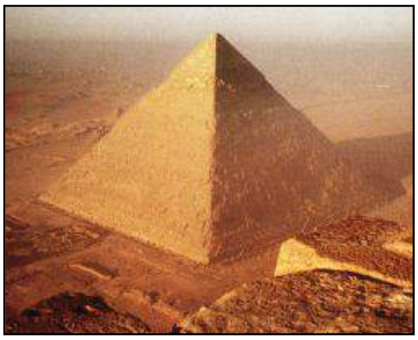
1. V pravidelnom štvorbokom ihlane je podstavná hrana ozn. a, výška ihlana v a výška bočnej steny v_a. Vypočítaj jeho objem a povrch, ak
a) a = 6 cm, v = 4 cm *Riešenie: V=48 cm^3, v_a=5 cm, S=96 cm^2*
b) a = 10 m, v = 12 m *Riešenie: V=400 m^3, v_a=13 m, S=360 m^2*
c) a = 14 cm, v_a = 25 cm *Riešenie: V=1633,3 cm^3, v=24 cm, S=896 cm^2*
d) v = 1,5 m, v_a = 1,7 m. *Riešenie: V=1,28 m^3, a=1,6 m, S=8 m^2*

2. Podstavou ihlanu je obdĺžnik so stranami a,b. Vypočítaj objem a povrch ihlanu, ak
a) a = 36 cm, b = 20 cm, výška v = 24 cm
Riešenie: V=5760 cm^3, v_a=30 cm, v_b=26 cm, S=2320 cm^2

b) a = 3,2 m, b = 4,5 m, výška v = 3 cm.
Riešenie: $V=14{,}4\ m^3$, $v_a=1{,}6\ m$, $v_b=3{,}75\ m$, $S=42{,}155\ m^2$
Pozor, bočné steny majú rôznu výšku !

3. Strecha veže má tvar pravidelného štvorbokého ihlanu s podstavnou hranou dlhou 12 m a výškou 8 m. Najmenej koľko škridiel treba na jej pokrytie, ak škridly sú štvorce so stranou 20 cm ?
Riešenie: $v_a= 10\ m$, *strecha(plášť ihlana) má* $240\ m^2$, *treba 6000 škridiel.*

4. Zhora otvorená plechová nádoba má tvar štvorbokého ihlanu (je otočený hlavným vrcholom dolu). Podstava je obdĺžnik, hrany sú dlhé 18 cm a 32 cm, hĺbka nádoby je 12 cm.
a) Koľko dm^2 plechu treba na zhotovenie tejto nádoby ?
b) Aký má objem (v litroch) ?
Riešenie: $V=2{,}3$ *litra,* $v_a=15\ cm$, $v_b=20\ cm$, $Q=5{,}9\ dm^2$

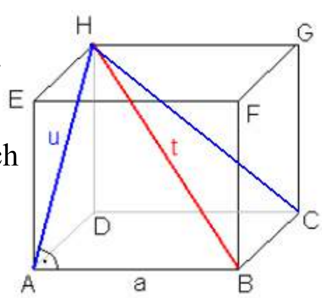


5. Veľká pyramída v Gíze (Egypt) má tvar pravidelného štvorbokého ihlanu. Pyramída je vysoká 149 m, jej podstavu tvorí štvorec so stranou 227 m. Je postavená z kamenných kvádrov s objemom približne 1 m^3.
a) Koľko kvádrov potrebovali na postavenie pyramídy ?
b) Pyramídu vraj stavali 30 rokov. Kvádre vozili na lodiach po rieke Níl, keď bola rozvodnená. Mohli ich preto voziť iba 3 mesiace v roku. Koľko kvádrov museli doviesť každý deň ?
Riešenie: po zaokrúhlení 2 559 300 kvádrov.
Ak robili 90 dní x 30 rokov, museli doviesť 948 kvádrov každý vhodný deň.

6. Sklenená pyramída v Louvre (zámok francúzskych kráľov v Paríži) je vysoká 20,6 m. Podstavu tvorí štvorec so stranou a = 35 m. Koľko m^2 skla tvorí povrch pyramídy ? Podstava sa nepočíta.
Riešenie: $v_a=27{,}03\ m$, $Q=1892{,}1\ m^2$.

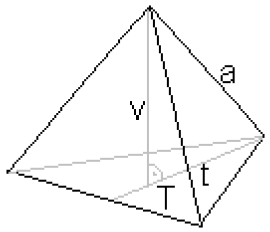
7. Pravidelný osemsten je teleso, ktoré má všetky steny rovnaké – sú to rovnostranné trojuholníky. Môžeme ho vytvoriť aj tak, že zlepíme dva pravidelné štvorboké ihlany podstavami k sebe. Vytvor model pravidelného osemstenu s hranou a = 10 cm a vypočítaj jeho objem a povrch.
Riešenie: $v_a=8{,}66\ cm$, $S=346{,}4\ cm^2$, $v=7{,}07cm$, $V=471{,}3\ cm^2$*(výsledky sú zaokrúhlené).*

8. a) Pravidelný štvorboký ihlan má objem 163,3 cm^3 a podstavnú hranu a = 7 cm.
Vypočítaj jeho výšku ! *Riešenie:* $v=10\ cm$
b) Pravidelný štvorboký ihlan má objem 196 dm^3 a výšku 12 dm.
Vypočítaj jeho podstavnú hranu ! *Riešenie:* $a=7\ cm$



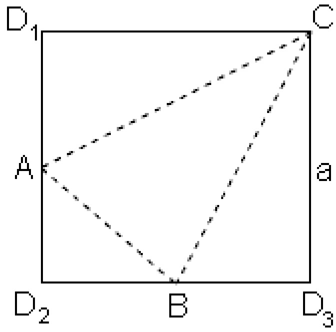
9. Kocka ABCDEFGH má hranu a = 6 cm. Vypočítaj objem a povrch ihlanu ABCDH. Načrtni kocku aj ihlan, správne označ vrcholy a pohľadaj všetky pravé uhly v ihlane.
Riešenie: v ihlane platí: $a=6\ cm$, $v=6\ cm$, $V=72\ cm^3$.
Plášť tvoria dve dvojice zhodných pravouhlých trojuholníkov.
$S_{\Delta ADH}+S_{\Delta CDH}=36\ cm^2$, $|AH|=8{,}485\ cm$, $S_{\Delta ABH}=S_{\Delta BCH}=25{,}458\ cm^2$, $S=122{,}91\ cm^2$.

10. Vytvor papierový model kocky zložený z troch zhodných štvorbokých ihlanov.
Riešenie: ihlan z predchádzajúcej úlohy.



11. Štvorsten je pravidelný trojboký ihlan, ktorého bočné steny aj podstava sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Vypočítaj objem a povrch štvorstenu, ak jeho hrany sú dlhé
a) 6 cm b) 1 m
c) Urob model štvorstenu z úlohy a).
Nápoveda: pätou výšky štvorstena je ťažisko protiľahlej strany.

Riešenie:
a) $v_a=t=5{,}2\ cm$, $S=62{,}4\ cm^2$, $v=4{,}9\ cm$, $V=25{,}48\ cm^3$
b) $v_a=t=0{,}866\ m$, $S=1{,}723 m^2$, $v=0{,}8165\ m$, $V=0{,}11785\ m^3$.

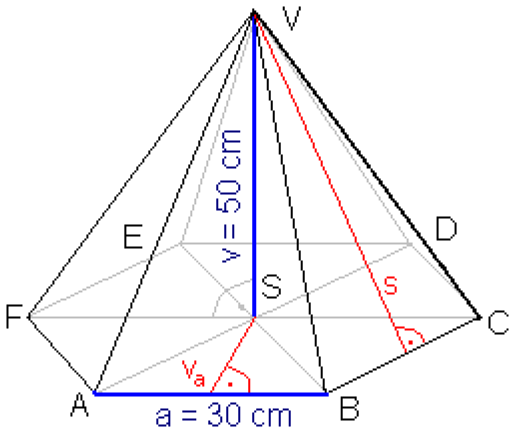


12. Vrecko na čaj má tvar štvorstenu s hranou dlhou 3 cm.
a) Aký objem má jedno vrecko ?
b) Najviac koľko takých vreciek sa dá vyrobiť z 12 m^2 špeciálneho papiera ?

Riešenie: $v_a=2{,}6\ cm$, $S=15{,}6\ cm^2$, $v=2{,}45\ cm$, $V=3{,}185\ cm^3$
7692 vreciek z 12 m^2 *papiera*

13. Na obr. je papierový štvorec so stranou a = 12 cm, body A a B sú stredy strán.. Ak papier prehneš pozdĺž čiarkovaných čiar, vytvoríš model ihlana (body D_1, D_2 a D_3 sa spoja v jednom vrchole). Vypočítaj jeho povrch a objem.

Riešenie:
$S=a^2=144\ cm^2$, *podstavou ihlana je* ΔABD, $P=18\ cm^2$, *výška ihlana* $v=a=12\ cm$, $V=72\ cm^3$.



14. Vypočítaj objem a povrch pravidelného šesťbokého ihlana na obrázku. Podstavu tvorí šesť rovnostranných trojuholníkov so stranou a a výškou v_a. Výška bočných stien je ozn. s.

Riešenie: $v_a=26\ cm$, $P=2340\ cm^2$, $V=39000\ cm^3$
$s=56{,}4\ cm$. $Q=5076\ cm^2$, $S=7416\ cm^2$.

15. Vypočítaj objem a povrch pravidelného šesťbokého ihlanu, ak podstavná hrana a = 0,5 m, bočná hrana (napr. AV) b = 1,3 m.

Riešenie:
$v=1{,}2\ m$, $v_a=0{,}433\ m$, $P=0{,}6495\ m^2$, $V=0{,}7794\ m^3$,
$s=1{,}276\ m$, $Q=1{,}914\ m^2$, $S=2{,}5635\ m^2$.

16. Strecha jednej veže zámku je pravidelný šesťboký ihlan s hranou a = 8 m, vysoká je 11 m. Koľko škridiel treba na pokrytie veží na zámku, ak jedna škridla pokryje plochu 3 dm^2 ?

Riešenie: $v_a=6{,}93\ m$, $s=13\ m$, $Q=312\ m^2$, *10 400 škridiel.*

17. Koľko sviečok v tvare pravidelného šesťbokého ihlanu je možné vyrobiť z troch litrov vosku ? Podstavná hrana sviečky meria 3 cm, sviečka je vysoká 12 cm.

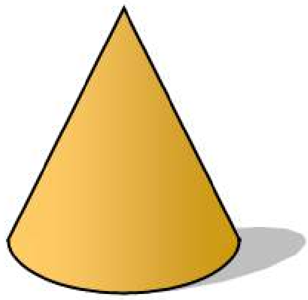
Riešenie: $v_a=2{,}6\ cm$, $P=23{,}4\ cm^2$, $V=93{,}6\ cm^3$, *vyrobiť môžu 32 sviečok.*

3. Úlohy na výpočet objemu a povrchu kužeľa

Rotačný kužeľ je teleso, ktoré vznikne otáčaním pravouhlého trojuholníka okolo jednej jeho odvesny. Táto strana je výškou kužeľa, ozn. v. Kužeľ má jednu **podstavu – kruh** s polomerom r. Ak rozvinieme jeho **plášť** do roviny, dostaneme **kruhový výsek**, ktorého polomer je tzv. strana s kužeľa (najkratšia vzdialenosť od vrchola po obvod podstavy).

Pre objem a povrch kužeľa platí:

obsah podstavy	$\mathbf{P = \pi.r^2}$
objem kužeľa	$\mathbf{V = {}^1/_3.P.v = {}^1/_3.\pi.r^2}$
obsah plášťa	$\mathbf{Q = \pi.r.s}$
povrch valca	$\mathbf{S = P + Q = \pi.r.(r + s)}$



1. Vypočítaj objem a povrch kužeľa, v ktorom
a) r = 5 cm, v = 12 cm *Riešenie: V=942 cm^3, s=13 cm, S=282,6 cm^2*
b) r = 1,44 m, s = 2,4 m *Riešenie: S=17,363 m^2, v=1,92 m, V=4,167 m^3*
c) v = 0,3 m, s = 34 cm *Riešenie: r=16 cm, V=8038,4 cm^3, S=2512 cm^2*

2. Strecha veže má tvar kužeľa s <u>priemerom</u> podstavy 12 m a výškou 8 m. Najmenej koľko m^2 krytiny treba na jej pokrytie ? Pokrýva sa iba plášť.
Riešenie: s=10 m, Q=188,4 m^2

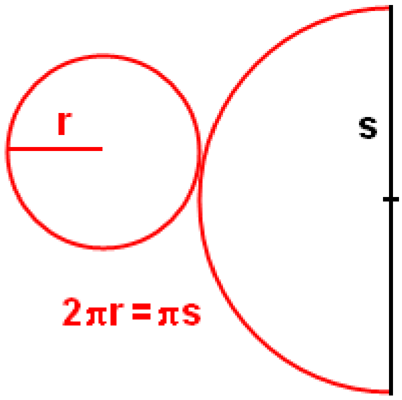
3. Stan v tvare kužeľa je vysoký 3 m, <u>priemer</u> jeho podstavy je 3,2 m.
a) Stan je vyrobený je z dvoch vrstiev materiálu. Koľko m^2 látky treba na výrobu (vrátane podlahy), ak k minimálnemu množstvu treba kvôli odpadu pri strihaní pridať 20 % ?
b) Koľko m^3 vzduchu je v stane ?
Riešenie: s=3,4 m, S=25,12 m^2, treba cca 60,3 m^2 látky

4. Stojan, na ktorý sa lepia plagáty, má tvar kužeľa. Je vysoký 2,4 m, strana kužeľa je dlhá 2,5 m. Najviac koľko plagátov s rozmermi 40 cm x 60 cm je možné nalepiť na stojan tak, aby sa neprekrývali ? Využiť sa dá 85 % plášťa kužeľa.
Riešenie: r=0,7 m, Q=5,495 m^2, plagát má 0,24 m^2, 19 plagátov.

5. Pravouhlý trojuholník má odvesny dlhé 3 cm a 4 cm. Jeden kužeľ vznikol rotáciou tohto trojuholníka okolo dlhej odvesny, druhý rotáciou okolo kratšej odvesny. Ktorý kužeľ má
a) väčší objem b) menší plášť c) väčší celý povrch ?
Riešenie:
Ak r=3 cm a v=4 cm, tak s=5 cm, V=37,68 cm^3, Q=47,1 cm^2, S=75,36 cm^2.
Ak r=4 cm a v=3 cm, tak s=5 cm, V=50,24 cm^3, Q=62,8 cm^2, S=113,04 cm^2.

6. Sviečku vyrobili tak, že z kužeľa s <u>priemerom</u> podstavy 4 cm a výškou 20 cm odrezali rovnobežne s podstavou hornú časť vysokú 10 cm.
a) Vypočítaj hmotnosť sviečky. Hustota materiálu, z ktorého je vyrobená, je ρ = 2,4 g/cm^3. Pomôcka: polomer odrezaného menšieho kužeľa je 1 cm.
b) Akú časť objemu pôvodného kužeľa tvorí objem odrezanej časti ?
Riešenie: celý kužeľ má objem 83,73 cm^3, objem sviečky je 73,27 cm^3, hmotnosť 175,8 g. Objem odrezanej časti je osminou objemu pôvodného kužeľa.

7. a) Objem kužeľa je 94,2 dm^3, polomer podstavy je 6 dm. Vypočítaj výšku a celý povrch kužeľa. *Riešenie: v=2,5 dm, s=6,5 dm, S=235,5 dm^2*
b) Objem kužeľa je 981,25 cm^3, výška kužeľa je 6 cm. Vypočítaj polomer podstavy a obsah plášťa kužeľa. *Riešenie: r=12,5 cm, s=13,87 cm, Q=544,2 cm^2*



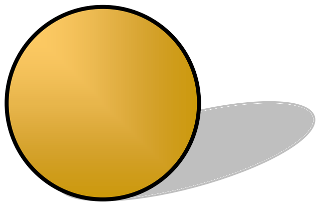
8. Lievik má objem 0,5 l, hlboký je 7 cm.
Koľko materiálu (v cm^2) treba na jeho výrobu ?
Riešenie: r=8,26 cm, s=10,83 cm, Q=281 cm^2

9. Plášť kužeľa je polkruh s <u>priemerom</u> d = 80 mm. Vypočítaj celý povrch a objem kužeľa. Nápoveda: urob model kužeľa.
Riešenie: s=4 cm, r=2 cm, v=3,464 cm,
V=14,5 cm^3, S=37,68 cm^2

10. Obal na zmrzlinu má po rozbalení tvar štvrťkruhu s polomerom 12 cm. Koľko mililitrov zmrzliny sa doň zmestí ?
Riešenie: s=12 cm, r=3 cm, v=11,62 cm, V=109,5 cm^3

4. Objem a povrch gule

Otáčaním kruhu okolo jeho priemeru vznikne **guľa**. Všetky body na povrchu gule sú rovnako vzdialené od jej stredu – táto vzdialenosť sa nazýva **polomer gule**.
Pre objem a povrch gule platí:



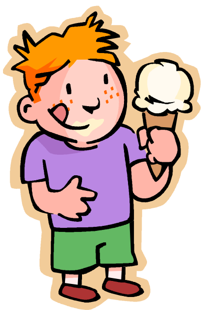
povrch gule	$\mathbf{S = 4.\pi.r^2}$
objem gule	$\mathbf{V = {}^4/_3.\pi.r^3}$

1. Vypočítaj objem a povrch gule, ak
a) r = 5 cm *Riešenie: V=523,3 cm^3, S=314 cm^2*
b) r = 9,5 m *Riešenie: V=3590 m^3, S=1134 m^2 (zaokrúhlené)*
c) d = 200 cm *Riešenie: V=4,187 m^3, S=12,56 m^2*
d) d = 36 mm *Riešenie: V=24,4 cm^3, S=40,7 cm^2*

2. Zisti, čo má väčší povrch a čo objem: jedna guľa s polomerom r_1 = 0,6 m alebo 500 guličiek (spolu), každá s polomerom r_2 = 6 cm ?
Riešenie: veľká guľa V_1=904320 cm^3, S_1=45216 cm^2
malé guličky spolu V_2=452160 cm^3, S_2=226080 cm^2

3. Vodojem má tvar gule s <u>priemerom</u> 7,5 m.
a) Najviac koľko hektolitrov vody sa zmestí do vodojemu ?
b) Koľko plechoviek farby treba na natretie jeho povrchu, ak jedna stačí na 10 m^2 náteru ?
Riešenie: V=2208hl, S=177 m^2 (zaokrúhlené), treba 18 plechoviek farby

4. Dutá guľa má vnútorný polomer (t.j. polomer dutiny) r_1 = 62 mm, vonkajší polomer r_2 = 65 mm. Vyrobená je z materiálu s hustotou ρ = 8,1 g/cm^3. Vypočítaj hmotnosť gule !
Riešenie: objem dutiny V_1=997,8 cm^3, objem plnej gule V_2=1149,8 cm^3, rozdiel je 152 cm^3
hmotnosť m=1231,2 g



5. Čo si má vybrať maškrtník, ak chce viac čokolády: balíček, v ktorom je 200 ks plných čokoládových guličiek s <u>priemerom</u> 1 cm, alebo dutú guľu s vonkajším <u>priemerom</u> 10 cm vyrobenú z čokolády hrubej 5 mm ?
Riešenie: objem guličiek spolu je 104,7 cm^3, plná veľká guľa má objem 523,3 cm^3, objem dutiny je 381,5 cm^3, rozdiel je 141,8 cm^3– objem čokolády vo veľkej guli je väčší.

6. Zmrzlinár predal za deň 6 litrov vanilkovej zmrzliny. Koľko porcí tvaru polgule s priemerom 6 cm mohol z predanej zmrzliny urobiť ?
Riešenie: objem jednej porcie je 56,52 cm^3, urobiť mohol 106 porcii.

7. Kupola hvezdárne tvaru polgule je vysoká 5,4 m. Koľko m^2 plechu treba na jej pokrytie, ak k minimálnemu množstvu treba kvôli spojom a odpadu pripočítať 15 % ?
Riešenie: Q=183 m^2, treba 210,6 m^2 plechu.

8. Zem je (približne) gula s polomerom 6 378 km.
a) Vypočítaj, koľko km^2 má povrch Zeme.
b) Vypočítaj hmotnosť Zeme, ak 1 m^3 váži 5,515 tony.
Riešenie: S=510 926 783 km^2, V=1 086 230 300 000 km^3
m=5 990 560 000 000 ton

9. Vypočítaj a) objem gule, ak jej povrch má 78,5 m^2
Riešenie: r=2,5m, V=65,417 m^3
b) povrch gule, ak jej objem je 14,13 m^3.
Riešenie: r=1.5 m, S=28,26 m^2

10. Železná guľa má hmotnosť 100 kg. Vypočítaj jej objem, polomer a povrch, ak hustota železa je ρ = 7,6 g /cm^3.
Riešenie: V=13157,9 cm^3, r=14,65 cm, S=2694,9 cm^2