Vektorová algebra
1. Orientované úsečky

Definície : **Úsečka AB** je množina všetkých bodov, ktoré ležia na priamke AB medzi bodmi A a B vrátane bodov A a B. Ak A=B, tak úsečku nazývame **nulová úsečka**. **Orientovaná úsečka AB** je úsečka, ktorej krajné body majú určené poradie. Bod A nazývame **začiatočný bod** (začiatok), bod B nazývame **koncový bod** (koniec) orientovanej úsečky AB. Nulová

orientovaná úsečka má začiatočný aj koncový bod A. **Veľkosť úsečky AB** (ozn. |AB|) je nezáporné reálne číslo, ktoré vyjadruje akým násobkom zvolenej jednotkovej úsečky je úsečka AB. Nulová úsečka má veľkosť nula.

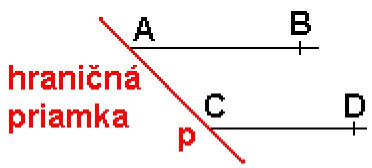
1. veta : Ak A,B sú 2 rôzne body, tak AB=BA, ale **pre orientované úsečky platí AB≠BA.**

Reálny násobok orientovanej úsečky :

1. Každý násobok nulovej úsečky je nulová úsečka.
2. Dané sú k∈R a nenulová orientovaná úsečka AB. Orientovanú úsečku **AC = k.AB** zostrojíme tak, že na priamke AB nájdeme bod C, pre ktorý súčasne platí :
   |AC| = |k|.|AB| a zároveň ak k>0, tak C∈→AB
   ak k<0, tak C leží na polpriamke opačnej ku →AB.

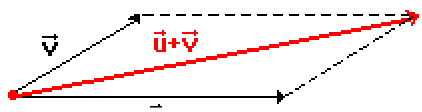
Študent musí vedieť :
– zostrojiť akýkoľvek celočíselný alebo racionálny násobok danej orientovanej úsečky.

2. Vektory a operácie s nimi



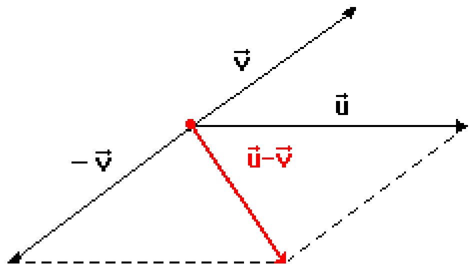
Definície : Polpriamky →AB a →CD, ktoré ležia na jednej priamke, nazývame **súhlasne rovnobežné polpriamky**, ak AB ⊂ CD alebo CD ⊂ AB. Polpriamky →AB a →CD, ktoré ležia na rovnobežných priamkach nazývame súhlasne rovnobežné polpriamky, keď ležia v jednej polrovine s hraničnou priamkou AC. **Orientované úsečky AB a CD majú ten istý smer**, keď polpriamky →AB a →CD sú súhlasne rovnobežné. **Všetky orientované úsečky, ktoré majú ten istý smer a rovnakú veľkosť, znázorňujú jeden vektor**. Nulové orientované úsečky znázorňujú nulový vektor. Vektory označujeme **v, u, o**. Každú orientovanú úsečku AB, ktorá znázorňuje vektor **v**, budeme nazývať **umiestenie vektora v**, ozn.**v = AB**.

Poznámka : V tlačenom texte sa označenie vektora píše tučným písmom. V písanom texte sa nad označenie vektora píše šípka.



Operácie s vektormi môžeme geometricky realizovať len pomocou ich umiestení. Využívame najmä operácie s orientovanými úsečkami, ktoré majú spoločný začiatok. Ak **u** = AB a **v** = AC, tak

1. **u + v = AB + AC**
   Výsledok sčítania vektorov, nezávisí od toho, v akom poradí ich sčitujeme.
2. Ak k∈R, tak **k.u = k.AB**



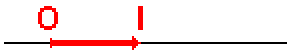
3. **–u = –AB**
4. **u–v = AB + (–1).AC**

Ak **u–v = o** (nulový vektor), tak u a v nazývame **opačné vektory**.

<u>2. veta :</u> **Výsledok operácii s vektormi nezávisí od umiestenia vektorov.**

Študent musí vedieť :
- *nájsť na obrázku v rovine aj v priestore všetky množiny tých orientovaných úsečiek, ktoré sú umiestením jedného vektora*
- *zostrojiť grafický súčet a rozdiel dvoch vektorov*
- *zostrojiť akýkoľvek celočíselný alebo racionálny násobok daného vektora*

3. Sústava súradníc na priamke, v rovine a v priestore



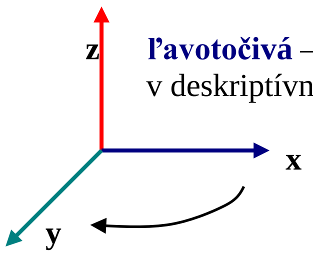
<u>Definícia :</u> Na priamke zvolíme 2 rôzne body O a I, ktorým priradíme čísla 0 a1. Každému bodu X ležiacemu na priamke priradíme číslo $x \in R$ tak, aby **OX = x.OI**. Bod O budeme nazývať **začiatok sústavy**, úsečku OI **jednotková úsečka** a číslo x **súradnica bodu X**, ozn. **X[x]**.

<u>3. veta :</u> Ak A[a] a B[b], tak platí : a) **stredom úsečky AB je bod S[½(a+b)]**
b) **|AB| = | a–b |**

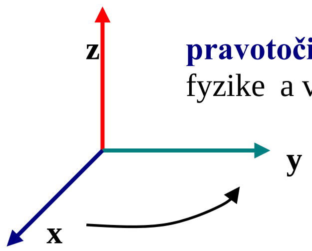
<u>Definícia :</u> V rovine zvolíme 3 rôzne body O, I a J, zostrojíme priamky OI a OJ. Bod O nazveme **začiatok sústavy súradníc**, priamku OI nazývame **x-os** a priamku OJ **y-os**. Každému bodu M v rovine priradíme ako súradnice takú dvojicu reálnych čísel [x,y], pre ktorú platí : OM = x.OI + y.OJ. Ak OI ⊥ OJ, tak sústavu nazývame **ortogonálna (pravouhlá) sústava súradníc**. Ak zároveň platí $|OI| = |OJ|$, tak sústava sa nazýva **ortonormálna (karteziánska) sústava.**

<u>4. veta :</u> **Ak $A[a_1,a_2]$, $B[b_1,b_2]$ a $C[c_1,c_2]$, tak platí :**
a) stredom úsečky AB je bod $S[\frac{1}{2}(a_1+b_1), \frac{1}{2}(a_2+b_2)]$
b) $|AB| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}$
c) ťažiskom trojuholníka ABC je bod $T[\frac{1}{3}(a_1+b_1+c_1),\frac{1}{3}(a_2+b_2+c_2)]$

<u>Definícia :</u> V priestore zvolíme 4 rôzne body O, I, J a K, ktoré nesmú ležať v jednej rovine. Zostrojíme priamky OI, OJ a OK. Bod O nazveme **začiatok sústavy súradníc**, priamku OI nazývame **x-os,** priamku OJ **y-os** a priamku OK **z-os.** Každému bodu M v rovine priradíme ako súradnice takú trojicu reálnych čísel [x,y,z], pre ktorú platí : OM = x.OI + y.OJ + z.OK. Sústava súradníc v priestore môže byť :



ľavotočivá – používa sa v deskriptívnej geometrii



pravotočivá – používa sa vo fyzike a v analytickej geometrii

Ak je sústava súradníc ortogonálna, vidíme úsečku OI skreslene, jej zdanlivá veľkosť je približne ⅔ jej skutočnej veľkosti. Záporné časti osí kreslíme čiarkovanou čiarou - ak ich nepotrebujete, tak ich nekreslite !

<u>5. veta :</u> Ak $A[a_1,a_2,a_3]$, $B[b_1,b_2,b_3]$ a $C[c_1,c_2,c_3]$ tak platí :

a) **stredom úsečky AB je bod $S[½(a_1+b_1), ½(a_2+b_2),½(a_3+b_3)]$**

b) **$|AB| = \sqrt{(a_1–b_1)^2 + (a_2–b_2)^2 + (a_3–b_3)^2}$**

c) **ťažiskom trojuholníka ABC je bod $T[⅓(a_1+b_1+c_1),⅓(a_2+b_2+c_2),⅓(a_3+b_3+c_3)]$**

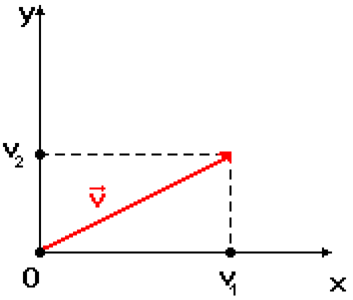
Študent musí vedieť :

– vypočítať veľkosť úsečky a súradnice jej stredu, ak pozná súradnice krajných bodov úsečky

– výpočítať súradnice ťažiska trojuholníka, ak pozná súradnice jeho vrcholov

– znázorniť v súradnicovej sústave v priestore kocku, kváder, štvorboký ihlan apod. a napísať súradnice ich vrcholov

4. Súradnice vektorov



<u>Definícia :</u> V rovine sú dané body $A[a_1,a_2]$ a $B[b_1,b_2]$. **Súradnicami vektora v =AB** nazývame **usporiadanú dvojicu čísel $[v_1,v_2]$, pre ktoré platí : $v_1 = b_1–a_1$ a $v_2 = b_2–a_2$.** V priestore sú dané body $A[a_1,a_2,a_3]$ a $B[b_1,b_2,b_3]$. Súradnicami vektora v =AB nazývame usporiadanú trojicu čísel $[v_1,v_2,v_3]$, pre ktoré platí : $v_1 = b_1–a_1$, $v_2 = b_2–a_2$ a $v_3 = b_3–a_3$.
Zápis **v = B–A** znamená, že **umiestením vektora v je orientovaná úsečka AB.** Používa sa aj zápis **B = A+v**, tzv. **súčet bodu a vektora**. Ak posunieme bod A rovnakým smerom, ako je smer vektora **v**, o vzdialenosť zhodnú s veľkosťou vektora **v**, splynie s bodom B. Preto hovoríme, že **vektor je posunutie**.

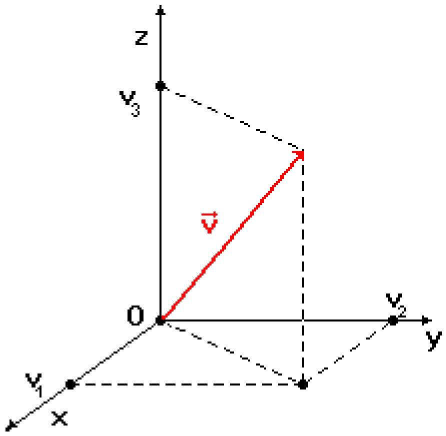
<u>6. veta :</u> Dané sú vektory $v[v_1,v_2,v_3]$ a $u[u_1,u_2,u_3]$ a čísla $k,m\in R$. **Platí :**

a) **$u+v = [u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3]$**

b) **$u–v = [u_1–v_1,u_2–v_2,u_3–v_3]$**

c) **$k.u =[k.u_1,k.u_2,k.u_3]$**

d) $k.u+m.v =[k.u_1+m.v_1,k.u_2+m.v_2,k.u_3+m.v_3]$



<u>Poznámka :</u> Dva vektory sú rovnobežné práve vtedy, keď súradnice jedného z nich sú násobkami súradníc druhého vektora. Opačné vektory majú opačné súradnice.

<u>Definícia :</u> **Veľkosťou vektora v** nazývame veľkosť ktorejkoľvek orientovanej úsečky AB, ktorá je umiestením vektora **v**. Ozn. **|v| alebo |AB|.**

<u>7. veta (o veľkosti vektorov) :</u>

V ortonormálnej sústave súradníc **v rovine pre vektor $v[v_1,v_2]$ platí : $|v| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$**

V ortonormálnej sústave súradníc **v priestore pre vektor $v[v_1,v_2,v_3]$ platí :**

$|v| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$

Dôkaz : vyplýva z Pytagorovej vety.

Študent musí vedieť :
– napísať súradnice vektora a znázorniť vektor v súradnicovej sústave
– napísať súradnice súčtu a rozdielu vektorov, súradnice násobku vektora
– napísať súradnice vektora, ktorý je rovnobežný s daným vektorom
– vypočítať veľkosť vektora

5. Skalárne násobenie vektorov

Definícia : Ak **u** = AB a **v** = AC, tak konvexný uhol BAC (< 180º) nazývame **uhol vektorov u a v** (ozn. φ). Uhol nie je definovaný, ak aspoň jeden z vektorov je nulový. Ak **u** a **v** sú nenulové vektory, ktoré zvierajú uhol φ, tak **číslo │u│.│v│.cos φ nazývame skalárny súčin vektorov u a v** (ozn. **u.v**). Ak aspoň jeden z vektorov je nulový, tak ich skalárny súčin je 0.

8. veta (o skalárnom súčine) : V ortonormálnej sústave súradníc **v rovine** pre každé dva vektory **u**$[u_1,u_2]$ a **v**$[v_1,v_2]$ platí : $\mathbf{u.v} = \mathbf{u_1.v_1 + u_2.v_2}$. V ortonormálnej sústave súradníc **v priestore** pre každé dva vektory **u**$[u_1,u_2,u_3]$ a **v**$[v_1,v_2,v_3]$ platí : $\mathbf{u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}$.

Dôkaz (v rovine) :
Podľa kosínusovej vety : $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\varphi$

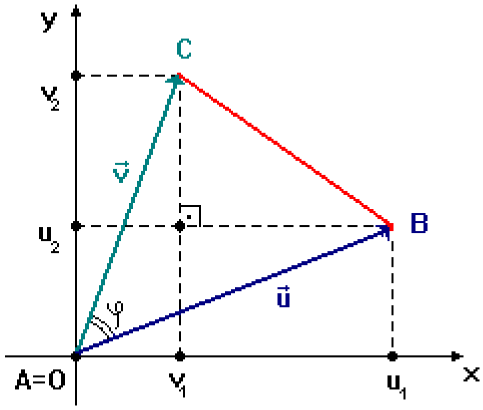
$$|BC|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \underbrace{-2.|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos\varphi}_{-2.\mathbf{u.v}}$$

$$\mathbf{u.v} = \tfrac{1}{2}(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |BC|^2)$$

Po dosadení súradníc :

$$\mathbf{u.v} = \tfrac{1}{2}[\, u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2]$$

Po úprave : $\mathbf{u.v} = u_1.v_1 + u_2.v_2$



Použitie skalárneho súčinu :

9. veta (o uhle vektorov) :
Pre veľkosť uhla φ nenulových vektorov **u** a **v** platí : $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{u.v}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|}$.

Dôsledok : nenulové **vektory u a v sú na seba kolmé práve vtedy, keď u.v = 0**.

Študent musí vedieť :
– vypočítať skalárny súčin 2 vektorov, ak pozná veľkosti vektorov a ich uhol
– vypočítať skalárny súčin 2 vektorov, ak pozná súradnice vektorov
– zistiť, či dané 2 vektory sú na seba kolmé
– vypočítať uhol 2 vektorov, ak pozná ich súradnice
– vypočítať uhly v trojuholníku (štvoruholníku apod.), ak pozná súradnice jeho vrcholov
– vypočítať uhly hrán v mnohostene(ihlan, hranol), ak pozná súradnice jeho vrcholov

Doplnok : Ak pohyb hmotného bodu po priamke prebiehal tak, že jeho posunutie **d** spôsobila stála sila **F**, ktorej smer zviera so smerom posunutia uhol φ, tak táto sila vykonala prácu
W=| F |.| d | . cos φ

6. Vektorové násobenie vektorov

Definícia : **Vektorový súčin nenulových vektorov u a v** je vektor **w**, ktorý má tieto vlastnosti :
1. **w** je kolmý na vektory **u** a **v**
2. smer vektora **w** je určený pravidlom pravej ruky
3. $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}| . |\mathbf{v}| . \sin \varphi$

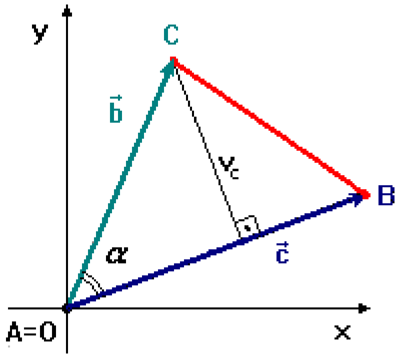
Ak je aspoň jeden z vektorov **u** a **v** nulový, tak ich vektorovým súčinom je nulový vektor.
Vektorový súčin označujeme **u x v.**

Pravidlo pravej ruky :
Ruku položíme dlaňou na rovinu, v ktorej ležia vektory **u** a **v**. Palec postavený kolmo k dlani určuje smer vektora **w**.

10. veta : Pre každé nenulové vektory u a v v priestore platí :
a) ak **u** je násobkom **v**, tak **u** x **v** = **o**
b) **u x v = –(v x u)**

11. veta : V pravotočivej ortonormálnej sústave súradníc v priestore sú dané vektory **u**$[u_1,u_2,u_3]$ a **v**$[v_1,v_2,v_3]$. Potom **súradnice vektora w = u x v môžeme vypočítať podľa vzorca :** $w_1 = u_2.v_3 - u_3.v_2$, $w_2 = u_3.v_1 - u_1.v_3$, $w_3 = u_1.v_2 - u_2.v_1$

Poznámka : Ak potrebujeme určiť v priestore ľubovoľný vektor, ktorý je kolmý na dané vektory **u** a **v**, tak použije-me vektor **w** = **u** x **v**.



12. veta (obsah trojuholníka) : V priestore je daný trojuholník ABC. Nech **b** = AC a **c** = AB.
Potom $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$
Dôkaz : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.c.v_c$, $v_c = b.\sin\alpha$, $b = |\mathbf{b}|$, $c = |\mathbf{c}|$
Po dosadení : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}|.\sin\alpha = \frac{1}{2}.|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$
podľa definície vektorového súčinu

Poznámka : Z každej úlohy v rovine môžeme urobiť úlohu v priestore tak, že za tretiu súradnicu bodov (vektorov) dosadíme nulu.

13. veta (objem rovnobežnostena) : Rovnobežnosten je štvorboký hranol, ktorého protiľahlé steny sú rovnobežné. Pre objem rovnobežnostena ABCDEFGH, v ktorom **u** = AB, **v** = AD a **w** = AE platí : $V = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).\mathbf{w}|$

Poznámka : Súčin **(u x v).w** sa nazýva **zmiešaný súčin vektorov**.

Študent musí vedieť :
– vypočítať vektorový súčin daných 2 vektorov v priestore
– napísať súradnice vektora, který je kolmý na dané 2 vektory
– pomocou vektorového súčinu vypočítať obsah trojuholníka v priestore aj v rovine
– pomocou vektorového súčinu vypočítať objem a povrch rovnobežnostenu
– zistiť vzdialenosť 2 rovnobežných rovín (priamok)

Autor : **Beata Hegerová**, Gymnázium Nováky
Použitá literatúra :
Šedivý a kolektív : Matematika pre 3.ročník gymnázia